韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 251-263

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 251-263

코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석

권 영 인 (경상대학교)
서 보 억 (계성중학교)

피타고라스 정리와 코사인 제 2법칙 사이에는 어떤 관계가 있을까. 현재 우리의 교육과정에서는 피타고라스 정리는 중학교 3학년에서 코사인 제 2법칙은 고등학교 1학년에서 배운다. 그런데, 이 두 가지 수학적 사실 사이에는 밀접한 관계가 있다. 피타고라스 정리의 확장으로서 코사인 제 2법칙을 유도할 수 있다는 것이다.
코사인 제2법칙이 소개되어진 최초의 문헌은 Euclid의 <원론>으로 거슬러 올라간다. <원론>에 소개되어진 코사인 제 2법칙의 증명방법으로 시작하여 수 천년 동안 증명되어온 다양한 증명방법을 소개하고자 한다. 특히, 직각삼각형과 원이라는 큰 틀을 바탕으로 코사인 제 2법칙의 증명 방법에 대해 고찰하고, 그 외 다양한 증명방법을 분석하고자 한다.

I. 서론

수학의 역사는 우리의 실제 삶의 공간이나 가상적 공간 속에서 새로운 사실을 발견하고 끊임없이 재구성하는 살아있는 수학적 사고의 역사라고 할 수 있다. 즉, 인류의 역사는 수학의 역사를 넘어설 수 없고, 수학의 역사는 인류의 역사와 함께 시작하였다고 볼 수 있다. 오랜 역사적 관찰을 통해 우리의 사고를 지배하는 한가지 일반적인 견해가 있다. 그것은 '수학을 학습하면서 학생들은 인류가 수학적 지식을 획득하면서 지나왔던 길을 짧게 반복한다.'는 것이다. 이러한 견해를 가진 19세기의 교육학자 F. W. Linder는 다음과 같은 교수방법을 제시하였다. '학습의 소재는 자연스러운 순서에 따라 다루어 단순한 것으로부터 복합적인 것으로, 원인으로부터 결과로, 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로, 쉬운 것에서부터 어려운 것으로 나아가되 하나 하나의 학습요소들을 아주 주의해서 서로 결합하도록 하여야 한다.'라고 주장하고 있다. 따라서, 수학교육에 있어서 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사적 발생순서 자체를 따른다는 것으로 결국 개개인의 수학교육은 인류의 지식 발생과 같은 과정을 따라야 한다는 것이다.

수학교육에 있어서 '수학사를 활용한 수학교육'이 강조되어지고 있는 것은 이것과 무관하지 않을 것이다. 하나의 수학적 지식이 발생하여 그 개념이 어떻게 발달되어져 왔는지 그리고, 그 지식이 얼마나 다양한 접근방법으로 사고하여 왔는지를 살펴보는 것이 중요한 의미를 지니고 있는 것이다. 게다가 이러한 고찰을 통해 수학수업에 활용 가능하고, 학생들의 사고 수준에 맞는 새로운 접근방법을 제시하는 것이 필요할 것이다.

본 연구에서는 코사인 제 2법칙에 대한 역사적 고찰과 더불어 다양한 증명방법을 분석하여 보고

자 한다. 역사적으로 얼마나 다양한 수학자들에 의해 어떤 일관된 방향으로 코사인 제 2법칙이 이해되어 왔는지 분석보고자 한다.

수학사적으로 볼 때, 코사인 제 2법칙을 비롯한 삼각비는 삼각형 및 원과 매우 밀접한 관계를 맺고 있다. 현재의 중·고등학교 수학교과서의 삼각비 단원을 보면 삼각형과 원을 이용하여 코사인 제 2법칙과 삼각비를 전개하고 있다. 본 연구에서도 코사인 제 2법칙을 원과 직각삼각형에 근거하여 다양한 증명방법을 분석하고, 이것을 이용한 새로운 수업내용 전개 방법에 대해 살펴보고자 한다. 먼저 삼각형과 원을 이용한 증명방법을 소개하고, 그 외 다양한 증명방법을 소개하겠다.

II. 삼각형을 통한 코사인 제 2법칙의 증명 방법 분석

역사적으로 볼 때 최초의 코사인 제2법칙의 기록은 유클리드의 <원론>이다. 따라서, 먼저 <원론>에 나타난 코사인 제 2법칙의 내용을 분석하고, 그 의미를 생각해 보기로 하자. 그 다음으로 삼각형의 변의 길이를 이용한 대수적인 방법을 통한 코사인 제 2법칙의 증명과 삼각형에서 각 변으로 만들어지는 정사각형의 넓이를 이용한 기하학적인 방법을 통한 코사인 제 2법칙의 증명이 어떻게 이루어지는지 살펴보기로 하자.

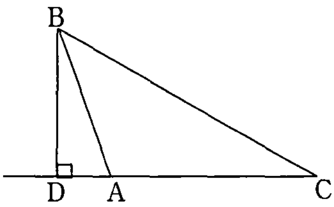
1. 고대 그리스 시대의 코사인 제 2법칙의 증명 방법

기원전 수 천년 전부터 직각삼각형에서 세 변의 길이 사이에는 피타고라스의 정리가 성립함을 알고 있었고, 직각이 아닌 삼각형에서도 피타고라스 정리와 유사한 관계가 성립하고 있음을 알고 있었다. 기원전 300년경에 기록되어진 유클리드(Euclid)의 <원론(Elements)>에서는 이것에 대한 자세한 증명 방법을 소개하고 있다. 유클리드의 <원론> 제 2권 명제 12번과 명제 13번은 아래와 같이 서술되어져 있다.

명제12. 둔각삼각형에서 둔각의 대변 위의 정사각형은 둔각을 끼는 두 변 위의 정사각형의 합보다, 둔각을 끼는 변의 하나와 이 변에 수선이 내려지고, 이 둔각에의 수선에 의해서 외부에 잘려진 선분으로 에워싸인 직사각형의 2배만큼 크다.

□ 증명 : <그림 1>에서와 같이 $\triangle$ABC는 둔각삼각형이다. $\angle$BAC는 둔각이다. 꼭지점 B에서 변AC의 연장선에 내린 수선의 발을 D라고 하자. [제1권 명제12]

이제 다음을 보이도록 한다. 변 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합보다 변 AD와 변



<그림 1>

AC를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배만큼 더 크다.

선분 CD가 선분CD 위의 점 A에 의해서 나누어졌다고 한다면, 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이, 선분 AC와 선분 AD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배의 합과 같아질 것이다.[제2권 명제4]

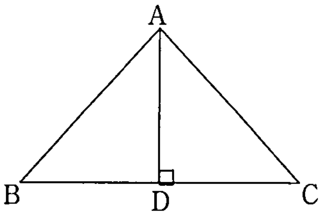
그리고, 양변에 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 더하면, 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형과 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합은 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이, 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이, 선분 AC와 선분 AD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배의 합과 같아질 것이다.

그런데, ∠D가 직각이므로 선분BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다. 또한, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.[제1권 명제47]

그러므로, 변 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이, 선분 AC와 선분 AD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배의 합과 같다. 즉, 변 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합보다 변 AD와 변 AC를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배만큼 더 크다. 증명 끝.[1) ■

명제13. 예각삼각형에서 예각의 대변 위의 정사각형은 예각을 끼는 두 변 위의 정사각형의 합보다, 예각을 끼는 변의 하나와 이 변에 수선이 내려지고, 이 예각에의 수선에 의해서 외부에 잘려진 선분으로 에워싸인 직사각형의 2배만큼 작다.

□ 증명 : <그림 2>에서와 같이 △ABC는 예각삼각형이다. ∠ABC는 예각이다. 꼭지점 A에서 대변BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. [제1권 명제12]



<그림 2>

이제 다음을 보이도록 하자. 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 변 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합보다 변 BC와 변 BD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배만큼 더 작다.

---

1) 현대적인 기호로 다시 쓴다면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2+\overline{CA}^2+2\overline{AD}\ \overline{AC} \\ \overline{CD}^2+\overline{BD}^2 &= \overline{AD}^2+\overline{CA}^2+2\overline{AD}\ \overline{AC}+\overline{BD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2+\overline{CA}^2+2\overline{AD}\ \overline{AC} \end{aligned}$$

따라서, 직선 BC위에 어떤 점 D에 의해서 나누어졌다고 한다면, 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합은 선분 BC와 선분 BD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배와 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같아질 것이다.[제2권 명제7]

그리고, 양변에 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 더하면, 선분 BC, 선분 BD, 선분 AC 각각을 한 변으로 하는 세 정사각형의 넓이의 합은 선분 BC와 선분 BD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배와 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이, 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.

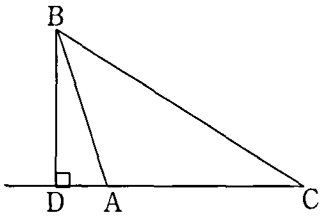
그런데, ∠D가 직각이므로 선분AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 선분 BD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다. 또한, 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 CD를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.[제1권 명제47]

그러므로, 변 BC와 변 AB를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합은 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 BC와 선분 BD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배의 합과 같다. 즉, 변 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 변 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 변 BC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합보다 변 BC와 변 BD를 두 변으로 가지는 직사각형의 넓이의 2배만큼 더 작다. 증명 끝.2) ■

2. 변의 길이를 이용한 코사인 제 2법칙의 증명 방법

가. 둔각삼각형일 경우

□ 증명 : 둔각삼각형 ABC의 꼭지점 B에서 AC의 연장선에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{BD}=h$, $\overline{AD}=x$, ∠BAC = ∠A 라 두자. △BCD, △ABD가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 다음 두 식을 얻을 수 있다.(그림 3)



<그림 3>

$$a^2=(b+x)^2+h^2 \quad \text{-----①}$$
$$c^2=h^2+x^2 \quad \text{-----②}$$

이 성립한다. 위의 ①식에서 ②식을 빼면 $a^2-c^2=b^2+2bx$ 를 얻을 수 있다. 즉,

2) 현대적인 기호로 다시 쓴다면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2+\overline{BD}^2 &= \overline{CD}^2+2\overline{BC}\ \overline{BD} \\ \overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{AD}^2 &= \overline{CD}^2+2\overline{BC}\ \overline{BD}+\overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2+\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2+2\overline{BC}\ \overline{BD} \\ \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\ \overline{BD} \end{aligned}$$

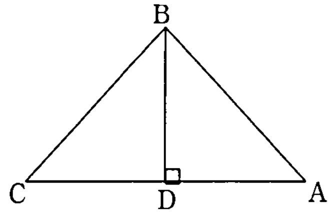
$$a^2=b^2+c^2+2bx$$

이다. 삼각비의 정의에 의해서, $x=c\cos(180°-A)=-c\cos A$ 이므로,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

나. 예각삼각형일 경우



<그림 4>

□ 증명 : 예각삼각형 ABC의 꼭지점 B에서 AC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{BD}=h$, $\overline{AD}=x$, ∠BAC = ∠A 라 두자. △BCD, △ABD가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 다음 두 식을 얻을 수 있다.(그림 4)

$$a^2=(b-x)^2+h^2 \quad \text{-----①}$$

$$c^2=h^2+x^2 \quad \text{-----②}$$

이 성립한다. 위의 ①식에서 ②식을 빼면 $a^2-c^2=b^2-2bx$ 를 얻을 수 있다. 즉,

$$a^2=b^2+c^2-2bx$$

이다. $x=c\cos A$ 이므로,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

결국 직각삼각형이 아닌 임의의 한 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c, 한 각을 ∠A라고 하면, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 인 관계가 성립한다. 우리는 이것을 **코사인 제 2법칙**이라 한다. 그런데, 코사인 제2법칙에서 ∠A = 90°인 직각삼각형이면 $\cos A=0$ 이므로 $a^2=b^2+c^2$ 을 얻을수 있다. 따라서, 코사인 제 2법칙은 피타고라스 정리를 임의의 삼각형으로 확장하였음을 알 수 있다.

3. 넓이를 이용한 코사인 제 2법칙의 증명

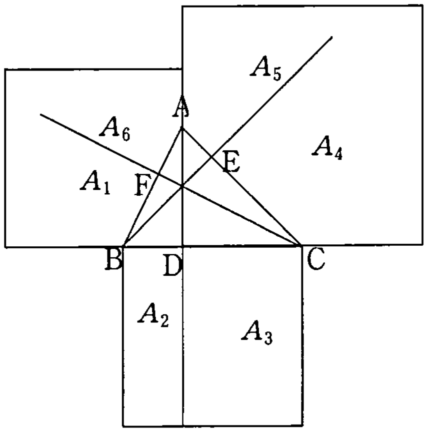
코사인 제 2법칙이 처음 발견되어졌을 때의 역사적 상황을 고려하면 앞의 방법과 같은 대수적인 식은 큰 의미가 없었을 것으로 판단되어진다. 실제로, 앞의 유클리드 <원론> 제 2권 명제12, 13의 증명을 보면 어떤 대수적인 식도 찾아볼 수 없다. 앞에서 언급하였듯이 코사인 제 2법칙은 피타고라스 정리의 확장으로 보는 것이 타당하다. 그렇다면, <원론>에서 제시하고 있는 피타고라스 정리의 증명으로부터 새로운 코사인 제 2법칙의 증명방법을 유추해 낼 수는 없을까 하는 의문이 자연스럽게 생기게 된다. 이러한 기본적인 발상으로부터 여기에서는 <원론>에서 제시한 피타고라스 정리의 증명

방법이 코사인 제 2법칙의 증명에 어떻게 적용되는지 살펴보기로 하자.

유클리드의 <원론> 제 1권 명제47번에서는 피타고라스의 정리를 삼각형의 각각의 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 이용하여 증명하고 있다. 이와 같은 방법으로 예각삼각형에서의 코사인 제 2법칙이 아래와 같이 증명되어진다.

□ 증명 : 예각 △ABC가 주어져 있다. $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\angle A=\mu$ 라고 하자. 세 변 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$를 한 변으로 하는 정사각형을 <그림 5>와 같이 그리자.

삼각형의 세 꼭지점에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 내려 세 변에 그려진 정사각형을 분할하도록 하자. 이 때 세 수선의 발을 D, E, F라 한다. 이 세 수선에 의해서 $\overline{AB}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 A_1, A_6 두 개의 직사각형으로 나누어지고, $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 A_2, A_3 두 개의 직사각형으로 나누어지고, $\overline{CA}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 A_4, A_5 두 개의 직사각형으로 나누어진다.



<그림 5>

수선의 성질에 의해서 △ABD ∽ △BCF , △ACD ∽ △BCE 이다. 왜냐하면, ∠BCF = ∠BAD , ∠DAC = ∠CBE 이기 때문이다.(한인기・신현용, 2002)

여기서 $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=\beta$ 라 두면 $\alpha+\beta=\mu$ 인 관계가 성립한다. 또한, △CBF, △CAF, △ABD, △ACD가 모두 직각삼각형이므로 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{BF}=a\sin\alpha\ ,\ \overline{BD}=c\sin\alpha\ ,\ \overline{CD}=b\sin\beta$$

$$\overline{CE}=a\sin\beta\ ,\ \overline{AE}=c\cos\mu\ ,\ \overline{AF}=b\cos\mu$$

위의 식에 의해서 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$A_1=ca\sin\alpha,\ \ A_2=ac\sin\alpha,\ \ A_3=ab\sin\beta$$

$$A_4=ba\sin\beta,\ \ A_5=bc\cos\mu,\ \ A_6=cb\cos\mu$$

따라서, $A_1=A_2$, $A_3=A_4$, $A_5=A_6$ 인 관계가 성립한다.

이제, $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 a^2은 A_2+A_3 가 되고, 다음이 성립한다.

$$a^2\ =A_2+A_3=A_1+A_4=(c^2-A_6)+(b^2-A_5)=b^2+c^2-2A_5$$
$$a^2\ =b^2+c^2-2bc\cos\mu$$

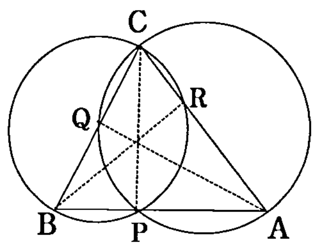
결국, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mu$ 라는 코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

III. 원을 이용한 코사인 제2법칙의 증명 방법 분석

앞에서는 현존하는 가장 오래된 문헌에 나타나 있는 코사인 제 2법칙의 증명과 대수적인 관계를 이용한 증명, 기하학적 넓이를 이용한 증명 이 세 가지 방법에 대해 살펴 보았다. 앞에서 분석한 세 가지 방법은 모두 삼각형을 근거로 하여 증명을 시도하였다면, 여기에서는 원과 관련시켜 코사인 제 2법칙의 증명 방법에 대해 살펴보고자 한다.

1. 예각삼각형의 경우

□ 증명 : 삼각형 ABC에서 <그림 6>과 같이 세 변의 길이를 각각 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\mu$ 인 관계가 성립한다.(단, μ는 a, b의 길이를 갖는 두 변의 끼인 각) 이 때, $\angle C=\mu < 90°$이다.



<그림 6>

BC와 CA를 지름으로 하는 두 원을 그린다. △ABC의 세 꼭지점에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 한다. 현 BP의 길이를 x, 현 PA의 길이를 y로 두자. 그럼, 아래 두 식을 얻을 수 있다.

$$QC = b\cos\mu \quad ---①$$

$$RC = a\cos\mu \quad ---②$$

$\overline{AC}$를 지름으로 하는 원 밖의 한 점 B에서 원에 그은 두 할선을 $\overline{BC}, \overline{BA}$라고 하면, 할선에 관한 정리와 ①, ②식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$a(a-b\cos\mu) = xc$$

$$a^2-ab\cos\mu = xc \quad ---③$$

같은 방법으로 한 점 A에서 원에 그은 할선에 관한 정리와 ①, ②식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$b(b-a\cos\mu) = yc$$

$$b^2-ab\cos\mu = yc \quad ---④$$

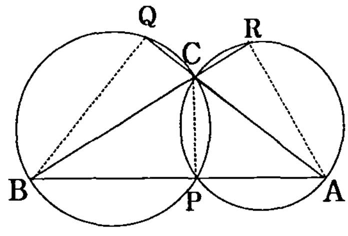
③식과 ④식을 서로 더하면, 아래와 같이 코사인 제2법칙을 얻을 수 있다.

$$a^2+b^2-2ab\cos\mu = (x+y)c$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\mu = c^2$$ 증명끝.■

2. 둔각삼각형의 경우

□ 증명 : 삼각형 ABC에서 <그림 7>과 같이 세 변의 길이를 각각 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\mu$ 인 관계가 성립한다.(단, μ는 a, b의 길이를 갖는 두 변의 끼인 각) 이 때, $\angle C=\mu > 90°$이다.



<그림 7>

BC와 CA를 지름으로 하는 두 원을 그린다. △ABC의 세 꼭지점에서 대변 혹은 대변의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 한다. 현BP의 길이를 x, 현PA의 길이를 y로 두자. 그럼, 아래 두 식을 얻을 수 있다.

$$QC=a\cos(180-\mu)=-a\cos\mu \qquad \text{---①}$$
$$RC=b\cos(180-\mu)=-b\cos\mu \qquad \text{---②}$$

$\overline{AC}$를 지름으로 하는 원 밖의 한 점 B에서 원에 그은 두 할선을 $\overline{BR}, \overline{BA}$라 하면, 할선에 관한 정리와 ①, ②식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$a(a-b\cos\mu)=xc$$
$$a^2-ab\cos\mu=xc \qquad \text{---③}$$

같은 방법으로 한 점 A에서 원에 그은 할선에 관한 정리와 ①, ②식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$b(b-a\cos\mu)=yc$$
$$b^2-ab\cos\mu=yc \qquad \text{---④}$$

③식과 ④식을 서로 더하면, 아래와 같이 코사인 제2법칙을 얻을 수 있다.

$$a^2+b^2-2ab\cos\mu = (x+y)c$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\mu = c^2 \quad \text{증명끝.}■$$

위의 사실로 부터, ∠C의 크기가 예각이든 둔각이든 관계없이 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c와 한 대각 C의 크기를 μ 라고 하면 항상 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mu$ 인 관계가 성립한다.

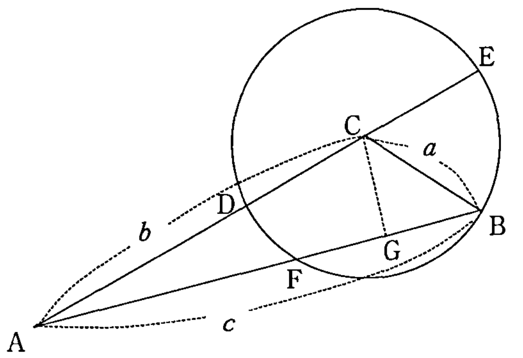
IV. 코사인 제 2법칙의 다양한 증명 방법

여기에서는 역사적으로 유명한 여러 가지 코사인 제 2법칙의 증명방법을 현대적 의미로 분석해 보기로 한다.

1. Bartholomeo Pitiscus 의 증명방법

삼각법(trigonometry)이란 용어를 처음으로 사용한 Bartholomeo Pitiscus는 기하학적 방법으로 다음과 같이 코사인 제 2법칙을 증명하고 있다.(B. Pitiscus, On Internet)

□ 증명 : △ABC에서 꼭지점 C를 중심으로 한 변 $\overline{BC}$를 반지름으로 하는 원을 그린다. 이 때, 원과 삼각형과의 교점을 각각 D, F라고 하고, 변 AC의 연장선이 원과 만나는 점을 E라 하자. 꼭지점 C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 G라 하고, $\overline{GB}=x$라고 두자. 이 때, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\angle B=\mu$ 라고 하자.



<그림 8>

점 A는 원의 외부에 있는 점이므로, 원에 그은 두 할선 AE와 AB에 관한 성질에 의해서 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

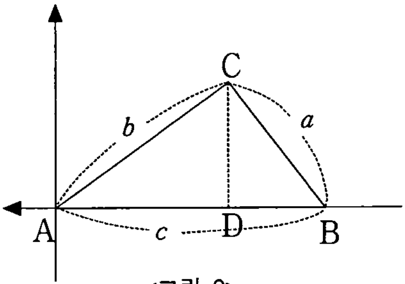
$$\begin{aligned} \mathrm{AD}\times\mathrm{AE} &= \mathrm{AF}\times\mathrm{AB} \\ (b-a)(b+a) &= (c-\overline{\mathrm{FB}})c \\ b^2-a^2 &= c^2-c\overline{\mathrm{FB}} \end{aligned}$$

그런데, $\overline{\mathrm{FB}}=2x$ 이고, $x=a\cos\mu$ 이므로, 위의 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} b^2-a^2 &= c^2-c\overline{FB} \\ b^2-a^2 &= c^2-2ac\cos\mu \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\mu \end{aligned}$$

즉, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\mu$ 라는 코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

2. 좌표평면을 이용한 증명방법



<그림 9>

□ 증명 : △ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\angle A=\mu$ 라고 하고, 점 A의 좌표는 (0, 0) , 점 B의 좌표는 $(c,0)$, 점 C의 좌표를 (x,y) 라고 하자. 그러면,

$$x=b\cos\mu,\quad y=b\sin\mu \quad ---①$$

가 성립한다. (그림 9)

두 점 사이의 거리공식에 의해서

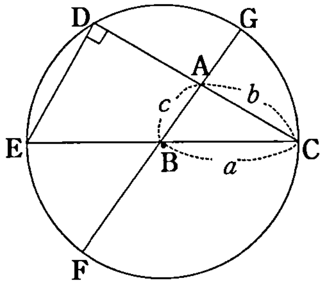
$$a=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} \quad ---②$$

을 얻을 수 있다. 이제 ①식을 ②식에 대입하여 양변을 제곱하면,

$$a^2 =(b\cos\mu-c)^2+(b\sin\mu)^2$$
$$a^2 =b^2\cos^2\mu-2bc\cos\mu+c^2+b^2\sin^2\mu$$
$$a^2 =b^2(\sin^2\mu+\cos^2\mu)+c^2-2bc\cos\mu$$
$$a^2 =b^2+c^2-2bc\cos\mu$$

따라서, 코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

3. 원 안에서 만나는 두 현을 이용한 증명방법



<그림 10>

□ 증명 : 점 B를 중심으로 하고 반지름이 a인 원을 그린다. (그림 10) 원의 중심 B를 지나는 현 $\overline{CE}, \overline{FG}$를 그린다. $\overline{CE}$를 빗변으로 하는 직각삼각형 CDE를 그리고, 현 $\overline{GF}$와의 교점을 A 라 하자. 이 때, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\angle ACB=\theta$라고 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{CD} =2a\cos\theta$$
$$\overline{AD} =2a\cos\theta-b$$
$$\overline{AF} =a+c$$
$$\overline{AG} =a-c$$

또한, $\overline{AD}\times\overline{AC}=\overline{AF}\times\overline{AG}$ 이 성립하므로,

$$b(2a\cos\theta-b) = (a+c)(a-c)$$
$$2ab\cos\theta-b^2 = a^2-c^2$$
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

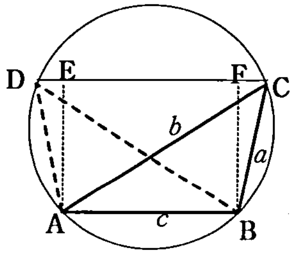
코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

4. 톨레미(Ptolemy)의 정리를 이용한 증명방법

□ 증명 : 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 주어져 있고, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\angle ABC=\theta$ 이다. $\widehat{BC}=\widehat{AD}$ 인 점 D를 잡으면 $\overline{AD}=\overline{BC}$이고, $\overline{AB}//\overline{CD}$ 이다. 그리고, □ABCD는 원에 내접하는 등변사다리꼴이 된다.(그림 11) 톨레미(Ptolemy)의 정리에 의해서

$$\overline{AC}\times\overline{BD} = \overline{AB}\times\overline{CD} + \overline{AD}\times\overline{BC}$$

가 성립한다. 또한, $\overline{BD}=\overline{AC}=b$, $\overline{AD}=\overline{BC}=a$ 이다.



<그림 11>

이제 현 $\overline{CD}$의 길이를 구해 보자. 꼭지점 A, B에서 현 $\overline{CD}$에 수선을 긋고, 그 수선의 발을 E, F라 하자. 원에 내접하는 사각형에서 두 대각의 합은 180°이므로, $\angle ADC = 180° - \theta$ 이다. 즉, $\overline{DE}=a\cos(180°-\theta)=\overline{CF}$ 이다. 그러므로, $\overline{CE}$ 의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{CD}=\overline{EF}+2\overline{CE}=c+2a\cos(180°-\theta)=c-2a\cos\theta$$

여기서, 톨레미(Ptolemy)의 정리를 적용하면,

$$\begin{aligned}\overline{AC}\times\overline{BC} &= \overline{AB}\times\overline{CD} + \overline{AD}\times\overline{BC}\\ b\times b &= c(c-2a\cos\theta)+a\times a\\ b^2 &= c^2-2ac\cos\theta+a^2\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\theta\end{aligned}$$

따라서, 코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

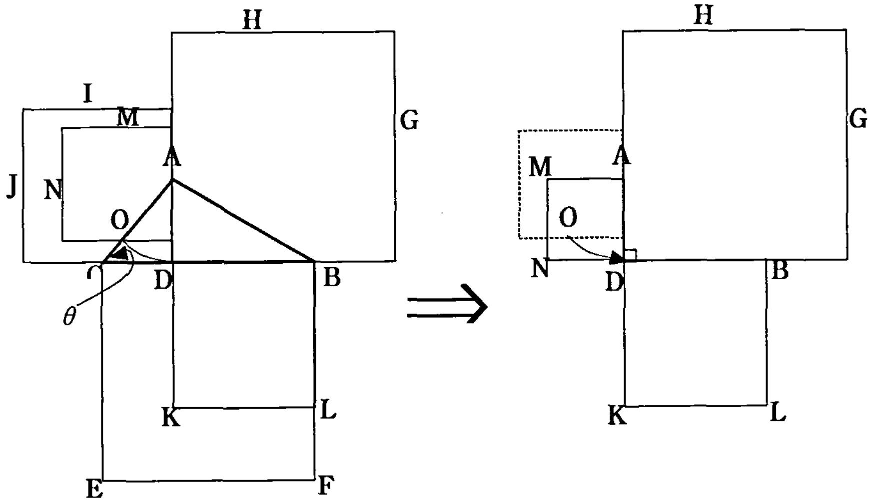
5. Timothy A. Sipka의 증명방법

임의의 삼각형을 직각삼각형으로 바꾸는 방법을 이용하여 Timothy A. Sipka 는 다음과 같은 방법으로 코사인 제 2법칙을 증명하고 있다.(Roger, 1993)

□ 증명 : 임의의 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\angle ACB=\theta$ 라 하자. 꼭지점 A에서 내린 수선의 발을 D라고 하고, A를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원을 그려서 변 AC와 만나는 점을 O라고 한다. $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AO}, \overline{DB}$ 를 한 변으로 하는 정사각형 ACJI, ABGH, BCEF, AONM, DBLK를 그린다. (그림 12 왼쪽) 또한, 정사각형 AONM에서 변 AO가 수선 AD에 오도록 회전시켜서 <그림 12>의 오른쪽 그림과 같이 만들어 보자.

$\overline{AO}=b\sin\theta$이므로 정사각형 AONM의 넓이는 $(b\sin\theta)^2$이다. $\overline{CD}=b\cos\theta$이고 $\overline{DB}=a-b\cos\theta$ 이므로 정사각형 DBLK의 넓이는 $(a-b\cos\theta)^2$이다. 또한, 정사각형 ABGH의

넓이는 c^2 이다. 즉, <그림 12>의 오른쪽 그림의 직각삼각형은 피타고라스 정리를 만족하므로, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.



<그림 12>

$$
\begin{aligned}
c^2 &= (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2 \\
&= b^2\sin^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\
&= b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + a^2 - 2ab\cos\theta \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

따라서, 코사인 제 2법칙을 얻을 수 있다. 증명 끝. ■

VI. 결론

지금까지 코사인 제 2법칙에 대한 여러 가지 증명방법을 살펴보았다. 이러한 다양한 증명 방법을 통해 수학내용에 대한 증명이라는 것이 한 가지 방법으로만 증명되어지는 것이 아니라 여러 가지 방법으로 증명으로 증명되어질 수 있다는 사실을 새삼 확인할 수 있었다. 본 연구를 통해 특히 다음 몇 가지 측면이 중요하다고 생각된다.

첫째, 수학사에서 볼 때 삼각비가 삼각형과 원과 밀접한 관계가 있음에 착안하여 삼각형을 이용한 증명방법과 원을 이용한 증명 방법을 중심으로 분석하여 보았다. 따라서, 다른 문제의 증명에 있어서도 동일한 관점을 적용하여 증명에 대한 다양한 접근 방법을 찾을 수 있을 것이다.

둘째, 우리가 알고 있는 코사인 제 2법칙은 단순히 삼각형에서 성립하는 코사인의 성질로 알고 있었다. 하지만, 코사인 제 2법칙은 피타고라스 정리의 확장으로 학습하는 것이 더 자연스럽다는 것이

다. 유클리드 원론의 제 I권의 마지막 명제인 47번 명제에서 피타고라스 정리를 제시하고 있고, 제 II권 명제 12, 13번에 코사인 제 2법칙을 제시하고 있다. 따라서, 명제 12, 13번은 피타고라스 정리를 일반화시켰다고 볼 수 있을 것이다.

셋째, 코사인 제 2법칙을 증명하는 데 있어서, 피타고라스 정리의 증명과 똑같은 절차를 밟아 증명하였다. 이것은 유사한 명제(주어진 명제를 일반화하거나 확장시킨 명제)의 증명에 있어서 같은 유형의 증명을 적용할 수 있다는 것을 보여 주고 있다. 따라서, 이러한 유사한 명제를 찾아 본 연구에서와 같은 방식으로 다양한 증명방법을 찾을 수 있을 것이다.

마지막으로, 현행 고등학교 1학년에서 제시하고 있는 코사인 제 2법칙의 도입을 새롭게 전개하여 보았다. 중학교의 교육과정과 고등학교의 교육과정사이의 연결성을 강조하여 중학교에서 학습한 내용을 기반으로 하여 코사인 제 2법칙을 교과서에서 어떻게 전개할 것인지에 대해 새로운 대안을 제시할 수 있었다.

참 고 문 헌

고성은 · 박복현 · 김준회 · 최수일 · 강운중 · 소순영 (2002). 중학교 수학 9-나, 서울 : (주) 블랙박스.

양영오 · 조윤동 역, B. 보이어 (2000). 수학의 역사 상, 하, 서울: 경문사

이종우 (2002). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울 : 경문사.

한인기 (2003). 교사를 위한 수학사, 서울 : 교우사.

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A<수학교육> **42(1)**, 서울 : 한국수학교육학회.

B. Pitiscus on internet site http://www.pballew.net/lawofcos.htm.

Howard Eves (1962). *An Introduction to the History of Mathematics*, New York : Harcourt Brace.

Roger B. Nelsen (1993). *Proofs without words*, Washington : MAA Service Center.

S. Brodie on internet site http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/cosine.shtml

Thomas L. Heath.(Trans.) (1952). *The Thriteen Books Of Euclid's Elements*, London : Cambridge University Press.

William Dunham (1990). *Journey Through Genius : The Great Theorems of Mathematics*, New York : Penguin Books USA Inc.