韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 211-222.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 211-222.

수학학습의 발생과 체험-유추 그리고 메타포

정 치 봉[1] (순천향대학교)

신체적 체험은 인간의 사고를 형성하는 바탕이 된다. 문제해결 경험은 인간 사고를 한층 더 발전시킨다. 특히 사물의 형태와 움직임을 관찰하고, 그러한 환경에 감각-운동 신경을 발달시키는 체험에서 획득된 개념들은 추상적 사고에서 중심적 역할을 한다는 언어심리학의 가설이 흥미롭게 제기되어 연구되어 오고 있다. 개념체계로서 수학, 언어로서 수학, 의미 만들기로서 수학 , 문제 해결로서 수학 등 수학학습과 관련된 수학의 여러 모습에 대한 새로운 시각을 갖게 한다. Lakoff와 Johnson는 신체적 체험이 가져온 이러한 개념체계들 '메타포'라고 부른다. 메타포의 '개념' 수준으로의 확장은 analogy의 의미를 확장시켰다. 수학학습에 신체적 체험으로 존재하는 개념들은 수학적 개념에 이르는 학습을 새롭게 보게 한다. 본 연구는 metaphor와 analogy의 인지과학 및 언어과학에서 연구되고 있는 일반적 의미들을 제시하고 수학학습에서의 적용될 수 있는 방법들을 제시한다.

1. 서 론

21세기에 학교와 교육이 제도적으로 크게 변화할 것으로 예상된다. 교육을 통하여 인간 개인의 능력과 품성이 계발되고 사회와 문화가 성장한다는 명제는 여전히 유지될 것으로 보인다. 그러나 학습이 직접 체험으로 발생하고 진행되는 미시적 국소적 (micro-local) 현상은 크게 변하게 될 것이다.

21세기에도 수리적 능력 또는 소양은 여전히 중요한 의미를 갖는다. 한편으로 21세기가 필요로 하는 인적자원은 매우 다양하고 과거와는 인적자원의 질과 성격이 근본적으로 다르다. 수리적 능력을 계발하는 수학 교수-학습 방식 또는 학습 체험 방식이 크게 변할 것으로 생각된다.

인간의 뇌를 중심으로 하는 사고와 몸(손, 눈, 귀 등 신체 기관)으로 하는 체험은 학습에서 분리될 수 없다. 학습에서 말, 글, 그림, 도표, 심볼, 제스쳐, 손으로 하는 도구 조작 등 다양한 언어-기호 체계를 사용한다. 학습은 학습 주제, 대상, 의미, 의도 등 다양한 인지적 관점이 학습자의 학습 의욕, 호기심을 갖게 한다. 학습 환경 특히 교사-학습자, 텍스트-컨텍스트, 발표자-시청자 등의 상호 작용을 통한 학습 진행 형식은 매우 중요하다.

의미를 감각하고, 지각하고, 만들고, 표현(상)하고, 교환하고, 기억하고, 해석하고, 의미를 시도하고 체험하는 등의 사고와 활동은 그 자체로 학습이다. 의미를 엮어 가는 종합적인 활동에서 직관은 매우 중요하다. '개략적인 심리적 탐색 또는 실험'으로부터 얻어진 직관은 앞으로 진행될 사고 또는

1) 본 연구과제는 2003학년도 순천향대학교 자연대학 기초과학연구소 학술연구조성비 일반과제로 지원을 받아 수행하였음

활동에 대한 골격 또는 밑그림이기 때문이다. 직관을 얻기 위한 '개략적인 , '개연적인' 또는 '그럴듯한' 심리적 탐색과 사고 실험은 크게 analogy(유추, 유비, 상사, 유사)와 metaphor와 관련이 있다. 구조, 형태, 모양, 과정, 절차 등 감각, 관측이 가능한 물질적 관점에서 유사함을 'analogy'로 보는 경향이 있다. analogy의 언어적 표현(상)으로 metaphor를 보기도 한다. 최근의 analogy와 metaphor에 대한 연구는 이 둘의 의미와 형식이 크게 확장되어왔다.[Gentner, Lakoff&Johnson]

현재 발달하고 있는 정보, 미디어, 컴퓨터 시스템 그리고 네트워크 시스템은 인간의 학습 영역과 방식을 확장시켜주고 있다. 현재의 학습 환경은 20세기와는 질적으로 다르다. 학습이 진행되는 과정에서 학습자는 다양한 물음을 만들어 가며 의미를 추구하여 간다. 주어진 학습 주제에 대하여 다양한 의미를 가진 접근 방식 또는 과정이 21세기 학습의 중요한 특징의 하나일 것이다. 학습에서 의미적 다양성의 추구는 인식의 다양성, 가치의 다양성, 사회적 의사소통의 발전 등 의미를 주고받는 시스템이 작동하는 방식에 달려있다.

의미란 무엇인가? 어떻게 인간은 의미를 만들고 해석하고 이해하는가? 의미 체계란? 이러한 일반 물음에 의미 대신에 '수학적 의미'로 바꾸어도 물음이 된다. 과연 21세기에 어떻게 효과적이고 효율적인 그리고 인간의 관점에서 쉽게 접근하고 풍부하게 이해할 수 있는 '수학적 의미 체계와 매체'가 가능하고 그리고 발전하겠는가?

2. 본 론

G. Lakoff(1992)는 언어적이고 수사적인 그리고 문학적인 한계에 머물고 있던 전통적인 메타포를 사고, 인식, 인지 수준으로 '의미'를 다루는 아이디어로 확대할 수 있다는 가능성을 제시하였다.

> 전통적인 언어 이론에서, 메타포는 사고보다는 언어의 문제로서 보아왔다. ... 일상의 관습적인 언어의 사용에서 벗어나는 메타포를 일상언어는 가지지 못하였다. 개념에 대한 단어들의 표현으로서 메타포는 보통의 통용되는 관습적 의미를 벗어나 유사한 개념을 표현하기 위하여 사용하는 것으로 정의하였다.
> 전통적인 메타포 표현의 사용과 역할에 대한 일반화...
> 메타포는 개념 영역을 건너는 또는 건네주는 맵이다. 메타포는 개념체계 안에서 교차-영역을 (두 영역들이 공유하는 또는 유사한 개념 부분을 연결해주는) 설명하여 주는 맵이다. 자연언어의 의미론의 중심에 메타포가 위치한다. 교차-영역의 맵으로서 메타포의 확장... 세계를 개념으로 표상하고 만드는 방식으로서 메타포 ... 메타포는 다른 영역의 경험으로 어떤 영역의 경험을 이해하도록 사용된다. 메타포는 원영역에서 목표영역으로의 맵으로 이해될 수 있다. 이 때 맵은 (개념적으로) 견고한 구조를 갖는다.Lakoff(1992)

메타포의 예로서 "Love is a Journey"을 생각해보자. Lakoff는 사랑과 여행이라는 각 개념 범주를 연결하여 주는 맵으로서 메타포를 구조적으로 해석하고 의미를 얻으려 한다. 이 예에서 원영역(source domain)은 Journey(여행)으로서 우리의 몸과 마음이 구체적으로 경험함으로서 형성된 개념

범주를 놓는다. Lakoff는 이러한 개념 범주를 사고의 밑바탕을 이루는 특별한 메타포로 규정하였다. 이 예에서 목표영역은 Love(사랑)이다. '여행'은 신체와 세계가 직접 경험으로 형성되는 구조화된 개념체계 또는 의미망으로서 하부 개념 체계를 구성하고 있다. "Love is a Journey"라는 메타포는 맵으로 Journey(여행) 영역을 넘어서 'Love(사랑)' 영역의 의미망으로 하부 개념 체계를 구성하고 해석하는 길잡이 역할을 한다. 예로서 모든 '여행"은 출발지점과 목적지점이 있다. 여행-사랑 메타포 맵은 '사랑의 출발지점' 사랑의 목표지점'이라는 '사랑'의 하부 개념을 이끌어 낸다.

수학 교육에서 특히 수학 교수-학습에서 Lakoff의 사고, 인지, 인식 그리고 개념 수준으로 확장된 메타포를 어떻게 수용할 수 있는가? Lakoff의 메타포를 수학학습에 효과적으로 사용할 수 있는가? 메타포를 수학학습 방식에 어떻게 구현할 수 있는가? 수학학습의 이해 또는 인지 수준과 질을 향상 시킬 수 있는가?

이러한 물음에 대한 수학교육과 학습에 대한 연구 사례와 비판들이 최근에 활발히 제시되고 있다. [Chiu(1992), Lakoff&Nunez(1996), Davis&McGowen(2001), Dubinsky(1999)]

Lakoff의 '메타포'는 '개념적 유사성'으로부터 발생한다. 'analogy' 또한 'similarity'에 대한 인식에서 발생한다. 이러한 관점에서 인지심리학에서는 "Metaphor is like Analogy"로 보기 시작하였다. Gentner와 그 동료 연구자들은 메타포를 'conceptual metaphors as extended analogical mappings'의 관점에서 본다. [Gentner, Boedle , Wolff & Boronat 2001].

수학적 의미를 만들어 가는 사고와 체험에서 직관, 유추, 메타포를 어떻게 다루어야하는가? 유추와 메타포란 어떻게 나타나고 어떻게 작용하는가? 이들 물음은 "수학학습을 어떻게 하여야 하는가?" 라는 물음과 직접적으로 밀접하게 연관되어 있다.

20세기 빅뱅 이론에 공헌하고 물리학의 대중화에 힘쓴 이론 물리학자 G. Gamow는 "훌륭한 수학자는 정리와 정리 사이에서 analogy를 찾아내지만 , 가장 훌륭한 수학자는 analogy와 analogy 사이에서 analogy를 찾아낸다"라고 말하였다. Gamow가 말하는 analogy는 문제를 탐구하는 과정에서 해결에 이를 수 있는 아이디어로서 analogy의 발견을 언급하고 있다.

의미활동을 지속시켜주는 연이어 발생되는 아이디어들이 analogy와 직관이 함께 작용하고 있다고 보인다. 의식아래의 무의식의 심층에서 'analogy'의 가능성을(viability) 빠르게 엿보는 또는 시뮬레이션하는 작용이 일어난다. 이러한 의미에서 analogy와 직관이 결합한 의미로서 우리말 '유추'는 적절하게 번역된 용어로 보인다. 즉 intuitive analogy 또는 analogical intuition의 의미이다.

한편 인지 과정에서 논리와 의미를 엄밀히 그리고 정확하게 추구하는 분석하는 과정에서 사용하는 analogy가 있다. 인지심리학자들은 analogy가 존재하는 두 대상(또는 개념, 범주, 영역)의 구조를 분석하고 이해하는 연구를 수행하여 왔다. 즉 analogy를 대상이 갖는 하부 구조(의미,속성,개념, 관계 등) 사이의 '맵'을 사용하여 이해하려고 한다. [Gentner, Gick, Anderson, Holyoak]

직관적 유추는 창의성, 문제해결 등과 관련하여 연구되는 경향이 있다. 문제가 앞에 놓여 있을 때, 흔히 과거에 다루었던 문제의 유사성과 그 해결 가능성을 찾는다. 과거 문제에서 어떤 가능성 있는

'아이디어'를 찾았을 때 문제 해결의 진행을 도와주는 그리고 이미 알려져 있는 '대상, 모델, 영역, 범주, 정보, 지식, 아이디어, 도구, 전략, 절차, 알고리듬' 등을 base-domain이라고 부른다. 따라서 base-domain에 대하여 문제해결의 목표가 되는 영역을 target-domain이라고 부른다. 문제해결의 관점에서 base-domain은 목표영역에 도달하기 위한 해결과정의 길잡이로서 그리고 정보 데이터베이스로서 역할을 한다. base-domain은 메타포 맵의 체계에서 원영역(source-domain)에 해당한다.

인간학습의 특징은 주어진 문제의 핵심을 놀라울 정도로 빠르게 통찰하고 해결에 이르는 여러 과정의 가능성을 빠르게 개략적으로 그려볼 수 있다. 인간의 유추에 대한 메카니즘은 논리적·분석적이기보다는 직관적이고 언어적·기호적이기보다는 시각적·심상적이다. 'analogy'의 심상적 다양성은 이들 현상과 작용의 연구를 어렵게 한다. 유추적 심상 중에서 개념적 성격을 갖는 analogy는 메타포로서 기호-언어적 방법으로 연구가 최근에 이루어지고 있다. 메타포 인지심리언어학으로 부르는 이 분야의 대표적인 연구자는 Lakoff와 Johnson이다. Lakoff & Johnson의 진리에 대한 관점은 수학학습 연구에서 주목할 만하다. 이들은 "*진리는 신체화된 이해와 상상에 의하여 매개된다*" 라고 말한다.

개념적 유추에 대한 기호-언어적 연구는 최근에 Lakoff & Nunez에 의하여 수학적 개념에 대한 연구로 그 첫 걸음을 시작하였다. Lakoff & Nunez(2000)는 "where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being"이라는 책을 출판하였다. Dubinsky는 AMS-Notices에 책의 서평을 씀으로서 많은 수학자와 수학교육자들의 관심을 일으켰다.

Lakoff & Nunez은 수학 또는 수학적 개념이 어디에서 어떻게 오는가? 를 설명하고자 하였다. 그들이 제시한 신체적 체험이 형성한 ground-메타포 개념체계에서 추상적인 수학적 개념체계로 연결하는 그럴듯한 메타포에 대하여 수학자와 수학교육자 사이에 비판, 오해, 긍정, 부정 등 다양한 의견을 보이고 있다.

유클리드가 머리 속에서 그린 이상적 평면기하에서 자와 컴퍼스를 사용하는 '구체적 현실 세계 안에서 평면기하'는 아니다. Lakoff의 메타포 이론의 관점은 '자와 컴퍼스에 의한 평면기하와 '추상적 ' 평면기하' 사이를 연결하는 것이 메타포이다. 수학자와 수학교육자는 자와 컴퍼스로 체험하는 평면기하의 개념과 유클리드 공리체계에 의하여 존재하는 추상적 평면기하에 대한 다양한 이해가 있다. 만약에 우리가 유클리드 시대에 살았다면 수학자, 수학교육자, 그리고 수학적 개념에 대한 철학자의 시각은 '평면기하의 메타포'에 대한 다양한 이해에서 오는 많은 논쟁을 일으켰음에 틀림이 없다.

Lakoff의 개념적 메타포의 핵심은 모든 개념 체계는 메타포이고 특히 인간의 신체가 구체적으로 체험하면서 진화하여 온 감각-운동 신경계가 만든 ground-메타포가 모든 개념 체계(메타포)를 형성하는데 중심적인 역할을 한다는 것이다. 여기서 수학적 개념들을 연결하는 ground-메타포와 ground-메타포와 수학적 개념을 연결하는 linking-메타포가 수학적 논리의 완전성, 무결성을 충족할 이유는 없다. Lakoff의 이론은 수학적 개념과 이론을 구성하는 수학적 명제, 정리 등에 대한 진리를 판정하는 방법도 이론도 아니다. Lakoff의 물음은 개념은 어디에서 오고 개념적 사고는 어떻게 이루어지고 개념은 어떻게 진화하는가? 에 대한 설명이다.

1, 2 3, ...과 같은 자연수와 사칙 연산의 수학적 개념은 어디에서 왔는가? Lakoff & Nunez가 제시하는 '체험으로 구성되는 산술 개념'은 ground-메타포로 다음과 같이 예시하고 있다.

The pile of objects
addition, A+B ; putting A objects into the pile of the A objects
subtraction, A-B ; removing(deleting) B objects from the pile of A objects
multiplication, A×B ; B replications of the pile of A objects
or cutting each of A objects into B pieces
division , A/B ; putting the A pieces evenly into B boxes
merging(clustering) every B of A objects into new objects.

이러한 메타포는 초등학교 수학 학습에 전통적으로 사용되어 왔었다. 체험이 가능한 또는 체험이 관찰되는 이러한 산술 개념은 공리적으로 산술 체계를 구성하는 추상적 '산술 개념'이 아니다. '사물들의 무더기'에 대한 체험에서 존재하는 '산술 개념'과 '추상적 산술 개념' 사이를 연결하는 메타포가 체험적 산술 모델이 '수학 교육적으로' 별 무리 없이 직관적으로 수용 가능하다.

Lakoff는 body와 mind를 Descartes의 이원론과는 다른 embodied mind에서 인간의 인식 및 행동을 바라본다. 오랜 시간동안 인간은 덩어리진 물체들 모으고(가져오고) 버리고(가져가고) , 같은 개수의 더미들로 나누는 신체를 사용하는 활동 체험에서 'body+mind'가 환경에 맞추어 적응, 진화되어 왔고 현재의 숫자 기호와 연산기호에 의한 추상적인 수학적 개념으로까지 발전하여왔다고 본다. 여기서 덩어리 물체의 더미와 이와 관련된 인간 신체의 감각-운동 조작 활동인 모으기, 가져가기, 묶어서 정리하기 등을 ground(basic) metaphor라고 부른다. Lakoff는 인간의 기호-언어 체계를 인간의 신체가 체험함으로서 인간의 몸과 신경계가 형성 발전 진화시켜온 메타포로서 해석하고자 한다.

수학자, 수학교육자들은 미묘한 의미에서 Lakoff, Johnson 그리고 Nunez의 수학적 아이디어에 대한 metaphor의 목적, 의도 , 인식론의 관점의 차이 또는 오해가 있다. Lakoff와 Nunez의 MAA online book review에서 다음과 같은 주장을 밝히고 있다.;

수학을 가져와 존재하도록 한 것은 인간의 신체화된 정신이다.
개념적 메타포는 경험적으로 관찰할 수 있는 인간 정신의 작동(용) 메커니즘이다.
개념적 메타포로 경험에 의하여 관측된 데이터를 설명하게 된다. ...수학적 아이디어의 인지 과학...이 책은 수학적 아이디어와 추론을 인간 정신의 메카니즘을 생물학적으로 그리고 인지적으로 그럴 듯한 설명을 주려고 하였다. 예로서 개념적 메타포 "개체 모임으로서 산수"는 예로서 "셋은 둘보다 크다"과 같은 말 또는 문장들이 어떻게 정확한 의미를 갖게 되는가에 대한 설명을 주기 위한 신체화된 인지적 메카니즘이다. 즉 개념적 메타포는 인간의 언어적 표현들이 왜 정확한 의미를 갖게되는가를 설명하는 것이다.

수학적 아이디어의 Lakoff와 Nunez의 개념적 메타포는 수학교육에서 수학지식의 전이(transfer of mathematical knowledge) 문제와 관련된다. 먼저 "산수"와 같은 수학적 아이디어, 주제에 대한 개념

적 메타포를 찾거나 구성하여야 한다. 개념적 메타포는 기존의 수학교육에서 전통적으로 사용하여 오고 있는 메타포 일 수 있다. 수학 교수-학습에서 동일한 수학적 아이디어 또는 주제에 대하여 다양한 개념적 메타포가 있을 수 있다. 뿐만 아니라 "산수"에서 "분수" 또는 "음수"에 대한 산수에 대하여 개념적 메타포가 다를 수 있다.

개념적 메타포는 잘 작동하여야 한다. 즉"How the conceptual metaphors work well?" 수학교육 또는 학습의 관점에서는 학교수학에서 다루는 수학적 아이디어들에 대하여 인간의 생물학적인 그리고 인지적인 제약을 가진 'embodiment'가 무엇이며 어떻게 활용할 것인가? 라는 물음을 갖게 된다. 예로서 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{x^2+2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 등과 같은 무리수들을 어떻게 가르치고 학습할 것인가? 무리수를 이해하는 신체적 인지적 제약은 무엇인가? 이 들 제약을 만족시키는 자연스런 학습은 무엇인가? 무리수를 몸으로 체험하는 활동이 무엇인가? 이러한 체험이 무리수를 추상적으로 다루는 개념적 메타포로 어떻게 전이(transfer)될 수 있는가? Lakoff 등 인지심리언어학의 지금까지의 연구는 이에 대한 답을 주고있는가?

Dubinsky(1999)는 Lakkoff의 수학개념에 대한 메타포 프로젝트에 대하여 비판적인 의견을 보이고 있다.Dubinsky의 '형식주의'는 수학 또한 언어를 도구로 이루어지고 현대 기호-언어학의 의미론 화용론의 여러 '형식주의' 방법들을 간과한 점이 있다. Dubinsky의 견해는 수학의 엄밀한 논리적 완벽성에 대한 우려를 갖고 있다고 보여진다. 엄밀한 수학적 논리의 완성은 학교수학의 수준에서 진지하게 고려되어야 한다.

학교수학을 어떻게 할 것인가? 이 물음은 수학교육자, 수학자, 교사, 수학을 사용하는 과학자, 일반 시민의 관점에서 각인각색으로 다를 것이다. 수학에서 여러 상황에서 매우 중요하지만 수학을 사용하는 수준과 컨텍스트가 적절하여야 한다. 수학자의 수학과 학교수학의 학습자의 수학이 '수학적 체험'으로 공유하여할 부분과 구별되어야 하는 부분이 있다면 수학적 아이디어를 구체적으로 의미를 의식하면서 접근하는 방식은 공유되어야 할 부분이다. 수학의 논리적 엄밀함 또는 완벽성은 컨텍스 수준에 따라 구별될 필요가 있다. 이것은 수학교육의 관점에서 매우 복잡한 문제이다.

피타고라스, 유클리드, 아르키메데스 등이 생각한 그리스의 수학은 수(정수, 유리수)와 기본 도형들(직선, 원, 삼각형, 사각형, 곡선 등)을 체험하는 메타포로 가득하다. 기하까지도 시각적 컨텍스트를 해체하여(decontextualization) 수로 환원하여 보려고 하였다. 그렇지만 그리스의 수학개념에 대한 구체적 체험(embodiment)는 포기하지는 않았다고 본다. 오히려 학교수학은 특히 중등수학 교육은 Piajet의 형식적 조작주의가 강조되어 Lakoff의 표현에 따르면 de-embodiment의 극단인 한편으로 탈컨텍스화된(de-contextualized) 추상과 형식적 조작주의 수학학습이 이루어지고 있다.

그리스의 기하는 Euclides의 "Elements"에서 보듯 자와 컴퍼스를 사용한 신체 활동 체계가 평면기하 아이디어의 ground-metaphor에 기초하고 있다. 그리스 수학의 3대 난문제 1)[정육면체의 배적문제]주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체 만들기 2) 주어진 원과 동일한 면적을 갖는 정사각형 만들기 3) 임의의 각을 3등분하기를 자, 컴퍼스 또는 기타 도형을 그리는 도구의 '작도' 문제로

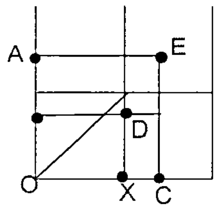
보았다. 계산보다 도구를 사용하는 신체적 체험 활동으로 수학을 다루었다.

Lakoff의 몸과 마음이 외부 세계와 상호작용하는 체험에서 진화하여 온 메타포 의미 체계에서 과연 '수학학습 체험'은 무엇인가?

수학 학습 체험은 크게 '타인과 생각을 주고받는 대화' '도구를 조작하여 무엇을 만들어 내는 체험' '미디어+텍스트 읽기' '타인과 함께 일하기' 등이 있다. 모든 학습은 수많은 물음의 연속이다. 학습 목표에 도달하기 위하여 중간 장애물(문제)들이 나타나고 이들을 (누구에게) 물어가면서 진행 가능한 수준의 답 또는 방법을 얻으면서 진행된다. 여기 주어진 어떤 '지식(a piece of knowledge)'에 학습자가 어떻게 도달할 수 있는가? 학습자가 그 '지식'을 줍거나 잡으러 갈 때 , (누가) (무엇이) (어떻게) 도와 줄 수 있는가? 학교수학 학습에서 교사는 이미 그 '지식'을 주워 가진 사람으로 가정한다. 교사는 어떻게 그 '지식'을 줍거나 잡으러 간 체험을 하였는가?

예를 들어보자. '$\sqrt{2}$ 개념'을 교사는 어떤 체험을 통하여 가지고 있는가? $\sqrt{2}$를 제곱하면 2가되는 수로 단순히 알고 있는가? $\sqrt{2}=1.414\cdots$으로? 아니면 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}$으로 정의된 수 a_n의 극한인가? 즉 $\sqrt{2}$를 어떻게 도달하여 얻은 것이 '$\sqrt{2}$의 개념 또는 지식'을 얻은 것인가? $\sqrt{2}$에 도달하여 $\sqrt{2}$를 얻는 여러 체험이 있다면 어떤 체험이 꼭 필요한 것인가? 다음과 같은 $\sqrt{2}$ 개념 체험의 예를 보자.

자와 컴퍼스를 가지고 자연수, 유리수, 길이, 면적을 탐구하였던 것처럼 정사각형 색종이 또는 원형 색종이를 가지고 수를 체험하고 다루는 메타포를 구성할 수 있다. 색종이를 포개어 접으면 선, 도형의 합동, 이동, 닮음과 비, 그리고 평행선에 대한 메타포를 사용할 수 있다. 변을 반으로 포개어 접으면 주어진 변의 길이의 1/2을 얻는다. 피타고라스의 정리를 수용하면 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 색종이 접기만으로 길이 또는 면적의 크기로서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$에 해당하는 선분이나 도형을 만들 수 있을까? $\frac{1}{2}\times 2=1$ 처럼, 즉 $\sqrt{2}$의 역원을 만들 수 있는가?



색종이를 두 번 접어 4등분된 정사각형의 한 변 즉 OX의 길이를 단위 길이 1로 한다. 작은 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 대각선과 색종이의 옆 변이 겹치게 접어 대각선과 같은 길이를 갖은 점 A와 C를 정한다. 선분 OA를 평행하게 겹치게 반으로 접어 점 B를 얻는다. 선분 OB의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$가 된다. 이 때 직사각형 OBDX 의 면적은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

여기서 우리가 주목할 점은 물건을 몇 개 가져오고 가져가는 체험으로 산수의 ground-metaphor가 구성된 것처럼 대각선, 면적이 반 또는 2배인 정사각형이 구성되는 종이 접기 조작은 무리수 그리고 기하에 대한 metaphor를 형성한다. metaphor와 metaphor를 연관지어 주는 metaphor를 'linking metaphor'라고 부른다. 종이 접기에는 산수와 도형, 공간에 대한 ground-metaphors 과 이들 대상들

그리고 대상 사이의 관계들을 연결하여 주는 풍부한 linking-metaphors를 포함하고 있다.

학교수학에서 $x^2=2$인 수를 단순히 제곱하면 2가되는 수 x로 배우는 것은 부족한 학습이다. 계산적 체험은 Lakoff의 관점에서 신체가 직접 체험하여 생성되는 현상 수준의 체험과는 구별된다. 즉 계산은 신경계의 계산 작용이 갖는 'neural embodiment' 수준의 메타포이다. 물건 1개에 물건 1개와 더하여져 2개를 갖는 체험과 , 계산적으로만 문장 1+1=2을 배우는 것은 수학학습의 관점에서 큰 차이가 있다.

색종이 접기를 통하여 자연수, 유리수와 무리수와의 관계를 접기라는 행동 조작과 그 결과들의 길이 면적, 이동, 합동 등의 메타포로서 체험한다. 색종이 접으면서 만들어지는 평행선, 정사각형, 교점, 점과 점을 잇는 선분은 길이, 면적, 각 등을 만들어 낸다.

Lakoff의 가설은 '*신체적 체험에 관련된 동일한 신경계가 개념 작용에도 중심적인 역할을 한다*'는 것이다. 이 가설은 $\sqrt{2}$를 계산적인 체험으로만 학습한다면 자연수와 무리수와의 관계에 관한 수학적 사고 또는 추론은 계산이 관여한 신경계가 중심역할을 한다. 하지만 색종이 접기를 통한 $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$에 대한 체험은 계산이외의 여러 신경계가 동원된다. 오히려 계산은 부수적이다.

Lakoff&Nunez의 감각-운동 신경계가 작동하는 구체적 체험과 연계된 메타포에서 추상적 수학 아이디어에 대한 수학학습으로의 이행에 대한 흥미로운 관점을 주기에 충분하다. ground 메타포에 기초하여 다른 수준의 메타포로 넘어가는 추상적 인식 과정은 매우 중요하다. 이때는 신경계가 중심이 되어 추상적 개념학습으로 진화 발전한다.

Lakoff의 '메타포'의 중요한 관점은 인간의 기호-언어체계의 형식, 사용 그리고 의미를 이해할 수 있는 틀을 갖는다. 특히 수학학습에서 '수학'을 기호-언어체계의 관점에서 이해하여야 수학학습이 성공하는 경우를 많이 본다. 뿐만 아니라 교실에서 이루어지는 수학학습은 한편의 드라마처럼 교사와 학습자의 대화로 구성된다. 수학적 대상을 지칭하는 단어(어휘), 기호, 수학 심볼, 그림 등을 말하고 쓰며, 지시에 따라 계산을 수행하기도 하고 논의(logical arguments)를 주고받는다. 수학적 의미를 문장으로 구성하고 의미를 전달하고 이해하고 해석하는 행위가 수학수업 속에 모두 있다.

수학학습의 대화, 토론, 토의, 주장-비판-동의-반론 등 수학적 아이디어에 대한 다양한 접근 방식은 수학학습에 내재된 본질적인 성격이다. 수학학습에서 이러한 대화구조 또는 양식에 대한 연구가 최근에 시도되고 있다. 기호-언어학의 '담화(discourse)'에 대한 연구를 수학학습에 적용한 사례들이 나타나고 있다. 수학교실수업에 효과적인 '담화 형식'을 갖춤으로서, 수학수업에서 '수학적 의미-만들기'가 학습자들에게 보다 쉽게 그리고 효과적으로 이루어질 수 있다라는 가설을 증명해 보이는 연구들이다. 기호-언어학과 담화연구에 기초한 수학학습에 대한 연구는 중요할 뿐만 아니라 매우 흥미롭다. 기호-언어학의 관점에서 대화, 토의 담화 구조를 다루는 기초 이론으론 Saussure, Peirce, Lacan, Barthes, Jakobson, Lakoff에서 아이디어를 가져오고 있다. 기호-언어학의 아이디어들을 수학학습에 적용시키는 연구는 Wakerdine, Pimm, Sfard, Ernest, Noss, Presmeg 등이 있다.

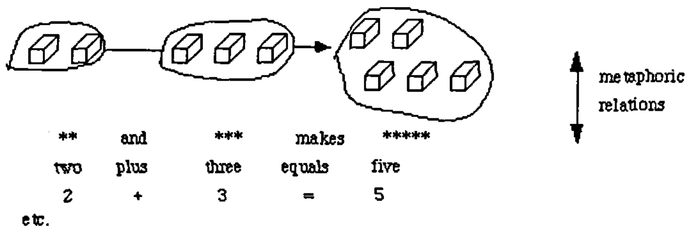
대화는 인간 사고와 인식의 기초이다. 언어, 이야기, 논설 , 강의 또는 담론 등 대화에 기초한 의미 전달 방식은 모든 지식이, 수학 지식을 포함하여, 생성되고, 획득되고, 소통되고, 형식화되고, 그리고 정당화되는 작업에 본질적인 역할을 한다. 대화는 묻고-답하기, 머리를 맞대는 대담, 긍정-부정, 주장-비판-반론 등으로 지식 또는 의미를 만들어 가는 여러 형식의 언어적 사용이 가능하다.

수학은 묻고-답하는 대화에 의한 논리적 전개로 다양하게 이해될 수 있다. 수학학습 특히 수학 교실 수업은 '의미, 의사, 의도가 소통되는 학습자들의 여러 수준의 대화에 의한 전개'라고 볼 수 있다. 수학학습에서 의미를 만들어 가는 대화 전개의 본질과 방식은 어떤 것이며 어떻게 이루어지는가?

Walkerdine , Leonard 등은 Saussure의 기호-언어 체계의 관점에서 metaphor와 mytonym 변환에 주목한다. 문학 수사학의 좁은 관점에서 metaphor를 은유 또는 비유로 mytonym를 환유로 사용하고 있으나 기호-언어학의 관점에서 최근 연구는 의미로 보다 넓은 의미로 사용하고 있다. 본 논문에서 메타포, 미토님으로 사용한다.

Walkerdine은 signifier(기표, 표기)를 구성하는 원소로 문자(written symbols)에서, 발성된 단어(spoken words) , 동작(actions) , 도식(diagrams) 같은 것들로 확장하였다. 각 signifier는 적절한 의미와 연관됨으로서 sign(기호)가 된다.

sign에 대한 의미 이해와 사용에 대하여 Walkerdine은 다양한 의미(ambiguous meanings)의 서로 다른 다양한 signifiers에 관심을 가졌다. 또한 signifier가 부적절한 signified(기의, 표의)와 연관되는 경우에 대하여 관심을 가졌다. 언어학자 Jacobson[1985]은 "metaphor"와 "metonym"을 signs 사이의 두 관계 "paradigmatic"와 "syntagmatic" 대치하는 개념어로 도입하였다. 그 후 Walkerdine[1988]에 서 부터 "metaphor"와 "metonym"이 널리 사용되게 되었다. "metaphor"와 "metonym"는 언어-기호의 생성, 표현 및 의미 해석과 사용에서 서로 보조하는 양극(complmentary polarities or duality)을 이룬다. Walkerdine & Corran[1979]은 수학적 signs의 메타포와 미토님 변화의 예를 수학적 sign 시스템에서 다음과 같이 제시하고 있다.



1) metaphor에 의한 sign의 변화

위 그림에서 추상적 모습의 문장 "2+3=5"라는 sign의 metaphor 관계에 있는 다른 signs의 예를 보여 주고 있다. 여기서 수학적 기호는 단어, 그림, 아이콘 또는 실재 대상으로 대치되어(substituted) 있다.

2)metonym에 의한 sign의 변화

'2+3=5' → ' 3+2=5' → '5 = 2+3' → etc.

metonym 관계에 의한 변화는 기호들이 재배열되어(재배치, 재조합 , rearanged) 있다.

재배열 원리는 언어-문법 또는 통사론의 관점에서 "grammar of arithematic"이고 수학적 배경지식으로 "arithmetic laws"가 재배열 원리로 작용한다.

Lakoff의 메타포이론에서 보면 블록 2개에 블록 3개가 더해지는 그림으로서 sign은 체험 수준에 가까운 메타포이다. 한편 "2+3=5"라는 산술식의 미토님 변화는 몸 안의 신경계를 강화하는 활동이다. Lakoff의 메타포이론은 '블록 그림 표상'과 "2+3=5" 사이의 메타포 전이(transfer of metaphors)가 쉽게 일어나는 그리고 메타포 사이의 의미를 이해할 수 있는 인지적 메카니즘에 관심을 갖는다.

대개의 수학학습에서 메타포 차원의 전이가 미토님의 변화보다 더 중요하다. 연립방정식의 해를 구하는 미토님 변화가 중요할 수 있다. 실세계의 어떤 모델에서 발생한 연립방정식 문제를 이해하고 수식으로 전이가 일어나는 수학학습은 메타포 전이를 목표로 하는 것이다. 학교에서 연립방정식 모델을 다루기보다는 실제 모델에서 나타날 수 있는 가능한 수학식으로서 연립방정식을 다루는 수학학습에 대부분의 학습 시간을 소비한다.

모든 sign에는 metaphor와 metonym 차원의 변화를 갖는다. 마찬가지로 수학학습에 나타나는 모든 sign도 메타포와 미토님 차원의 변화와 전이를 다룬다. 따라서 수학 학습에서 다룰 메타포와 미토님 수준과 소재를 적절히 선택하여야 한다. 수학학습의 기호-언어적 관점에서 교사는 가르치려는 수학적 개념의 적절한 메타포 영역을 선택하고, 선택된 메타포 수준에서 signs을 미토님 차원에 서 다룬다. 따라서 교사는 수학적 개념과 내용을 이해할 수 있는 메타포와 미토님 차원의 적절한 학습 활동들을 설계하고 학습자에 제시하여야 한다. 최종적으로 학습자가 언어-기호의 배열로서 쓰여진 signs을 수학적 의미와 수학 외적 의미와 연결하여 이해하도록 한다.

"2+3=5"는 형태로서 "추상적(abstract)"이고 또는 "추상적 사고(abstract reasoning)" 과정에서 나타난다. 이러한 추상적 표상은 언어-기호학의 관점에서 보면 'metaphor를 버린(discarding metaphor)' 결과이다. sign에서 metaphor가 사라졌을 때 , sign은 metonym 차원의 의미를 만드는 조작 또는 작업을 생각할 수 있다. . 학습자(또는 교사)가 주어진 sign의 metaphor 수준이 추상 수준으로 도달하였을 때, 학습자는 context 안에서 sign(보다 정확히 signifier)의 내적 관계를 탐구하고 이해하려 할 것이다.

metaphor가 개입된 또는 metaphor 차원의 사고는 수학을 "컨텍스트 안에서(in context)" 제시할 때 필연적으로 발생한다. 수학학습에서 인위적으로 그리고 학습을 의도한 컨텍스트를 제공하지 않는다면 메타포 전이는 거의 무시된 형식주의적 수학학습이 된다. 컨텍스트에 관련하여 수학학습에서 "context effect"에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. context effect란 적절한 또는 풍부한 context를 갖는 수학 학습이 추상적 수학 학습보다 '학습 효과가 더 있다'는 가설이다. Walkerdine이 제시한 signs 체계에서 메타포-미토님 차원의 사고 활동은 수학교육에서 context의 관점에서 중요한 보완 관계와 역할을 하는 contextualization-decontextualization 사고 활동에 비교할 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서 '수학적 의미 또는 개념'을 만들고 다루는 중요한 요소로 메타포(유추)를 Lakoff의 신체화된 마음에서 강조하는 체험에서 본 여러 수학 학습의 가능성을 제시하였다. 21세기가 20세기와 다른 점은 다양한 방식의 매체와 학습 방식이 존재한다는 것이다. 수학학습에서 수학적 대상에 이르고 얻는 구체적 체험은 추상화된 수학에 의미를 만들어 주는 중요한 개념 체계이다.

구체적 체험에서 오는 개념 체계로서 메타포를 다루는 '의미 체계' 표상 방식으로서 기호-언어학의 방법을 소개하였다. 수학학습에 적용 가능한 개념 표상의 메타포와 미토님 변환를 소개하였다. 교실 수학학습의 전개에서 담화 구조, protocol 수준과 방식 등은 기호-언어의 의미 수준에서의 이해를 전제로 한다. 본 논문은 기호, 심볼, 그림, 이미지 등이 주로 사용되는 수학언어가 개입되는 수학학습이 왜 의미적으로 어려운지를 간접적으로 제시하였다. 수학학습이 성공하려면 수학언어, 일상언어 그리고 Lakoff의 신체화된 정신, 언어-기호학의 의미론 및 화용론, 인지-담화 이론 등으로 종합적인 접근이 필요하다. 실제 수학학습 상황과 장면에 나타나는 말, 문장, 기호, 그림이 '수학적 의미'라는 주제에 붙들리어 일관된 의미와 논리에 따라 다양하게 변화될 수 있는 학습 모형은 수학학습 연구에서 매우 중요하다.

교사의 교수 전략으로서 잘 선정된 메타포의 힘은 여러 종류의 감각 또는 지각 기능이라는 사고의 본질에서 온다. 이러한 메타포는 동기를 유발하고 상식적 방법을 쉽게 사용하게 하고 학습자의 자신감을 높여준다. 모든 메타포가 이러한 목적에 기여하지는 않는다. 수많은 수학의 응용 사례에서 볼 때, 미토님 차원 보다 메타포 차원의 인지 활동이 보다 힘드는 일이다.

참 고 문 헌

Barthes, R. (1967). *Elements of Semiology,* London: Jonathan Cape.

Chui,M.M.,(1992). *Reinterpreting misconceptions through metaphor and metonymy: Teaching and learning math,* University of California.

Davis,G. & McGowen,M.(2001). *Embodied Objects and the signs of Mathematics, PME25 discussion group "symbolic cognition in advanced mathematics" Utrecht,* The Netherlands: Feudenthal Institute.

Dubinsky,E.(1999). Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images, *Notices of the AMS.* **V46 N5**, pp.555-559

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education,* **25, 2,** pp.116-40.

Gentner, D. Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy. *Cognitive Science,* **7**, pp. 155-170, 1983.

Gentner,D., Bowdle,B., Wolff,P., & Boronat,.C.(2001). *Metaphor is like analogy.* In Gentner,D., Holyoak,K.J.,& Kokinov,B.N.(Eds), The analogical mind: Perspectives from cognitive science, pp1999-253, Cambridge MA,MIT Press

Gick, M. Holyoak, K.(1980). Analogical Problem Solving, *Cognitive Psychology*, **12**, pp. 306-355,

Gick, M. Holyoak, K.(1983). Schema induction and Analogical Transfer, *Cognitive Psychology*, **15**, pp. 1-38.

Holyoak K. J. Novick L. Melz E.(1994). *Component processes in Analogical Transfer: Mapping, Patterncompletion and Adaptation in Analogy, Metaphor and Reminding*, Eds. Barnden and Holyoak, Ablex, Norwood, NY.

Jakobson, R. & Halle, M. (1956). *Fundamentals of Language*, The Hague: Mouton.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By. Chicago*: University of Chicago Press.

Lakoff,G(1992). *The contemporary Theory of Metaphor*, In Ortony,A(Eds), Metaphor and Thought(2nd edition),Cambridge University Press

Lakoff, G. & Nunez, R. E. (1996). *The Metaphorical Structure of Mathematics. I*n L. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Polya, G. *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method*, Second Edition. Princeton: Princeton University Press, 1957.

Pimm, D. (1990). Certain Metonymic Aspects of Mathematical Discourse. *Proceedings of PME 14 (Mexico)*, **3**, pp.129-136.

Saussure, F. de (1959) *Course in General Linguistics*, London: Peter Owen. [Translated from "Cours de linguistique generale", (1916)]

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor, *For the Learning of Mathematics*, **14**, **1**, pp. 4-55.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*, Massachusetts, IL: MIT Press.

Walkerdine, V. (1982). *From context to text: a psychosemiotic approach to abstract thought.* In Beveridge, M. (Ed.), *Children thinking through language*, London: Edward Arnold.

Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason*, London: Routledge.