韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 289-296.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 289-296.

대학수학에서 함수의 합성과 합성함수의 극한에 대한 이해

김 병 무 (충주대학교)

수업시간을 이용하지 않고 인터넷을 이용하여 조사와 학생 스스로 학습할 기회와 자료를 제공하여 개념을 이해할 모델을 만들어 본다. 함수의 합성과 극한에 대한 이해도를 1차로 조사한 결과는 정답율이 7.5%에 불과하여 같은 설문지에 대해 각자 공부하고 대답하도록 2차 조사를 하고, 함수의 합성과 합성함수의 극한에 대해 개념의 이해를 도우려고 그래프를 이용한 자료를 수집하여 확실하고 쉽게 이해할 기회를 제공하며 새로운 교수-학습 방법을 개발한다.

1. 합성함수의 이해 수준

고등학교, 대학 수학(김병무, 2003)에서 배운 함수의 합성과 극한에 대한 정의와 개념, 성질과 합성함수의 극한에 대한 이해 정도를 알아보기 위해 2003학년도 충주대학교 1학년 주간(60명)과 야간(119명)의 학생에게 2학기 중간고사에서 <부록>의 함수의 합성과 함수의 극한에 대한 이해도 조사를 한 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> 문항별 정답자 수(명(%))

	1	2	3	4	5	6
주간(60명)	0(0)	15(25)	2(3)	3(5)	22(37)	10(17)
야간(119명)	0(0)	18(15)	1(0.8)	0(0)	8(6)	2(2)
계(179명)	0(0)	33(18)	3(2)	3(2)	30(17)	12(6)

1번 문항은 정답자가 한 명도 없었으며 합성함수의 정의와 기호 표현에 대해 확실히 모르고 있다는 것은 정의의 중요성을 이해 못하는 것과 같다고 볼 수 있다. 2번 문항은 함수의 합성이 가능한 경우에 대한 물음으로 전체적으로 정답자 수가 가장 많았다. 3번 문항은 합성함수의 성질에 관한 내용으로 정답자는 3명에 그치고 있다. 4번 문항은 구체적으로 합성함수를 구하는 경우로 모든 학생이 거이 구하지 못했다. 5번 문항은 함수의 극한에 대한 성질로 주간학생이 가장 많은 정답을 나타낸 경우이다. 그렇다고 이 성질을 정확히 증명할 수 있다고 볼 수는 없다. 6번 문항은 합성함수를 구체적으로 만들고 합성함수의 극한에 대한 정리의 이해를 알아보는 문항으로 정답자 수는 12명이었다. 각 문항에 대해 모두 정답일 경우 한 문항씩 맞춘 것으로 채점을 한 결과 성적이 매우 낮게 나왔다. 전체 문항에 대한 정답율은 7.5%로 합성함수의 이해에 상당히 문제가 있다고 볼 수 있다.

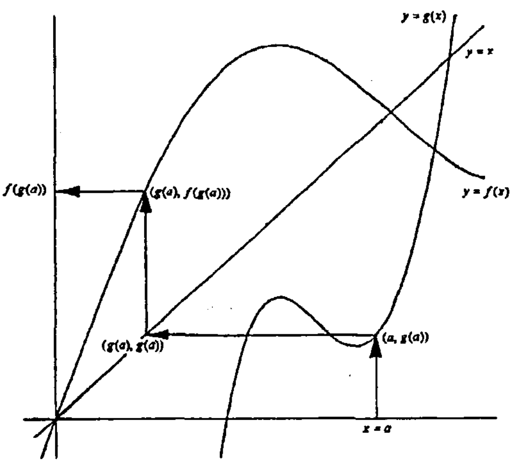
학생들이 함수의 합성에 대한 정의와 개념을 스스로 찾아보고 <부록>의 문항에 대해 다시 풀어 제출하도록 하고 이해 수준을 높이기 위해 학생들이 흥미와 관심을 갖고 접근하도록 학생들의 수준에 맞는 그래프를 이용한 기하학적인 방법(Cannon L. O and Elich, J., 1993/ Ivy Kidron and Nurit Zehavi, 2002/ Kok Ming Teo, 2002/ Riddle L. H., 1994))을 통해 수업시간을 이용하지 않고 인터넷을 이용한 학습자료를 제시한다.

학생들의 수준에 맞는 그래프를 이용한 기하학적 방법을 통해 대학수학에서 흥미도 갖게 하고 기본개념의 이해를 돕기 위한 자료의 제시(김병무, 1997)는 학습에 스스로 참여하게 하는 한 방법이 될 것이다. 함수의 합성을 기하학적으로 표현하여 그림으로 나타내 보이고 확인할 기회를 제시한다.

2. 함수의 합성에 대한 그래프 방법

함수의 합성은 두 주어진 함수에서 새로운 함수를 만드는 중요한 과정이다. 학생들은 합성함수의 기호와 개념을 이해하는데 어려움을 겪고 있다. 특히 학생들은 함수의 곱과 함수의 합성을 혼동하고, 함수의 합성에 대해 교환법칙이 성립한다고 알고 있다. 아마 이들 실수는 함수합성의 시각화에 대한 어려움도 한 이유가 되고 있다(Davis, 2000). 지금까지의 교과서적인 지도가 함수합성의 과정을 이해하는데 역할이 부족한 것 같다. 개념과 관련된 이미지의 설명이 주어질 때, 많은 학생들은 수학적 개념을 더 잘 기억한다는 것이 알려져 있다.

합성함수의 그래프 방법은 다음과 같이 시행한다. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$를 함수 $g(x)$와 $f(x)$의 합성함수를 나타낸다고 하자. $x = a$에서 $f(g(x))$의 값을 그래프 방법으로 구하기 위해 (1) 같은 좌표평면 위에 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$를 그린다. (2) x축 위의 점 x=a에서 $y = g(x)$의 그래프 위의 점 $(a, g(a))$ 에서 수직선을 그린다. (3) $(a, g(a))$에서 $y = x$ 위의 점 $(g(a), g(a))$까지 수평선을 그린다. (4) $(g(a), g(a))$에서 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(g(a), f(g(a)))$까지 수직선을 그린다. (5) $(g(a), f(g(a)))$에서 y축 위의 점 $(0, f(g(a)))$까지 수평선을 그린다. 이런 과정이 <그림 1>에서 설명된다. 주의할 것은 함수 $y = f(x)$가 직선 $y = x$에서 멀리 벗어나게 그리면 안 된다.



<그림 1>

함수 f와 g에서 만들어지는 네 함수 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$에 대해 실수의 성질에 의해 교환법칙이 다음 경우 성립함을 알고 있다.

$(f+g)(x)=(g+f)(x)$, $(fg)(x)=(gf)(x)$. 한편, 합성함수의 경우 일반으로 $f(g(x))\neq g(f(x))$이다.

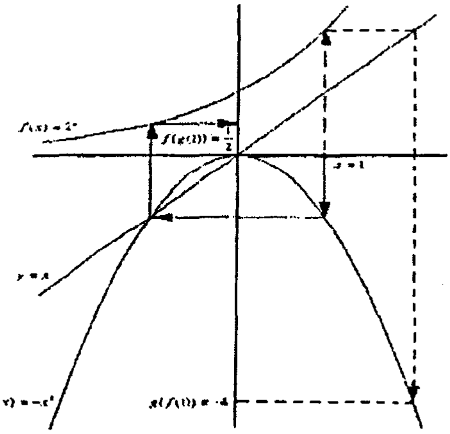
이것은 수 값을 대입하여 보일 수도 있다.

$f(x)=2^x$, $g(x)=-x^2$이면

$$f(g(1))=\frac{1}{2},\quad g(f(1))=-4\text{이다.}$$

따라서, $f(g(x))\neq g(f(x))$이다.

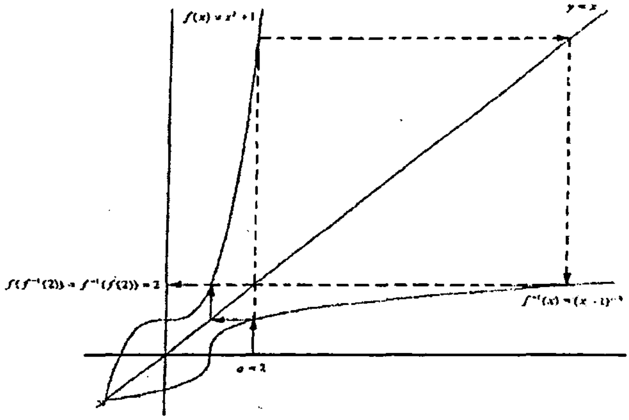
이 예를 <그림 2>에서 보여준다.



<그림 2>

함수합성에 대한 그래프 방법은 역함수에 대한 합성 $f(f^{-1}(x))=x=f^{-1}(f(x))$를 설명하는데도 이용될 수 있다.

<그림 3>에서 $f(x)=x^3+1$, $f^{-1}(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$, a=2에 대해 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))$임을 알아본다. 합성함수의 그래프 방법은 $f(f^{-1}(2))$와 $f^{-1}(f(2))$의 값을 결정하기 위해 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$에 적용한다. $f(f^{-1}(2))=f^{-1}(f(2))$임을 <그림 3>에서 알 수 있다.



<그림 3>

합성함수의 극한에 연속이 필수적임을 기하학적으로 보여주는 경우를 알아본다.

3. 합성함수의 극한

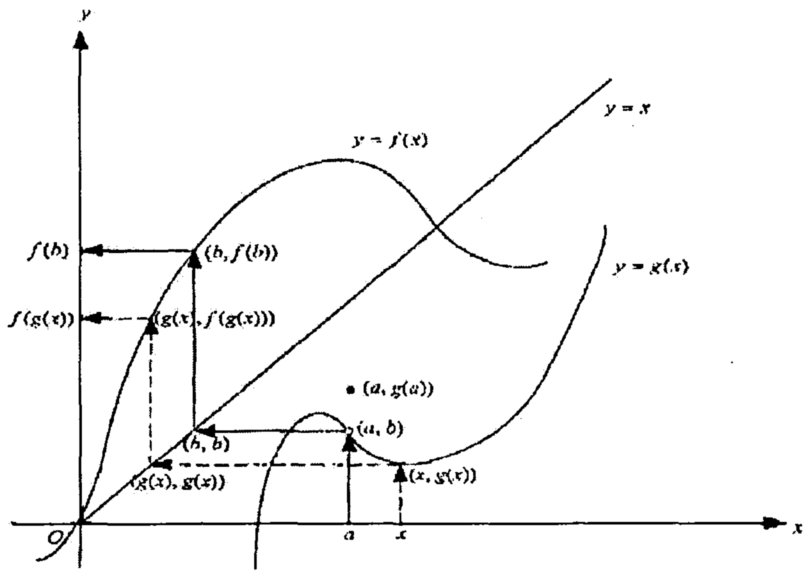
전형적인 대학수학 과정에서 학생들은 함수의 극한의 개념과 함수의 극한을 계산하는 다양한 방법을 배운다. 다양한 함수의 극한값을 계산하기 위해 여러 가지 극한 법칙을 알아야 한다. 예를 들면

대응하는 극한법칙을 적용하여 두 함수의 합, 차, 곱, 몫 또는 합성에 의해 만들어진 함수의 극한을 어떻게 계산하는지 안다. 두 함수의 합의 극한이 각 함수의 극한의 합이라는 것을 아는 것은 어렵지 않다. 두 함수의 차, 곱, 몫에 대해서도 마찬가지이다. 그러나 다음 정리, 두 함수의 합성에 의해 만들어진 함수의 극한을 계산하는 것이 학생들에게 직관적으로 분명하지 않다.

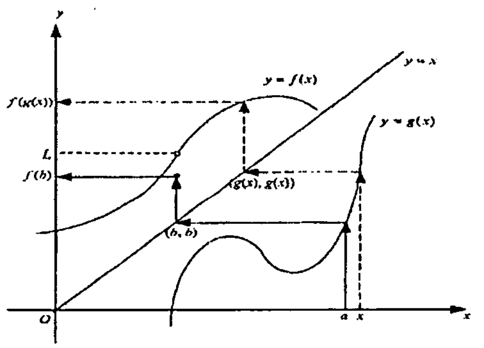
(정리) f가 b에서 연속이고 $\lim_{x\to a} g(x) = b$이면 $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$이다.

단지 이 정리를 무조건 기억하고 어떤 합성함수의 극한을 계산하도록 하는데 이용하는 것을 학생들에게 요구하는 것은 만족스럽지 않다. 우리대학 수준의 학생들은 극한의 $\varepsilon-\delta$ 정의를 이해하는데 곤란을 느끼므로 강력한 증명을 제시할 수 없다. 학생들이 이 정리를 직관적으로 받아들이게 하는 방법이 앞에서 제시한 그래프 방법이다. 학생들의 이해도 조사에서 결과는 이 개념에 대한 이해가 부족한 것으로 조사되었다. 이 정리에 대한 학생들의 이해를 높이기 위해 <그림 4>, <그림 5>, <그림 6>이 도움이 될 것이다. 함수 f와 g의 그래프를 같은 좌표평면 위에 나타낸다. g는 a에서 연속이 아니고 f는 연속인 함수를 선택하자. <그림 4>에서 $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$이다. 그러나 <그림 5, 6>에서 f는 b에서 정의되나 연속은 아니다. g는 a에서 연속이다. $\lim_{x\to a} g(x) = b$이고 $\lim_{x\to b} f(x) = L$이면 $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$이다.

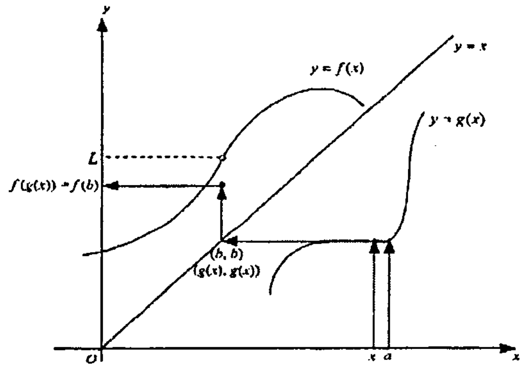
따라서, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) \neq L$이 되어 일반적으로 성립하지 않는다. 정리를 시각화해 보임으로서 강력한 증명 이상의 효과를 걷을 수 있다. 왜 f는 연속이어야 하는가를 분명히 알게 한다.



<그림 4>



<그림 5>



<그림 6>

4. 맺는 말

<부록>의 함수의 합성과 합성함수의 극한에 대한 이해도 조사를 2차로 인터넷을 통해 알려주고 각자 답하여 제출하면 성적에 반영하겠다고 알렸다. 문항별 정답자수와 %는 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 합성함수의 이해도 2차 조사 결과(명(%))

	1	2	3	4	5	6
주간(33명)	17(52)	10(30)	1(0.3)	14(42)	30(91)	22(71)
야간(71명)	47(66)	18(25)	20(28)	37(52)	54(76)	43(61)
계(104명)	64(62)	28(27)	21(64)	51(49)	84(81)	65(63)

1차로 조사할 때보다 정답율은 상당히 올랐지만 학생들의 참여율은 만족스럽지 못했다. 따라서, 마지막 시도로 이해도 조사는 확인하지 않고 합성함수에 대한 이해도를 더욱 높이기 위해 인터넷에 올린 자료를 수업시간을 할애하여 직접 문제를 풀어주고 그래프를 이용하여 설명하였다. 학생들은 함수합성에 대해 그래프 방법에 의한 설명으로 이해에 도움을 받았음을 수업시간 전체적인 인터뷰 조사 결과에서 알 수 있었다. 수학개념 한 가지를 이해시키는 방법으로 시도한 이런 방법(시험때 조사, 인터넷을 이용한 조사와 자료제시, 최후로 수업시간 이용 마무리)은 필요하지만 많은 시간의 투입과 1차 조사에 비해 참여율의 저조가 문제점으로 지적될 수 있다. 또 한편으로 중요한 것은 대학수학 학습수준이 낮은 학생들에게 이 방법이 이해에 도움을 주고 흥미를 갖게 하지만 엄밀한 증명에 다가서게 하는데 한계가 있다는 것이다. 정의와 개념에 따라 체계적인 증명을 하도록 하는 것은 또 다른 문제이다. 제한된 수업시간으로 학생들의 개념 이해를 확인할 수 없는 경우 인터넷을 이용한 조사와

학습자료 제시가 도움이 될 수 있다. 대학수학에서 필수적인 개념을 정리하여 이와 같은 모델을 만들어 수업시간 이외에 활용하면 학생들의 수학에 대한 관심과 개념의 이해를 한 단계 높일 수 있다. 계속적인 학습자료 개발은 특히 극한의 개념을 이해하는 데 animation이 상당히 도움이 되고 시각적으로 이해력을 증진시킬 수 있다. 이러한 하나 하나의 노력이 수학의 중요한 개념을 이해시키고 활용하는데 도움이 되도록 수업자료의 개발이 대학수학 전반에 걸쳐 이루어져야 한다. 생각해 볼 점은 기하학적 방법이 이해를 돕는 것은 확실하지만 계산을 하여 푸는 것은 또 별개의 능력이고, 이러한 시도가 감상의 수준에 있는 학생에게는 즐거움을 주지만 이해에 어려움을 느끼는 학생에게는 또 하나의 짐을 부여하는 것이다. 대학수학 수준에서 이런 시도가 학생들의 수학에 대한태도를 바꾸는데 받아들일 능력이 있는 학생에게 조그만 도움을 줄 수 있고 마지막 교양으로서 대학수학을 공부하고 떠나는 학생들에게 좋은 감정을 갖고 떠나도록 할 수 있을 것이다. 학생들이 그래프 방법에 의해 합성함수의 극한의 설명에서 도움을 받으려면 컴퓨터 애니메이션이나 OHP의 활용이 필요하다(김병무 · 김주봉, 1998).

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업 자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **36(2)**, pp. 127-133.

김병무 (2003). 대학 기초 미분적분학. 서울 : 신성출판사.

김병무 · 김주봉 (1998). 미적분 개념 형성과 Mathematica의 이용(1), 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 제**19**집, pp. 90-105.

Cannon L. O & Elich, J. (1993). Some Pleasures and Perils of Iteration, *Mathematics Teacher*, Vol. **86**, pp. 233-239.

Gregory J. Davis (2000). A Graphical Method for Function Composition, *Teaching Mathematics and its Application*, Vol. **19**, No. **4**, p154-157.

Ivy Kidron & Nurit Zehavi (2002). The Role of Animation in Teaching the Limit Concept, *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. **9**, No. **3**, pp. 205-227.

Kok Ming Teo (2002). A Graphical Illustration of the Limit of a Composite Function, *Teaching Mathematics and its Application,* Vol. **19**, No. **4**, pp. 139-143.

Riddle L. H (1994). Introducing the Derivative through the Iteration of Linear Function, *Mathematics Teacher*, Vol. **87**, pp. 377-381.

<부록>

합성함수와 극한에 대한 이해도 조사

1. 지금까지 고등학교와 대학에서 배운 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 합성함수를 기호로 나타내면 (　　)이고, 그 계산은 (　　)로 한다.

ㄱ) $(f\circ g)(x)$　ㄴ) $(fg)(x)$　ㄷ) $(g\circ f)(x)$　ㄹ) $(gf)(x)$　ㅁ) $f(g(x))$

ㅂ) $g(f(x))$　ㅅ) $f(x)g(x)$　ㅇ) $g(x)f(x)$

2. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 합성이 가능한 경우 다음에서 성립하는 것은?. (　　)

ㄱ) f의 정의역 = g의 정의역　ㄴ) f의 치역 = g의 치역　ㄷ) f의 정의역 = g의 치역

ㄹ) f의 치역 $\subset$ g의 정의역　ㅁ) f의 치역 $\subset$ g의 치역　ㅂ) g의 정의역 $\subset$ f의 치역

3. 함수의 합성이 가능한 경우 다음에서 성립하는 것을 모두 고르시오. (　　)

ㄱ) $f\circ g=g\circ f$　ㄴ) $f(g(x))=g(f(x))$　ㄷ) $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}$

ㄹ) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$　ㅁ) $f\circ I=I\circ f=f$ (I는 항등함수)

ㅂ) $\lim_{x\to a}g(x)=b$이면 $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(b)$이다.

4. 다음 함수에 대해 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 합성함수를 구하여라.

ㄱ) $f(x)=x^2-1$,　$g(x)=2x-3$　:

ㄴ) $f(x)=\cos x$,　$g(x)=e^x$　:

ㄷ) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,　$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$　:

ㄹ) $f(x)=\tan x$,　$g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$　:

5. $\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M(\neq 0)$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

ㄱ) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=$

ㄴ) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=$

ㄷ) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=$

ㄹ) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$

6. 다음 함수에 대한 극한값 $\lim_{x\to 1} g(f(x))$를 구하여라.

ㄱ) $f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$:

ㄴ) $f(x) = e^{x-1}, \quad g(x) = \tan\dfrac{\pi}{2}x$:

ㄷ) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = 3x^2 + 2$: