

수학교사의 지식에 관한 연구

신 현 용 (한국교원대학교)

이 종 욱 (주원초등학교)

본 연구에서는 먼저, 수학교사에게 필요한 지식으로 교과, 학생, 교수학적 내용 지식이 필요함을 문헌을 통해 정리하였다. 교사의 지식과 수업 실체에 관한 세 편의 논문을 분석한 결과 교사의 수학에 대한 충분한 이해가 학생의 학습과 효과적인 교수에 절대적인 영향을 미친다고 주장할 수 없음을 알 수 있었다. 그러나 수학에 대한 바른 이해는 학생의 질문에 적절한 반응을 할 수 있도록 하며, 수업을 계획하고 교실에서 이루어지는 담화를 수학적으로 원활하게 조절할 수 있도록 도움을 줄 수도 있었다. 따라서 수학을 잘 아는 것이 효과적인 교수·학습을 보장하지는 못하지만, 교사가 잘 알지 못하는 것을 가르칠 수는 없다는 결론을 얻었다.

I. 서론

교사의 지식은 단일한 요소가 아니라 통합적이며 기능적으로 이루어진 조직체이기 때문에, 학자에 따라 조금씩 달리 정의하지만 일반적으로 교사 지식의 구성 성분으로 수학에 대한 지식, 학습자에 대한 지식, 가르치는 방법에 대한 지식을 인정하고 있다.

복합적으로 구성된 교사의 지식은 교실 수업에서 실제적인 영향력을 가진다. 교사가 가르치는 방법과 학생이 학습하는 방법, 수업의 내용과 과정, 학생의 학업성취에 영향을 미치면서 교실 수업을 개선하기 위한 중요한 특징 중의 하나가 된다. 이 지식은 수업을 계획하고, 교실을 조직하고, 과제를 선택하고, 학생을 평가하는데 중요한 역할을 하며 학생의 지식이 계속해서 발달하는 것과 같이 교사의 지식도 교실 환경이라는 상황 속에서 발달을 진행한다. 다시 말하자면, 교직 경험을 가지면서 수학 교과를 가르치고 학생과의 상호작용을 통하여 반성의 과정을 겪으면서 지식은 변하게 된다. 따라서 교사의 지식은 단절적인 것으로 볼 것이 아니라 통합적인 관점에서 살펴보아야 한다.

NCTM(1991)은 수학교사의 전문성 개발을 위한 여섯 가지 기준을 제안했다. 여기서 세 가지는 수학을 가르치는 교사의 지식, 즉 수학과 학교수학에 대한 지식, 수학을 배우는 학습자에 대한 지식, 수학을 가르치는 방법에 대한 지식과 관계된다.

현재의 개혁 운동은 새로운 형태의 수학 교수를 요구한다(NCTM, 1989, 1991, 2000). 학생들이 수학을 단지 연습과 훈련에 의해 기능이나 절차를 숙달하는 것이 아니라 이해하면서 배우는 경험을 가져야 한다(Goldsmith & Schifter, 1997). 수학을 가르치는 전통적인 접근은 이해를 강조하는 방법으로 바뀌어야 하며 이런 변화의 주체는 교사가 되어야 한다. 이것은 교사가 수학 내용과 교육과정, 그리고 수학을 가르치는 새로운 방법을 잘 알아야 가능한 것이다.

이처럼 수학교육을 개선하려는 개혁 운동의 밑바탕에는 교사의 지식을 향상하는 것이 전제 조건이 되며 수학 교과에서는 수학이라는 교육내용이 간과할 수 없는 지식의 한 영역을 차지한다고 할 수 있다. 그러나 지금까지의 연구들을 살펴보면 특별히 수학교사에게 필요한 지식이 어떤 것인가에 대해 구체적으로 정리한 문헌이 부족하였으며, 교과 지식과 관련되는 문헌에서는 주로 예비교사들을 대상으로 몇 가지 주제와 관련한 지식 상태를 분석한 연구들이 대부분이었다(Ball, 1990a, 1990b; Post, Harel, Behr, & Lesh, 1991; Simon, 1993; Zazkis & Campbell, 1994; Khoury & Zazkis, 1994). 다시 말하자면, 현직 교사를 연구 대상으로 설정하여 교사가 가진 수학적 지식과 수업 실제와의 관계를 제시하는 연구가 부족함을 알 수 있다.

교사의 질을 높이기 위해서는 교사양성 대학의 교육 프로그램과 함께 현직교사의 전문성 개발 프로그램을 계속적으로 변화시킬 필요가 있으며 이 변화를 가져오기 위한 선행 작업으로 수학교사의 전문성 개발에 필요한 지식에는 어떤 것이 있으며 교사의 지식이 수업 실제에 어떻게 관련되는가를 알아보는 기초연구가 이루어져야 할 것이다.

따라서 본 연구에서는 다음과 같은 두 가지 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 수학교사에게는 어떠한 지식이 필요한가?

둘째, 수학교사의 지식은 수업 실제에 어떻게 영향을 미치는가?

위의 연구 문제에 대한 답을 얻기 위해 본 연구는 방법상 문헌 연구로 이루어지며 교사교육과 관련한 앞으로의 연구를 위해 몇 가지 시사점을 구하고자 한다.

II. 교사 지식의 유형

Shulman(1986)은 교과지식, 교수학적 내용 지식, 교육과정 지식으로 교사 지식의 세 가지 요소를 제안했다. 그에 따르면 교과지식은 어떤 영역의 사실이나 개념에 대한 지식뿐만 아니라 교과의 구조에 대한 이해가 필요하며, 교수학적 내용지식은 수업을 위한 교과지식의 또 다른 차원으로 교과를 적절하게 표현하고 조직하는 방법을 포함하면서 학생의 학습에서 어떤 영역에 대한 오개념에 대한 이해를 필요로 한다. 대개 이 지식은 교수전략과 관계된다. 한편, 교육과정 지식은 특별한 교육과정 내용과 관련되는 지식으로 어떤 내용의 교육과정 위계뿐 아니라 같은 학년 수준에서의 내용 사이의 연결에 대한 지식을 포함한다.

NCTM(1991)은 세 가지 유형의 수학교사의 지식을 적고 있다. 수학과 학교수학, 수학의 학습자로서의 학생, 수학적으로 가르치는 방법에 대한 지식이 그것이다. Fennema & Franke(1992)는 수학에 대한 지식, 가르치는 지식, 학습자의 인지에 대한 지식으로 수학 교사의 지식을 비슷한 방법으로 분류했다. 이것은 수학을 가르치는 세 가지 측면, 즉 수학, 교수법, 학습자에 대한 지식으로 교사는 그들이 가르치는 수학, 과목을 가르치는 방법, 학생들이 수학을 학습하는 방법을 알아야 한다는 것이다.

이 장에서는 교사 지식의 여러 측면 가운데 세 가지 지식, 즉 교과 지식, 학생에 대한 지식, 교수학적 내용 지식으로 구분하여 살펴볼 것이다.

1. 교과 지식

교사의 지식에 대한 논점을 다룰 때, 가장 먼저 떠오르는 것은 수학이다. 수학적 지식의 중요성을 인정하는 가정 중의 하나는 중등학교 교사들이 대학에서 이수해야 하는 학점수이다. 교사가 되기 위해서는 대부분의 학점을 수학과 관련되는 과목으로 인정을 받아야 한다. 이런 가정의 밑바탕에는 수학적 지식을 획득하는 것이 수학 교사의 중요한 요소가 된다는 생각이 있다.

수학적 지식의 중요성에 대해 몇몇 학자들은 다음과 같이 말했다. “수학에 대한 지식은 분명 다른 사람이 수학을 공부하도록 돕는데 가장 중요하다”(Ball, 1988). “기본적인 개념에 대한 확실한 이해는 초등교사가 가져야 하는 중요한 틀이다. …… (그리고) 많은 교사들은 수학을 충분히 알고 있지 않다”(Post, Harel, Behr, & Lesh, 1991). 또한 중등학교와 중학교 교사들의 수학 지식이 풍부하지 않다는 연구도 있다. 예비초등교사의 내용 지식에 대한 연구를 고찰한 후, Brown, Cooney, & Jones(1990)은 NCTM과 같은 전문적인 기관에서 제안한 초등학교 수학을 가르칠 정도로 예비초등교사들은 수학을 충분히 이해하고 있지 못한 것으로 결론지었다.

수학적 지식이 교사 지식에서 중요하다는 생각과 많은 교사들이 적절한 수학적 지식을 가지고 있지 못하다는 연구에도 불구하고, 교사의 수학에 대한 지식과 학생들의 학습 사이의 관계에 대해서는 그렇게 많은 연구가 이루어지지 않았다. 이러한 연구들 가운데 몇몇을 살펴보면 다음과 같다. National Longitudinal Study of Mathematical Abilities(NLSMA)는 교사들이 이수한 수학 학점수와 학생 학습의 관계를 알아보았으나 어떤 중요한 관계도 찾을 수 없었다(School Mathematics Study Group, 1972). 5년 후, Eisenberg(1977)은 이 연구를 다시 수행하여 같은 결과를 보고했다. 이들 연구에서는 교사가 수학에 대해 무엇을 알고 있는가를 측정하려는 시도나 이수 과정에서 이루어지는 수학이 어떤 것인가를 확인하려는 시도가 이루어지지 않았다.

이후의 몇몇 연구에서는 국가 교사 시험에서의 교사 성적과 학생 학습사이의 관계를 연구하였으며, 다른 연구는 교사 지식의 획득과 학생 학습 사이의 관계를 조사하였지만 중요한 점을 시사하지 못했다(General Accounting Office, 1984). 이런 연구를 통해 교사의 지식이 충분하지 않다는 사실은 확인할 수 있었지만, 이런 지식의 결핍이 학습에 심각한 영향을 준다는 증거를 제시하지 못했다. 또한 교사 지식의 측정 방법에서 교사 지식의 복잡성에 비추어 보았을 때 통합적인 측정이 시도되지 못했으며 교사가 알고 있는 형식적인 지식과 가르치는 것 사이의 관계에 대해 의미 있는 접근이 시도되지 않았다(Fennema & Franke, 1992).

최근의 연구들은 연구방법론의 변화로 새로운 결과를 보여주고 있다. 교사 지식과 학생 학습의 상관관계를 측정하는 방법에서 수업 실재를 관찰하기 시작했다. 교사가 교실에서 행하는 수업이 교사의 내용지식과 학생의 학습 사이의 매개로서 연구되었으며 이에 대한 내용은 다음 장에서 구체적으로 살펴볼 것이다.

2. 학생에 대한 지식

교사는 학생들이 지식을 어떻게 습득하는지를 알아야 할 필요가 있다. 이런 지식은 교육심리학의 분야로서, 인지과학의 관점에서 학습에 대한 연구는 학습자의 사고에 대한 지식과 그 지식이 교사의 의사결정에 어떻게 적용되는가에 대한 논의를 새롭게 했다.

Carpenter et al.(1989)의 연구에 의하면, 아동 사고에 대한 교사의 지식은 교실 수업에 중요한 영향을 미친다. 이 연구는 Carpenter & Moser(1983)의 연구를 기초로 하여 아동에 의해 해결될 수 있는 11가지의 덧셈과 뺄셈 문장제를 규명하였으며, 이 연구를 통해 아동의 인지에 대한 교사 지식의 해석을 위한 바탕을 마련할 수 있었다.

CGI(Cognitively Guided Instruction) 연구는 아동에게 문제를 해결하도록 하고 아동이 문제를 해결하는 방법을 교사들이 예상하도록 하였다. 실험집단(CGI교사)교사와 통제집단 교사가 그들의 학생에 대해 가지는 지식을 측정 한 결과, 실험집단의 교사들은 통제집단의 교사들보다 수업 시간에 혼란 활동을 적게 사용했으며 문제해결 활동에 더 많은 시간을 사용하였다. 또한 CGI교사들은 아동의 설명을 듣는데 시간을 더 할애하였으며 아동의 문제해결 전략을 받아들였다. 실험 교실에서의 아동들은 통제 교실에서 보다 계산 기능과 문제해결에서 좋은 결과를 보였다. CGI연구는 학습자의 사고에 대해 교사가 적절히 작 조직된 지식을 가질 때 학생을 잘 지도할 수 있다는 증거를 제공한다(Fennema & Franke, 1992).

3. 교수학적 내용 지식

수학을 가르치기 위해 교사들은 교수학적 내용 지식을 가져야 한다. 교수학적 내용 지식은 교사가 학생의 사고와 학습에 영향을 주는 그들의 교수실제를 반성할 수 있도록 한다(Barnett, 1998). Ball(1988a)은 교사들은 그들이 가르치는 수학에 대해 교육적으로 생각할 필요가 있다고 지적했다. 즉, 교사는 개념과 관련되는 절차뿐 아니라 개념을 표현하고 모델링하는 방법, 학습자료를 사용하는 방법을 알아야 한다. 교사는 또한 학생들이 자신의 방법으로 수학적 지식을 구성하도록 격려하는 방법과 학생들의 수학에 대한 이해를 평가하는 방법을 알아야 한다. Carpenter et al.(1988)은 다음과 같이 말했다.

교수학적 내용지식은 학생들이 한 주제의 학습에 가져오는 개념적이고 절차적인 지식에 대한 이해, 그들이 발달시킬지도 모르는 주제에 대한 오개념, 그리고 그들이 이해를 전혀 하지 못하는 상태에서 완전히 이해하는 상태로 변화면서 지나게 되는 이해의 단계에 대한 지식을 포함한다. 그것은 또한 학생들의 이해를 평가하고 그들의 잘못된 오개념을 진단하는 지식, 학생들이 현재 학습하는 것을 이미 소유한 지식과 연결할 수 있기 위해 사용되는 교수 전략에 대한 지식, 그리고 그들이 발달시킬지도 모르는 오개념을 제거하는 교수전략에 대한 지식을 포함하다(p.386).

NCTM(1991)은 또한 수학을 가르치는 교수법적 지식을 상세하게 설명했다. 이것들은 다음의 것들에 대한 지식과 사용하고 평가하는 능력을 포함한다. a)교수 자료와 자원, b)수학 개념과 절차를 표

현하는 방법, c)교수전략과 교실 조직 모델, d)담화를 증진시키고 수학적 공동체감을 형성하는 방법, 그리고 e)수학에 대한 학생들의 이해를 평가하는 수단이 그것이다. 이 지식은 과제를 선택하고 특별한 학습 목표를 위한 그들의 교수를 조직하는데 더욱 필요한 지식이다.

1973년에서 1983년 동안 교사 행동과 학생 성취사이의 관계에 대한 연구를 고찰한 후, Brophy & Good(1986)은 결과물을 통합하여 교사 행동은 학생 성취에 궁극적으로 영향을 미친다고 종합했다. 교사의 행동에는 수학을 기호나 그림으로 표현하는 것, 학생에게 질문하는 것, 학생의 반응에 대한 반응, 그리고 교실에서 부과하는 과제나 가정에서 이루어지는 과제를 제시하는 것 등이 포함된다. 이런 행동은 부분적으로 교사의 교수학적 내용 지식으로부터 영향을 받을 수 있다.

위의 논의로부터, 교수학적 내용 지식은 교사가 수업을 계획하고, 가르치고, 평가하는데 사용하는 복잡한 과정임을 알 수 있다. 게다가, 이 지식은 수학적 지식과 같은 교사 지식의 다른 측면과 관련 되어 있다.

요약하면, 교수학적 내용 지식은 교사가 학생을 가르친다는 입장에서 학습의 주체자인 학습자에 대한 이해가 중심이 되어야 한다는 것이다. 따라서 수학교사는 수학에 대한 학생의 개념을 확인하는 경험, 어떤 영역에서 학생들이 해결할 때 사용하는 전략, 그리고 수학에 대한 학생의 태도와 신념을 확인하는 경험을 가져야 한다. 수학교사들은 또한 수학 교수학습에 대한 현재의 이론과 연구 결과를 잘 알고 있어야 하고 그것을 교실에 적용하는 기회를 가져야 한다(NCTM, 1991).

III. 교사 지식과 교실 수업과의 관계

수학에 대한 교과 지식과 관련한 연구는 많이 있지만 이 지식과 교실 수업 사이의 관계에 대한 연구는 상대적으로 많이 부족한 실정이다. 여기서는 이 관계성에 면밀한 조사를 한 세 연구를 살펴 볼 것이다. 먼저 Leinhardt & Smith(1985)와 Lehrer & Franke(1992)의 두 연구는 분수 영역에서 경험 있는 교사와 초보 교사의 지식, 지식의 조직, 교실 수업과의 관계를 조사하였다. Thompson & Thompson(1994)의 연구는 한 교사의 수학에 대한 교과지식이 비의 개념에 대한 수업에서 사용하는 언어에 어떻게 반영되는가를 연구하였다.

Leinhardt & Smith(1985)는 경험 있는 초등수학교사의 수업 구조 지식과 교과 지식이 수업 행동과 어떻게 관련되는가에 대하여 연구하였다. 8명의 4학년 수학교사를 연구대상으로 하였으며, 이들 중 4명은 경험 있는 교사이고 4명은 초보 교사이다. 경험 있는 교사는 학생들의 수학 점수가 5년 동안 계속해서 특별하게 향상되었기 때문에 선정하게 되었으며 초보 교사는 교사 연수 프로그램의 마지막 학년으로서 지도교수에 의해 추천을 받은 교생들이었다.

처음 2년 동안 다양한 자료가 관찰, 면담, 카드 분류 과제를 통해 수집되었다. 연구의 처음 2년 간 3달에 걸쳐 교실 관찰이 이루어졌다. 모두 10시간 분량의 수업을 비디오 녹화하였으며 수업의 계획, 녹음된 수업 내용, 분수에 대한 지식과 관련된 사항에 대해 면담이 이루어졌다. 그리고 4학년 수학

교과서의 내용 중 계산문제를 다루는 단원에서 무작위로 선정한 40문제로 만든 카드 문제를 교사들과 교생들에게 제시하였다.

분석은 두 가지로 이루어졌다. 하나는 혼란스러워 하거나 잘못 이해하는 어떤 패턴뿐 아니라 바르게 이해하고 있는 어떤 일관된 패턴을 알아보기 위해 면담과 카드 분류를 통해 분석하였으며, 다른 하나는 2명은 높은 지식 수준을 가지고 1명은 중간 수준의 지식을 가진 것으로 보이는 세 교사의 수업을 녹화하여 수업을 분석하는 것이었다. 각 교사는 같은 교재를 사용하였으며, 같은 내용을 수업하였다.

카드 분류의 결과 높은 지식을 가진 교사와 초보 교사의 지식 사이에 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. 높은 지식을 가진 경험 있는 교사는 45개의 수학 문제를 10개의 범주로 분류하여 가르치기 어려운 순서로 문제를 정리하였으며, 초보 교사는 각각 또는 두 문제로 범주화하였고 난이도에 차이를 나타내지 않았으며 어떠한 내적 연결성도 지적하지 않았다. 하지만 경험 있는 교사는 더욱 세심한 지식 구조를 보였다.

분수와 관련된 4 문제에 대한 면담에서도 비슷한 결과가 나타났다. 첫 번째 문제는 참여자가 분수를 정의하는 것이었다. 교사들 중 7명이 전체에 대한 부분의 관계로 분수를 정의하였다. 나머지 교사는 분수를 0과 1 또는 0과 다른 자연수 사이의 한 점으로 정의하였다. 이 교사는 수직선을 일관되게 사용하였으며 분수를 측정의 과정으로 본 유일한 교사였다.

두 번째 문제는 참여자들이 동치분수를 정의하는 것이었다. 모든 교사들은 바르게 정의할 수 있었다. 그러나 $3/7$ 과 $243/567$ 이 동치분수인가를 물었을 때, 한 경험 있는 교사와 두 명의 초보교사는 동치가 아니라고 하였다. 지식 수준이 낮은 교사들은 81을 인수로 가지면서 그 분수는 동치가 아니라고 하거나 잘 모르겠다고 하였다. 반대로, 높은 수학적 지식을 가진 두 교사는 곧바로 동치라고 하였다.

세 번째 문제는 단위 개념을 알아보는 것이었다. 분수 $3/4$, $5/5$, $5/4$ 를 나타내는 그림을 그리도록 했을 때, 한 명을 제외한 모든 교사가 바르게 그렸다.

네 번째 문제는 비와 분수 두 개념에 관한 것이었다. 교사들에게 비와 분수 사이에 어떤 차이가 있는가를 물었을 때, 교사 모두는 분수는 비와 같거나 유사하다는 반응을 보이기도 하였으며 잘 모르겠다는 반응도 있었다. 다시 말하자면, 모든 교사는 비와 분수를 명확히 구분하지 못하였다.

카드 분류 과제와 면담을 통해 4명의 경험 있는 교사의 수학 교과 지식 사이에 차이가 있음을 알 수 있었다. 이들 교사 모두 학생의 성적이 높지만, 2명의 경험 있는 교사는 높은 수학 지식을, 1명은 적절한 지식을, 또 1명은 교실 수업에 충분하지 않은 지식을 가졌다. 4명의 초보 교사는 보통의 수준이거나 낮은 수준의 수학 지식을 가진 것으로 나타났다.

지식 수준이 낮은 한 명의 교사를 제외한 세 명의 경험 있는 교사의 수업을 분석한 결과 학생들을 가르치는 수업 실제에서는 많은 차이가 있는 것으로 나타났다. 첫째, 알고리즘적인 정보를 제시하는 수준에서의 차이뿐만 아니라 개념적인 정보를 제시하는 수준에서 상당한 차이가 있었다. 둘째, 교사들은 제시하는 방법에서 근본적인 차이가 있었다. 한 교사는 공약수를 사용하여 분수를 줄이는 방법을 사용한 반면, 다른 두 명의 교사는 동치분수를 찾는 방법과 반대되는 방법, 즉 $1/2$ 과 같은 분수

를 $2/4$, $3/6$, $4/8$...으로 찾는 방법의 역순으로 분수를 줄여가는 방법을 사용하였다. 셋째, 수직선 모델, 넓이 모델, 수 모델과 같은 분수를 나타내는 각기 다른 방법을 사용한다는 것이다.

이 연구의 결과 경험 있는 교사와 초보 교사의 분수에 관한 교과 지식에 실제적인 차이가 있는 것으로 나타났다. 일반적으로, 비록 한 명의 교사가 부족한 지식을 가진 것으로 나타났지만 경험 있는 교사는 더욱 깊은 이해를 하고 있었다. 수업을 통해 분석해 볼 때, 세 명의 경험 있는 교사는 각각 다른 지식 수준에서 다양한 접근 방식으로 분수에서 강조하는 바가 각각 다르다는 것을 알 수 있었다. 이들 세 명의 교사 모두 학생들의 성적이 모두 높았지만, 그들 각자는 가르치는 능력에서 큰 차이가 있었다.

Leinhardt & Smith(1985)는 교사가 교과 지식의 수준이 높아지고 그들의 지식을 수업에 유연하게 연결하게 될 때 학생들의 수학적 능력 또한 향상된다고 하였으며, 분수에 대한 개념 형성을 위해 교과서에서 더욱 자세한 설명이 있어야 할 것으로 주장했다.

Lehrer & Franke(1992)는 분수에 대한 두 교사의 교과 지식과 교실 수업의 상호작용을 알아보기 위하여 개인구성심리학¹⁾을 기본적인 연구 방법으로 사용하였다. 이 연구는 수업 실제에서 분명하게 차이가 있는 것으로 나타난 두 교사를 연구대상으로 하였다. 2학년 교사인 Ms. Hunter는 17년의 교육경력을 가지고 있으며 수학 수업 대회에서 상을 받은 경험이 있다. 그녀는 문제해결에 중점을 두고서 수업을 하였으며, 학생들에게 문제를 내고 학생들의 해결 방법에 귀를 기울이는 아주 적극적인 자세를 보였다. 이와는 대조적으로, 5년의 교육경력을 가진 5학년 교사 Ms. Gardner는 교과서의 내용에 따라 문제를 제시하고 보기를 들었다.

면담과 관찰을 통하여 자료를 수집하였으며, 면담을 하는 동안 교사들에게 몇 가지 활동을 제시하였다. 먼저, 3개의 분수 문제를 제시하고 내용적으로 나머지 한 문제와 다른 두 문제가 어떤 것인가를, 그리고 그 문제를 학생들이 어떻게 생각하겠는가를 생각해보도록 하였다. 다음으로, 분수 문제 12문제가 포함된 이와 같은 형태의 10 문제를 제시하였다. 문제는 분수의 정의, 표현, 순서, 동치, 연산과 관련하여 교사의 지식을 알아보는 데 초점을 두었다. 문제는 서로 어떻게 같으며 또 어떻게 다른가?, 어떤 두 문제가 유사한가? 그 이유는?, 학생들이 문제를 해결하는 방법과 관련해서 이 문제는 어떻게 다른가? 와 같은 질문을 교사들에게 제기하여 교사의 내용지식을 검사하였다.

문제 제시 후, 교사의 반응에 따라 연구자가 작성한 구성 목록을 교사들에게 보여주었으며 교사들에게 각 구성에 대하여 분수 문제 12문제 각각의 관련 정도에 따라 10점에서 1점의 점수를 주도록 하였다. 구성을 도출한 다음, 두 교사가 분수 관련 수업을 하고 있는 어느 날 교실 수업 관찰이 이루어졌다.

1) 개인구성심리학은 어떤 의미에 대한 각 개인의 해석을 강조하는 구성주의자의 관점에 기초하고 있다. 의미를 해석한다는 것은 각 개인이 한 사건에 대해 예상하거나 조절할 수 있도록 하는 구성을 만든다는 것이다. 예를 들어, 분수와 관련된 서로 다른 3문제를 각각 2문제는 이산량으로 1문제는 연속량과 관련시켜 해석한다거나 1문제는 수직선 모델로 2문제는 직사각형 모델로 표현해야하는 것으로 해석한다면 이때 이산량과 연속량 또는 수직선 모델과 직사각형 모델은 각 개인이 해석한 구성이 되는 것이다.

각 교사가 구성한 목록은 분수에 대한 내용지식, 일반적인 교수 지식, 분수 교수와 관련된 교수학적 지식에 따라 분류하였다. 연구 결과 분수 문제에 대한 두 교사의 반응 사이에 서로 다른 다양한 구성이 있음을 알 수 있었다. Ms. Hunter는 모두 33개의 구성을 나타낸 반면 Ms. Gardner는 단지 18개의 구성을 보여주었다. Ms. Hunter의 구성은 일반적으로 분수를 가르치는 것과 관련되는 교수법에 집중되어 있었지만 어느 것도 단순한 알고리즘이나 절차를 가르치는 것과 관련된 것은 없었다. Ms. Gardner는 분수 문제를 해결하기 위한 분수 알고리즘의 기초가 되는 개념과 분수 문제를 해결하는 절차에 대한 구성을 주로 나타내었다.

공분모 분수의 뺄셈을 가르치는 Ms. Gardner의 수업을 분석해 보았을 때, Ms. Gardner의 행동은 도출된 구성과 일치하는 것으로 나타났다. 그녀는 구성에서 나타난 것과 같이 전체의 부분으로서의 분수에 중점을 두었다. 부분이 모여 전체가 되며 이 전체는 분모가 된다는 사실에 주목하면서 이것을 설명하기 위해 그림을 그렸다. 전체 수업을 하던, 소집단 활동을 하던, 개별 수업을 하던 어려움을 가진 학생들에 대한 그녀의 반응은 부분과 전체의 관계로서 자신의 입장을 설명하는 것이었으며 학생이 어떻게 이해하는가에 바탕을 두고 있지 않았다.

Ms. Hunter의 수업은 대체적으로 학생 중심적이었다. Ms. Hunter는 학습자료를 사용하였으며, 친숙한 분수로서 수업을 시작하면서 그 시간 가르칠 내용과 관련이 많은 다른 내용을 연결지으면서 그림이나 기호로서 분수를 표현하였다. 또한 상호작용적인 대화를 이끌었으며 가분수와 진분수의 이해에 초점을 두었다. 이런 활동은 모두가 Ms. Hunter의 지식 구조의 일부분으로 도출된 구성과 일치하였다.

사례연구에 대한 이런 방법은 연구자가 교사의 구성을 도출하였으며 이를 교실 실제와 관련하여 분석하는 것이었다. 교사가 도출한 구성들 사이의 관계는 교실 수업에 그대로 반영되고 있음을 알 수 있었다.

Thompson & Thompson(1994)는 수학에 대한 한 교사의 지식이 비 개념을 가르치는 언어에 어떻게 반영되는가를 연구하였다. 연구 대상은 Bill이라고 부르는 한 교사로 6학년에서 8학년 수학을 가르치고 있었다. 연구 시기에, Bill은 중학교에서 2년 동안 근무하고 있었으며 그 학교에서 가르치기 전에 고등학교 물리, 화학, 자연과학을 가르쳤다. 교사가 되기 전에 Bill은 사업을 했으며 그가 1986년에 퇴임하면서 교사에 관심을 가졌다.

연구 목적은 Bill이 교사로서 수학을 경험하는 방법과 Ann이라고 부르는 6학년 학생에게 비 개념을 가르치기 위해 그런 방법이 어떻게 언어에 반영되는가를 분석하는 것이었다. 교수 경험은 속력과 비의 개념에 대한 학생의 구성을 알아보고 또한 학생이 가지는 속력과 비 개념 사이의 관계를 알아보는 것에 중점을 두었다. 1대 1 수업에서 Bill은 비를 개념적인 언어로 표현하는 데 어려움을 가지고 있는 것으로 나타났다. 그의 설명은 본질적으로 알고리즘에 의존하였으며 Ann이 개념적 이해를 하도록 도울 수 없었다. 결국, Bill이 가지고 있는 문제는 Ann이 이해할 수 있는 상황을 표현하는 적절한 언어를 구사할 수 없다는 것이었다.

Thompson & Thompson은 비록 Bill 자신은 비에 대한 개념이 명확하게 형성되어 있지만 한 학생을 가르치는 상황에서는 비를 설명하는 언어가 수와 연산과 관련되는 언어로만 한정되어 Ann이 비에 대한 개념을 이해하도록 돕기에는 부족한 면이 있었다고 결론지었다. 또한 연구자는 다른 연구결과와 같이 이 연구도 교사가 알고 있는 것과 학생들이 학습하는 것 사이의 분명한 관련성을 알아내는 데는 실패했다고 지적했다. 이 연구를 통해 교사가 한 개념에 대해 개념적 이해를 하고 있다는 것은 어떤 의미인지, 이해를 하고 있다는 것이 어떻게 대화에서 나타나는지에 대한 많은 연구가 있어야 한다고 제안했다.

IV. 결 론

교사의 지식에 관한 연구를 수행한다는 것은 사실 다양한 면에서 이루어져야 한다. 신념과 지식으로서 간에 영향을 줄 수 있는 부분이 있고 지식은 교실이라는 특수한 상황에서 전개되기 때문에 지식은 어떤 맥락에서 이해되어야 할 부분도 있다. 그러나 본 연구에서는 지식과 관련한 다른 많은 부분은 배제하고 단지 수학교사가 학생들에게 수학을 가르치는 것과 관련된 지식에 한정하여 이러한 지식의 유형과 이 지식이 수업 실제와 어떻게 관련되는가를 분석해 보았다.

연구 결과 수학 교사에게는 무엇보다도 수학에 대한 지식이 필요함을 알 수 있었다. 수학을 안다는 것이 과연 무엇을 의미하는지 그리고 어떤 수학 내용을 알아야 하는지에 대해서는 아직도 서로 다른 입장이 있지만 수학교사는 대학에서 학문으로서 수학을 배웠지만 학교에서 가르치는 학교 수학에 대한 깊이 있는 이해가 필요하다는 것이다. 수학에 대한 명확한 이해가 가르치는 방법을 보장할 수는 없지만 수학교사는 자신이 알고 있는 수학을 학생이 이해할 수 있도록 표현하는 방법을 알아야 할 것이며 이것은 학생이 가지고 있는 수학에 대한 이해 정도에 따라 달리 표현되어야 하기 때문에 학생의 사고에 대한 지식이 요구된다.

수학교사에게 필요한 지식을 수학, 표현, 학생에 대한 이해로 압축해서 나타낼 만큼 이 세 가지 지식이 교사 지식의 최소한의 필요조건이라고 한다면 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식은 앞의 세 지식을 포함하는 보다 포괄적인 지식으로 정의할 수 있다. 비록 교사의 지식을 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식으로 구분하고 있지만 이 지식들은 서로 중복되면서 상호간에 영향을 주고 있음을 알 수 있었다.

수학교사의 지식과 수업 실제와의 관계에 대한 세 연구를 분석한 결과 수학에 대한 확실한 지식은 학생들의 학습에 필요 조건도 효과적인 교수를 위한 충분조건도 아니라는 결론을 얻을 수 있었다. 그러나 수학에 대해 확고한 지식을 가지고 있는 교사들은 학생들의 질문에 적절하게 반응할 수 있었으며, 다양한 수학적 표현을 포함하는 적절한 학습활동을 계획할 수 있었다. 또한 교실에서 일어나는 수학적 담화를 수학적 활동이 일어나도록 적절하게 조절할 수 있었다(Lehrer & Franke, 1992; Leinhardt & Smith, 1985). 따라서 수학에 대한 확고한 지식이 효과적인 교수 학습을 확신한다고는

주장할 수는 없으나 분명한 것은 수학을 알지 못하면서 수학을 가르칠 수는 없다는 것이다.

교사의 지식과 수업 실재와 관련된 연구를 고찰하면서 앞으로의 연구를 위해 몇 가지 논의할 사항이 있었다. 먼저, 수업 실재와 관련되는 연구의 분석에는 본질적인 한계가 있었다. 비록 이 세 연구가 초등학교와 중학교 수학교사의 교사 지식과 관련된 것이지만 연구에서 다루고 있는 내용이 분수와 비 개념에 한정되었다는 것이다. 지식이라는 것이 이해를 통해 형성되는 것으로 본다면 이해라는 것은 서로 다른 내용에 대한 많은 연결이 이루어질 때 그 깊이가 더해간다고 할 수 있다(Hiebert & Carpenter, 1992). 이런 의미에서 본다면 교사의 지식을 어느 한 영역에 편중하여 평가한다는 것은 교사 지식에 대한 충분한 이해를 제공하지 못하게 된다.

다음으로, 대부분의 연구에서 교사들은 연구자에 의해 제시되는 문제에 반응하는 형식을 따랐는데 연구자들이 제시하는 문제가 과연 교사의 다양한 지식 측면을 알아보는데 적절하였는가는 사실을 재고해 보아야 할 것이다. 각각의 연구들은 특정한 영역에 한정된 주제를 평가하면서 연구자가 선정한 몇 가지 기준에 따라 설정된 문제에 특별한 방법으로 표현하였다. 이것은 앞서 교사의 지식 유형에서 살펴본 다양한 수학교사의 지식을 알아보는 데는 충분하지 않은 것으로 본다. 교사의 지식을 평가하기 위해서는 개방적인 질문 형식을 갖추면서 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식을 보다 심층적으로 분석할 수 있는 문제를 구성하여야 할 것이다.

마지막으로, 비록 몇몇 연구자들이 학생 학습에 대한 교사 지식의 영향을 연구했지만 교사 지식과 학습과의 관계는 자연적인 교실 상황에서 연구되어야 할 것이다. 한 명의 학생과 한 명의 교사 사이에 일어나는 교수·학습의 상황과 다인수 학습에서 일어나는 상황은 여러 가지 면에서 교사 지식의 영향이 달리 나타날 수 있기 때문에 교사 지식과 학생의 학습 사이의 관계에 대한 연구는 현직 교사를 대상으로 한 실제 교실 상황에서 이루어져야 할 것으로 본다.

참 고 문 헌

- Ball, D. L. (1988). *Unlearning to teach mathematics*. East Lansing: Michigan State University, National Center for Research on Teacher Education
- Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), pp.132-144.
- Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90, pp.449-467.
- Barnett, C. S. (1998). Mathematics case methods project. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), pp.349-356.
- Brown, S. I., Cooney, T. J., & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp.639-656). NY: Macmillan.

- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, pp.385-401.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loeff, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26(4), pp.499-532.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7-14). NY: Academic Press.
- Eisenberg, T. A. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, pp.216-222.
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.147-164). NY: Macmillan.
- Goldsmith, L., & Schifter, D. (1997). Understanding teachers in transition: Characteristics of a model for developing teachers. In E. Fennema & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp.19-54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fraction and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp.191-204.
- Lehrer, R., & Franke, M. L.(1992). Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), pp.223-241.
- Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*. 77(3), pp.247-271.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Orton, R. E. (1988). *Using representations to conceptualize teachers' knowledge*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

- Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp.177-198). Albany, NY: State University of New York Press.
- School Mathematics Study Group. (1972). Correlates of mathematics achievement: Teacher background and opinion variables. In J. W. Wilson & E. A. Begle (Eds.), *NLSMA Report* (No, 23, Part A). Palo Alto, CA: Author.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp.4-14.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), pp.233-254.
- Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, pp.279-303.
- Zazkis, R. & Campbell, S. (1994). *Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding*. Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Association, New Orleans, LA.