

GSP를 활용하여 투시화법으로 작도한 펜션

계 영 희 (고신대학교)

본 논문에서는 컴퓨터 기하 프로그램으로 가장 널리 활용되고 있는 GSP(The Geometer's Sketchpad)를 사용하여 사영기하학의 성질을 반영하는 투시화법(perspective drawing)으로 펜션을 작도하였다. 2000년에 버전 3.1로 작도하였을 때 한 점 투시화법(one-point perspective drawing)으로만 완성된 집을 보였고, 두 점 투시화법(two-point perspective drawing)으로는 미완성된 집이었다. 새로운 버전 4.0은 그 기능이 탁월하게 향상되었으므로 어렵지 않게 두 점 투시화법으로 집을 완성하였고 또한 photo-shop 7.0을 사용하여 아름다운 펜션으로 장식하여 보았다.

I. 서론

미국의 NAEP(The National Assessment of Educational Progress)는 1982년에 '17세 학생들이 가장 싫어하는 수학 주제는 증명 문제이고, 증명이 중요하다고 생각하는 학생은 50%이하'라고 발표하였다. 이에 자극을 받은 NAEP의 Judah Schwarz 와 Michal Yerushalmy는 수학에서 도형을 종래와 같이 증명으로 학습하지 아니하고, 또 수학을 단순히 문제를 푸는 일방적인 연습과정이 아니라 상호작용이 가능한 획기적인 교수 학습 S/W Geometric Supposer를 개발하여 1985년에 발표하였다. 이는 탐구활동을 통하여 스스로 발견해 가는 발견학습이기도 하다. 그 후 미국의 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)에서도 수학교수법에 컴퓨터와 테크놀러지의 사용을 지속적으로 권장하고 있으며 '모든 학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 공학을 사용해야 하며, 점차 증가하고 있는 기술 세계에서 수학을 사용하도록 학생들을 준비시켜야 한다'라는 <Standards 2000>을 발표하기도 했다.

우리나라에서도 강욱기, 강순자·고상숙, 신동선·류희찬, 황일 등 여러 학자들이 수학 교과에서 테크놀러지의 활용을 주장하고 있으며 특히 신현용(2000)은 앞으로의 수학 교육은 수학의 유용성을 알게 하고, 실생활에서 수학을 느끼고, 수학을 활용할 수 있도록 해야함을 주장하고 있다. 이제 수학의 교수·학습에서 테크놀러지의 사용은 자명한 일로 인식되고 있으며 문제는 학생들이 보다 더 수학을 잘 이해하고 흥미를 느끼며, 나아가서는 수학적 마인드를 가지고 공학과 기술세계에서 어떻게 창의적으로 응용할 수 있는가가 관건이라고 생각된다.

Geometric Supposer로부터 시작된 기하 소프트웨어의 세계는 현재 미국에서 GSP(Geometry's Skechpad) 4.0 버전까지 개발되었다. GSP는 미국 국립과학재단에서 VGP(visual geometry project)사업의 일환으로 Swarthmore 대학의 Eugene Klotz 와 Moravin 대학의 Doris Schattschneider 가 개발한 동적인 기하 소프트웨어이다. 1987년에 Nicholas Jachie가 매킨토시용 GSP버전을 발표한 후

계속 새로운 버전을 발표하여 2001년 가을 GSP 4.0 버전이 출시되었다. GSP의 개발과 발을 맞추어 출판사 Key Curriculum Press는 학생들이 도형에 대한 생각을 구조화 할 수 있으며 자신들이 발견한 관계들을 설명하기 위해 수식으로 수학을 표현할 수 있는 교과서 『Discovering Geometry』를 1989년에 발간한 후 계속하여 GSP 프로그램을 활용할 수 있는 창의적인 기하 도서를 발간하고 있다. 『Discovering Geometry』는 그룹의 학생들이 서로 협동하면서 어떤 성질을 발견하기 위해 컴퓨터 소프트웨어나 도구들을 이용하도록 하였고 패턴을 찾으려 하면서 추측할 때 귀납적 추론이 가능하도록 유도하였고, 정리의 내용을 이해할 때 반드시 증명하지 않고도 증명의 중요성을 이해할 수 있도록 배려한 점이 기존의 교과서와 다른 맞춤형 교과서이다.

본 논문은 2000년에 발표한 <GSP를 활용한 투시화법의 작도>에 대한 후속연구이다. Key Curriculum Press에서 1994년도에 출판한 『Perspective Drawing with The GEOMETER'S SKETCHPAD』에서 제시한 한 점 투시화법과 두 점 투시화법으로 집을 완성한 후에 photoshop 7.0을 사용하여 아름다운 펜션을 작도하였다. 정원의 나무는 본 연구자가 2000년에 이미 발표했던 피타고라스의 나무로 장식하여 보았다.

II. 투시화법의 이론적 배경

투시화법은 2차원 평면에 3차원 입체를 표현하기 위하여 연구 개발된 기법으로서 화가 알베르티(Alberti)와 듀러(Durer, 1471-1528)에 의하여 이론화된 원리이다. 16세기 透視畫法(또는 원근법)의 가장으로는 미켈란젤로, 다빈치, 라파엘을 꼽는다. 이들의 투시화법은 화가들이 회화를 사실적, 입체적으로 표현하기 위하여 연구한 예술적 투시화법(artistical perspective drawing)이었다. 본 연구에서는 건축가와 기술자들이 상세하게 설계도를 그리고 과학자들이 그들 연구에 관한 과정을 보이고자 할 때 이용되는 역학적 투시화법(mechanical perspective drawing)을 제시하고자 한다.

우리는 건물의 꼭지점들이 평행하다고 알고 있다. 그러나 사진에 나타나는 건물의 꼭지점들과 건물의 투시도를 작도할 때 꼭지점들의 선은 두 점을 따라 사라진다. 이 사라지는 점을 투시화법에서는 消失点(vanishing point)이라 부른다. 그리고 두 번째로 깨닫게 되는 사실은 우리들 시야에서 멀리 떨어져 있는 건물은 가까이 있는 건물보다 작게 나타난다. 그 이유는 무엇일까? 그 까닭은 우리 눈의 착각 때문이다. 따라서, 우리 눈의 착각을 이용하여 2차원 평면에 3차원 공간을 입체적으로 표현하고자 한 것이 투시화법이다. 500년 전에는 화가들이 중세의 평면적인 그림에서 벗어나 2차원 화폭에 사물을 사실적이고 입체감 있게 표현하려고 투시화법을 연구했으나, 오늘날은 2차원인 컴퓨터 모니터 위에 입체감과 공간감을 표현하려고 투시화법을 연구한다.

본 연구에서는 GSP를 활용하여 투시화법의 원리를 설명하여 최근에 각광 받으며 디자인 분야에 널리 애용되는 CAD, 3D-builder등에 대한 이론적인 기초가 되는 수학적 원리를 설명하고자 한다.

III. 연구 내용

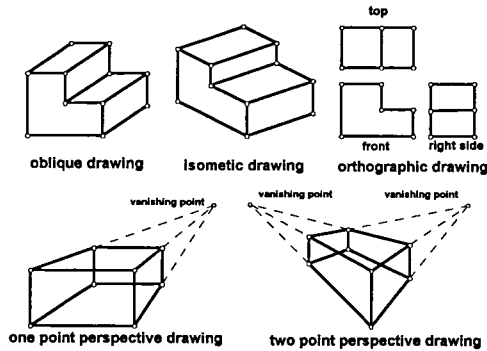
(1) GSP의 특징

2001년 가을에 출시된 GSP 4.0 버전의 특징은 GSP 3.1 버전이 가지고 있는 기능보다 한층 더 업그레이드된 고급 기능을 가지고 있는데 그 기능은 다음과 같다.

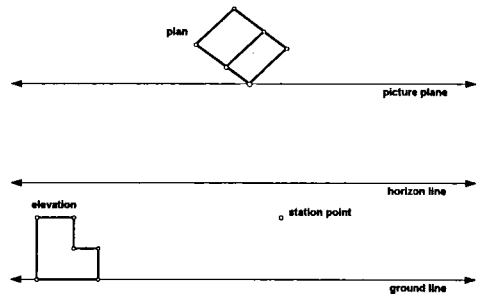
- ① 좌표계를 극 좌표계, 정사각좌표계, 직사각좌표계 등으로 다양하게 표현할 수 있다.
- ② 함수를 미분할 수 있으며 함수의 그래프를 그릴 수 있다.
- ③ 동적 기하를 web에 올릴 수 있다.
- ④ 다른 프로그램이나 워드 프로세서에서 사용할 고화질의 수학적 이미지를 만들 수 있다.

(2) 역학적 투시화법(Mechanical Perspective Drawing)의 종류

투시화법은 두 가지 유형으로 나뉜다. 하나는 예술가들이 사용하는 기법으로써 과정과 목적이 비 기술적이고 정확성이 많이 요구되지 않는 예술적 투시화법이고, 또 하나는 건축 설계사나 엔지니어들이 사용하는 실제 물체 위의 점과 선이 정확히 요구되는 역학적 투시화법이다. 이것은 다음과 같은 유형으로 분류된다.



<그림 1> 화법의 종류



<그림 2> 투시화법으로 작도할 때의 layout

<그림 1>을 살펴보자. Oblique drawing은 정면에서 바라보는 작도로써 각각의 모서리들은 모두 평행하지만 모서리의 연장선들은 한 개의 소실점에 모이지 않는다. 정면에서 바라보았지만 옆과 위도 볼 수가 있다. Isometric drawing은 임의의 각도에서 바라보는 작도법인데 모서리들은 모두 평행 사변형으로 나타나며 Oblique drawing과 마찬가지로 모서리의 연장선은 수렴하지 않는다. Oblique과 Isometric drawing 사이에 별 차이점은 없으나 사물을 정면에서 바라보기 때문에 Oblique drawing이 Isometric drawing보다 작도하기 편리하다. Orthographic drawing은 사물의 top view(평면도), front view(입면도), side view(측면도)로 이루어져 있는데 이 방법은 건축가나 기술자들에 의해 이용된다.

한 점 투시화법에서는 직육면체가 앞면과 뒷면은 직사각형으로 작도되지만 나머지 네 면은 직사각형이 아니다. 왜냐하면 한 개의 소실점에 직육면체의 모서리들이 수렴해야 되기 때문이다. 그리고 두 점 투시화법에서는 소실점이 두 개이므로 직육면체의 모든 면은 임의의 4각형으로 나타난다. 곧 사영기하학의 성질인 것이다. 화법의 유형을 정리하여 그 차이점을 살펴보면 다음과 같다.

위에서 본 이 유형들은 GSP상에서 투시화법을 작도할 때와 약간의 차이를 보이는데 그 차이점은 소실점이다. <그림 2>를 살펴보자. 우리가 바라보는 모든 사물의 평행선들은 소실점을 가지고 있는데 땅과 평행하는 선들은 수평선위에 소실점을 가지게 된다. 많은 빌딩이 있는 사진을 보게 되면 건물의 모서리 부분들이 한 점 또는 두 점 더 많게는 세 점 이상의 점을 향해 평행하게 뻗어 있는 것을 볼 수 있다. 결국 GSP를 활용한 투시화법의 작도는 소실점을 이용한 작도로서 소실점은 한 개 또는 두 개 이상으로도 구현될 수 있다. 사물을 투시화법으로 작도하기 위해서 우리는 <그림 2>와 같은 layout을 만든 후에 작도를 하는데 다음과 같은 몇 가지 성질이 요구된다.

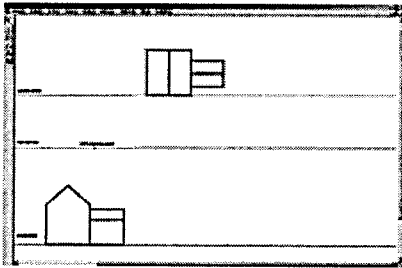
- ① 관찰자가 유리창 밖에서 사물을 보지만 실제로 그려지는 그림은 유리 평면에 그려지는 것이다. 여기서 유리 평면을 picture plane이라 한다.
- ② 사물의 모든 차원(dimension)은 layout에 표현되어야 한다.
- ③ 2차원 도형인 plan view와 elevation view로 3차원 입체를 구성할 수 있다.
- ④ 관찰자의 시선이 대응되는 점을 station point라 하고 picture plane상의 측면도를 elevation이라 한다.
- ⑤ Top view는 plan view, station point, picture plane의 변을 표현하는 직선을 포함 하고, side view는 elevation view, ground line, horizon line를 포함한다.
- ⑥ Plan view로는 사물의 길이와 너비를 알 수 있다. Ground line은 ground plane을 표현하는 직선이고, elevation은 그 직선에 있다. Horizon line은 관찰자의 눈높이가 있는 직선이다. 따라서 소실점은 수평선 위에 존재하게 된다.
- ⑦ Plan은 스크린 상의 거의 모든 곳에 들 수 있지만 picture plane 중앙에 plan의 모퉁이가 오게 하는 것이 편리하다. 그리고 station point의 위치는 사물 앞에서 있는 관찰자가 어디 있는가에 따라 plan과 관련이 있다.
- ⑧ 관찰자의 눈높이에 의해 ground line의 위치가 결정이 되므로 horizon line은 ground line 위에서의 관찰자의 눈높이이다. 관찰자의 눈높이와 plan의 각도는 30°~45°가 가장 편리하다.

<표 1> 화법의 종류에 대한 설명

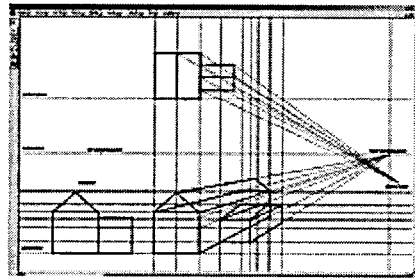
화법	소실점의 수	측량 가능성이 있는가?	실제 모습인가?
Oblique Drawing	0	있다	아니다
Isometric Drawing	0	있다	아니다
One-point Perspective Drawing	1	없다	그렇다
Two-point Perspective Drawing	2	없다	그렇다

(3) 한 점 소실점을 갖는 투시화법

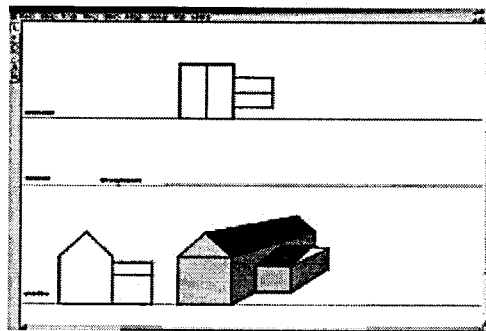
여기서는 한 개의 소실점을 갖는 한 점 투시화법을 설명한다. 이 때 물체의 모서리 부분들이 한 점의 소실점에 모두 모이게 된다. 다음과 같은 집 모양의 작도가 이 형태에 속한다.



<그림 3> 입면도와 평면도를 그린 layout

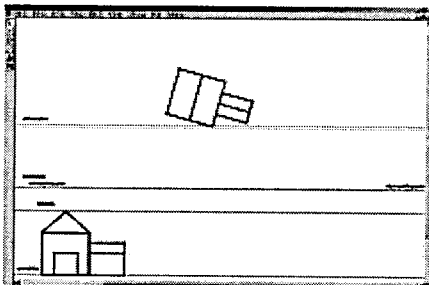


<그림 4> 그림 3으로 소실점과 station point를 설정하여 작도한 그림

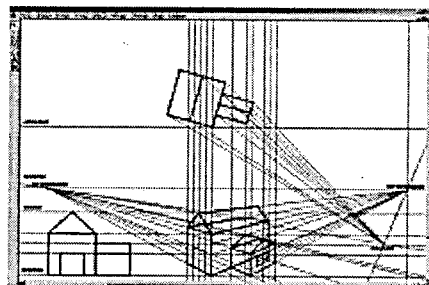


<그림 5> 작도한 모든 선을 숨긴 후 색칠을 한다

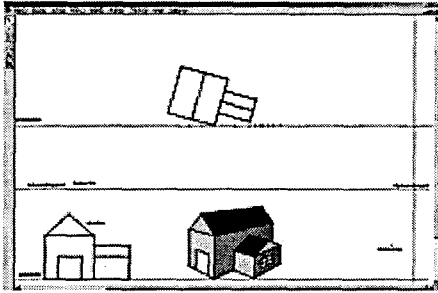
(4) 두 점 소실점을 갖는 투시화법



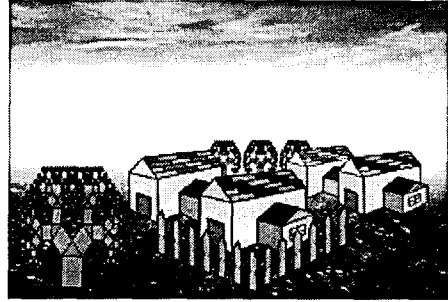
<그림 6> 평면도를 비스듬하게 설정한 layout



<그림 7> 두 개의 소실점과 한 개의 station point를 가지고 작도한 그림



<그림 8> 작도한 선을 숨긴 후 문과 창문이 보이도록 색칠을 한다



<그림 9> 그림 8과 피타고라스 나무를 응용한 후 전원풍경을 만든다

IV. 결론

여러 연구결과에 의하면 GSP를 사용하여 중학교 학생들에게 교수한 결과 변형된 여러 도형을 통하여 학생들은 발견적 사고를 이끌어 낼 수 있게 되었고 수학의 추상적인 시각화가 기하학습의 어려움을 완화시켜 주었다고 한다. 또한 영상매체에 익숙한 청소년들에게 애니메이션 기능과 자취 기능 등으로 관심을 끌고 흥미를 유도하여 수학에 대한 두려움이 없어진다고도 한다.

본 연구에서는 역학적 투시화법을 수학적 근거를 바탕으로 설명하였다. 가령 직육면체를 그릴 때 isometric drawing에서는 평행선의 모서리들은 평행하게 나타나므로 소실점이 없으며 실제 모습으로 보이지 않지만 길이를 잴 수 있는 측량 가능성이 있다. 그리고 oblique drawing에서도 평행선의 모서리들은 평행하고 소실점이 없으며 실제 모습이 아니고 측량 가능성이 있는 점은 isometric과 같다. 그러나 isometric drawing은 정면에서 바라보는 것을 묘사하기 때문에 oblique drawing보다 편리한 점이 있다. 한편 같은 직육면체를 작도 하더라도 소실점을 하나만 염두에 두고 그린 한 점 투시화법은 실제 모습처럼 작도가 되지만 측량 할 수가 없는 단점이 있고 소실점 두 개를 예측하고 그린 두 점 투시화법도 실제 모습으로 작도되더라도 실제 길이를 측량 할 수 없는 단점이 있는 것을 알게 되었다.

본 연구에서는 사영기하학의 응용분야로서 투시화법에 의한 집을 기하 S/W GSP로 작도해 보았다. 이러한 실험은 대학의 수학과에서 기하학 교과목을 컴퓨터로 활용하고자 할 때 학생들에게 그룹의 과제로 내주어 photoshop 작업까지 활용할 수 있는 기회가 되도록 하면 좋을 것 같고, 특히, 건축, 토목, 기계공학을 비롯하여 멀티미디어, 영상처리 등 디자인 분야를 전공하고자 하는 학생들에게도 흥미로운 관심과 더불어 수학의 아름다움과 활용도, 쓰임새 등을 체험할 수 있는 과제가 되리라고 본다. 또한 7차 교육과정에서 수준별 선택형 수업이 실시되는 고등학교 학생들에게도 실생활과 접목되는 흥미로운 과제가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 강옥기 (1997). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용. 한국수학교육 학회지 시리즈A 35(1), pp.15-23, 서울: 한국수학교육학회.
- 강순자·고상숙 (1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습 자료 개발 : GSP를 이용하여 정다면체 구성, 한국수학교육학회지 시리즈A 38(2), pp.178-187, 서울: 한국수학교육학회.
- 강영란·남승인 (2000). 초등학교 평면기하 학습에서 GSP활용에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E 10, pp.97-106. 서울: 한국수학교육학회.
- 계영희 (2000). GSP를 활용한 투시화법의 작도, 한국수학교육학회 시리즈E 10, pp.293-302 서울: 한국수학교육학회.
- (2000). GSP를 활용한 중학교 수학교과의 연구 - 피타고라스 정리를 중심으로-한국수학사학회지, 13(2), pp.121-132, 서울: 한국수학사학회.
- 박기수(2001), JAVA를 이용한 중학교 기하영역 자료개발 -GSP로 구현한 정다면체의 구성-, 한국수학사학회지, 14(2), pp.115-124, 서울: 한국수학사학회.
- 김종민(2002), JAVA를 이용한 중학교 기하영역 자료개발 -GSP로 구현한 피타고라스의 정리-, 한국수학교육학회지 시리즈E, 13(2), pp.515-525, 서울: 한국수학교육학회.
- 박대우·윤주환 (1997). 피타고라스 정리의 효과적인 지도 방안에 관한 CAI 제작 및 적용을 통한 학습의 효과에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A, 36(1), pp.61-75, 서울: 한국수학교육학회.
- 양기열·주미 (1998). 소프트웨어를 활용한 기하 교수·학습 방안, 한국수학교육학회지 시리즈A 37(2), pp.215-225.
- 신동선·류희찬 (2002). 수학교육과 컴퓨터, 경문사, 서울.
- 신현용 (2003). 교사 양성기관으로서의 수학 교육과의 교육과정, 대한수학회 소식, 88, pp.19-23. 서울: 대한수학회.
- 황 일 (1996). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈A, 35(1), pp.15-23. 서울: 한국수학교육학회.
- Cathi Sanders (1995). *Perspective Drawing with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, C.A.
- Eugene Klotz & Doris Schattschneider (1995). *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, C.A.
- Michael Serra (1997). *Discovering Geometry 2nd*, Key Curriculum Press, California.
- NCTM(National Council of Teachers of Mathematics) (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA
- NCTM, *Standard 2000(Principles and standards for school Mathematics : Discussion Draft)*, Reston, VA : NCTM, Inc., pp.1-75.