韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 137-155.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 137-155.

# 고등학교 확률과 통계영역에서 현실적 수학교육의 적용을 위한 문맥 연구

김 원 경 (한국교원대학교)
백 경 호 (분당중앙고등학교)

현실적 수학교육은 탐구학습, 열린학습 등을 통해 수학적 사고력, 문제해결력을 신장하려는 최근의 수학교육의 방향에 걸맞는 새로운 교수·학습 방법의 하나로 주목받고 있다.
이에 따라 본 연구에서는 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용하기 위한 문맥을 개발하였다. 이 문맥들은 수학사, 자연 및 사회 현상, 실생활의 상황, 타 교과에서의 활용 상황 등 다양한 분야에서 고등학교 2~2학년 수준에 알맞게 개발되었다.

## I. 서 론

21세기 지식·정보화 기반사회는 정보통신기술의 급속한 발달에 따라 세계가 하나의 '열린 망'을 기반으로 지식과 정보, 물류와 자금, 인적자원이 자유롭게 이동할 수 있는 사회이다. 이와 같은 사회에서 개인 및 국가 경쟁력은 고도의 정보처리능력에 기초한 새로운 지적 부가가치의 생산능력에 의해 결정된다. 지식·정보화 기반사회는 새롭게 형성되고 있는 인류의 생태계이다. 이러한 생태계에서는 먹이사슬이라는 냉엄한 현실이 존재하고, 이 먹이사슬에서 경쟁우위를 확보하고 생존하기 위해서는 먼저 우리나라 교육의 목표가 산업사회 인재양성 모형에서 지식기반사회 인재양성 모형으로 탈바꿈해야 한다. 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창출할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재의 육성이 필요하다.

그러나 우리나라의 수학교육은 아직까지도 전통적인 주입식 교육으로 단편적인 지식의 습득과 문제 풀이 기능 숙달에 치중하고 있고, 그 결과 학생들은 수학에 흥미를 느끼지 못하고 있을 뿐만 아니라 자신감도 결여되어있다. 이를 극복하기 위해서는 학생들 스스로 탐구, 관찰, 조직, 분석하는 활동을 통해 문제를 해결하고, 수학적 원리와 법칙을 이끌어 낼 수 있는 능력을 길러줘야 한다.

학교 수학이 이와 같은 측면을 강조하여 이루어져야 한다고 주장했던 사람 중의 하나가 네덜란드의 수학자 Freudenthal이다. 그는 수학을 인간의 활동이라는 관점에서 보고 '안내된 재발명'을 통해서 점진적인 '수학화'에 이르도록 해야 한다고 주장하였다. 여기서 '안내된 재발명'이란 교사의 적절한 안내를 받아 수학의 발생 과정을 되짚어 보는 경험을 통해서 학습자 스스로가 나름대로 재구성하는 것을 말하고, '수학화'란 현실 상황에 포함되어 있는 여러 가지 수학적인 요소를 탐구, 유추, 형식화, 모델링 등의 활동으로 수학적으로 세련되게 조직해 나가는 과정을 말한다.

Freudenthal의 생각을 실천에 옮긴 것이 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education : RME)이다. 네델란드에서는 1970년대 초부터 현실적 수학교육에 기초한 초등 수학교육과정을 개발하고 그에 따른 초등학교 수학교과서를 만들었고, 1985년에는 고등학교 수학교육과정, 1993년에는 중학교 수학교육과정을 새롭게 도입하였다. 이들 교육과정의 가장 큰 특징은 수학의 실제적 응용이다. 현실 상황에 관한 문맥, 즉 어떤 구체적인 수업과정에서 학생들에게 열려있는 수학화 되어야 할 현실세계의 상황을 탐구하여 수학적 개념을 추출하고, 추상화 및 형식화 과정을 통하여 다시 현실 세계로 피드백 하는 사이클이 그 교육과정의 핵심이라고 할 수 있다.

따라서 현실적 수학교육에서 가장 중요한 것은 수학화의 근원이자 응용의 근원으로 삼고 있는 현실 상황에 관한 문맥을 찾아내는 것이다. 실생활의 상황에서뿐만 아니라 자연과학, 사회과학, 공학, 의학, 경영·경제학 등 여타 학문에서 활용되는 상황, 그리고 수학적 원리와 법칙이 발명된 역사적 상황 등 다양한 문맥 상황을 경험함으로써 학생들은 문제 속 변인 사이의 관계를 이해하고, 수학적 모델을 만들어 내며 자기 나름의 비형식적 수학 구성에서 이른바 형식적 수학으로 나아 갈 수 있기 때문이다(Streefland, 1990).

현실적 수학교육의 실제 교수·학습자료의 예로는 초등학교 1~3학년 학생들을 위한 Fruedenthal(1976)의 '수중나라'와 초등학교 6학년 학생들을 위한 Treffers(1987)의 '걸리버 여행기'를 들 수 있다. 이 자료들은 공간에서의 도형 탐구와 측정에 관한 것으로 우리가 살고 있는 공간에서 여러 가지 수학적 개념을 통합적으로 다루기 때문에 도형과 측정에 관한 직관적 개념을 형성하여 수학화 활동하기에 적합하다. 그러나 이와 같은 교수·학습자료를 우리나라의 학교 수업에서 그대로 적용하기에는 교육과정의 차이, 문화적 차이 등으로 어려움이 있다.

정영옥(1999)은 현실적 수학교육의 학습과정의 한 예로 초등학교 사칙연산 과정에서 버스 문맥, 목동 문맥 등을 통하여 표준 알고리듬으로의 수학화의 과정, 교수학적 현상학, 수준 이론 등이 어떻게 구현되는지를 연구하였다.

김용성(2000)은 수학의 발생 상황, 사회적 상황, 타 교과서의 활용 상황, 실세계의 상황 등에서 초등학교 5학년용 문맥을 개발하고 수학화 경험을 하게 한 결과 학생들의 수학적 신념과 문제해결력에 긍정적 효과가 있음을 밝혔다.

이승희(2002)는 Freudenthal의 수학화 활동을 위한 교수·학습자료를 중학교 기하영역에서 개발하였고, 김수경(2002)은 함수영역에서 개발하였다.

권오남·신경희·신은주·김영신·최효진(2002)은 현실적 수학교육의 이론적 틀을 대학교 미분방정식에 적용하여 대학교 수학 교수·학습에서의 새로운 방향을 모색하였다.

그러나 아직까지 초·중등 학교의 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용한 사례는 없다. Freudenthal(1973)은 "확률은 실제 상황을 묘사, 분석하고 예측하는 강력한 도구인 동시에 물리적인 세계의 여러 가지 현상이 어떻게 수학화 되고 또한 수학이 실세계에 어떻게 적용되는지를 가장 잘 보여주는 과목"이라고 하였고, Fischbein(1975)은 "확률과 통계는 경영, 경제, 의학, 기상학, 정치학,

행동과학 등 여타 학문의 연구에 필수적인 도구일 뿐만 아니라 불확실성으로 가득 찬 실세계에서 사회 현상과 정보를 분석하고 예측하는 도구로서 수학의 두 가지 측면인 이론과 실제를 가장 잘 나타내주는 과목"이라고 하였다.

위의 두 학자의 견해로부터 확률과 통계는 현실적 수학교육의 이론 틀을 적용하기에 매우 적합한 영역이라고 할 수 있다. 이에 따라 본 연구에서는 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용해 보기 위해서 먼저 안내된 재발명을 통해서 점진적인 수학화를 이룰 수 있는 문맥을 수학사, 자연 및 사회 현상, 실생활의 상황, 타 교과에서의 활용 상황 등에서 개발하고자 한다.

## Ⅱ. 현실적 수학교육(RME)

### 1. 현실적 수학교육의 배경

20세기에 들어서면서 수학교육은 전반기에 생활 단원 중심 교육, 1960년대에는 현대화 운동, 1970년대는 Back to basic 운동, 이 운동의 반대운동으로 1970년대 말에 새수학 운동이 일어났다. '새수학'은 지식의 추상적 구조, 연역적 전개를 강조하고 또한 엄밀성을 강조하였으며 수학의 언어와 기호의 정확한 사용을 요구하였으므로 현실과는 거리가 먼 의미 없는 수학이었다. 뿐만 아니라 '새수학'은 현대 추상 수학의 학교 수학화를 지향하였으므로 수학의 응용적 측면을 경시하고 순수 수학적 측면을 강조하였다. 그러나 네덜란드에서는 '새수학'에 대한 반발로 초등학교 교사들이 'Wiscobas'라는 단체를 조직화하였고 이 단체는 중등학교 교사들과 더불어 새수학 교과서를 학교에서 몰아내고 수학교육개발국립연구소(IOWO)를 설립하였다. IOWO는 Freudenthal을 지지하면서 교육과정 개발, 전·현직 교사교육, 교육연구, 학교에서의 피드백 등을 통합하는 폭넓은 개혁에 초점을 맞추었다(Gravemeijer, 1994, 정영옥(2000) 재인용). IOWO는 '인간활동으로서의 수학'이라는 Freudenthal의 이론을 그 출발점으로 하여 1980년에 OW&OC(Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center)로 명칭이 바뀌었고 1992년에는 IOWO의 설립자인 Freudenthal의 뜻을 기려 ' Freudenthal 연구소'로 바뀌었다. 이들이 수십년 동안 연구해 온 수학교육의 한 사조를 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education)이라고 한다.

현실적인 수학교육(RME)이라는 명칭은 Treffers가 1970년대에 네덜란드의 수학교육에 영향을 미친 네 가지 주류를 수학화와 관련지어 분류한데서 유래한다.(이승희, 2002)

첫째, 기계론적인 수학교육은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 모두 간과하여 형식적인 체제의 조작에 대한 통찰력을 사용하지 않고 수 사실과 활동의 자동화와 암축적인 암기만을 강조한다. 둘째, 경험주의적 수학교육은 수평적 수학화만을 강조하여 형식적인 수학의 목표에는 관심을 갖지 않는다. 셋째, 구조주의적인 수학교육은 수직적 수학화만을 강조하여 수학체제 내에서의 조작을 수학적 활동의 주된 부분으로 여긴다. 넷째, 현실적인 수학교육에서는 수평적 수학화와 수직적 수학화를 모두 중시하며 수학적 개념과 구조가 나타나는 현상이 출처가 되고 응용의 영역으로 사용된다.

이처럼 현실적인 수학교육은 Treffers가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통하여 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른데 기인한다. 어떻게 보면 현실적인 수학교육은 수평적 수학화 만을 중시하는 수학교육으로 이해하기 쉬우나 Freudenthal(1991)도 지적하였듯이 수평적 수학화와 수직적 수학화라고 표현하는 것 사이의 경계는 잘 정의되지 않으며 중요한 것은 '현실'이라는 것이 무엇을 의미하는가 하는 것이다. Freudenthal(1991)은 "나는 '현실'이라는 용어를 어떤 상식의 단계에서 실제적으로 경험되는 것에 적용하고자 한다."라고 말하며 그에게 있어 현실은 감각적 경험과 해석의 혼합물로 이해된다.

Van den Brink(1991)는 '현실적'이란 "아동들이 그 상황을 상상하고 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다."는 의미임을 주장한다. '상상하다'의 네덜란드어 번역은 'Zich realisieren'이다.(Van den Panhuizen-Heuvel, 1998, 정영옥(2000), 재인용) 따라서 네덜란드의 수학교육 개혁이 '현실적'이라고 불리는 이유는 현실세계와의 연결성뿐만 아니라 학생들의 마음속에 무엇인가 그려내거나 상상할 수 있는 문제 상황들을 제시하는 것과 관련이 있기 때문이다. 다시 말하면 현실적이란 단순히 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 넓은 세계로 학생들이 체험하고 감정이입이 되며 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미한다. 그러한 상황에서 수학적인 세계로 들어서는 것이 수평적 수학화이고, 수학적인 세계에서 좀 더 추상적인 수학의 세계로 전진하는 것이 수직적 수학화이다. 현실적 수학교육에서 수학은 하나의 과정이고 인간활동으로 중요한 것은 학생의 현실세계에서 시작한다는 것뿐 아니라 수업상황 자체가 학생의 체험의 일부, 즉 현실화 되도록 하는 것이다. 그러므로 모든 수업에서 현실의 세계와 수학의 세계가 교대되도록 하는 것이 중요하다.

### 2. 현실적 수학교육에서 수학화와 수학화 활동의 의미

수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때 수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며 수학화 과정은 이런 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준이 상승되는 불연속과정이다(정영옥, 1997). 여기서 현상이란 현실적인 경험일 수도 있고 수학적인 경험일 수도 있으며 수학화란 좀 더 구체적으로 수학자들이 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화시켜 나가는 것을 의미한다. 예를 들어 공간의 여러 가지 형상을 도형으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이고, 여러 가지 법칙에 따르는 자연계의 양의 변화 관계를 함수로 파악하는 것은 현실세계를 수학화하는 것이며, 기하를 대수적 방법으로 다루는 것은 기하를 대수화하는 수학화이고, 지렛대의 법칙이나 무게중심의 법칙을 대수화 하는 것, 미시적인 경제 현상이나 파동, 전파와 같은 물리현상을 수학적으로 해석하는 것 등은 모두 수학화이다. Gravemeijer(1994)에 따르면 수학화란 말 그대로 좀 더 수학적인 것 즉, 수학의 일반성, 확실성, 정확성과 간결성을 지닌 것이 되게 하는 것이라고 한다. De Lange 와 Verhage(1987)는 수학화는 조직화,

구조화 활동이고 그에 따라 획득된 지식과 기능은 미지의 규칙들과 관계 구조들을 발견하는데 사용한다고 말한다. Treffers(1987)는 현실내의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정과 좀더 세련된 높은 수준의 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정을 구분하기 위해서 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분하였다. 수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납 추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학적으로 향하는 것을 말하고 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후의 수학화 과정 즉, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것을 말한다. Freudenthal(1971)은 수학화란 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며 현실상황이든 수학적 상황이든 현상 가운데서 그 정리수단인 본질을 찾는 활동이라고 말하며 수평적 수학화를 현실적인 것으로 체험된 세계에서 좀 더 추상화된 기호의 세계로 이행되는 것으로, 수직적 수학화를 추상화된 기호의 세계에서 기호들이 계속 형성되고, 이해되고 반성되는 것으로 구분하고 있다. 그러나 그는 두 수학화 사이에는 근본적인 차이가 있지 않는다고 생각해 교육이 일상적인 제재로 시작할 수 있다고 보았다. 따라서 수학교육이 학생들에게 처음부터 형식적인 수학을 제시할 것이 아니라 학생들로 하여금 수학적인 내용을 재발명하게 함으로써 수학적 내용의 필요성을 인식하게 하면서 점진적으로 형식화하게 하고 수학과 현실을 밀접하게 관련지음으로써 수학의 유용성을 체험하게 하며 수학화 활동을 통해 형식적 수학의 의미를 더욱 더 잘 이해할 것이라고 강조하였다.

특히 Freudenthal은 수학화가 수학교육에서 중요한 과정인 이유로 두 가지를 들고 있다(이승희, 2002). 첫째, 수학화는 수학자의 주된 활동일 뿐 아니라 학생들이 일상생활 상황에 대한 수학적 접근에 친숙하도록 한다. 이것은 수학적 태도를 의미하고 수학적 접근이 적절할 때와 적절하지 않을 때를 알고 수학적 접근의 가능성과 한계를 아는 것을 포함하는 문제를 찾는 수학적 활동이다. 둘째, 재발명의 아이디어와 관련된다. 수학에서 마지막 단계는 공리화의 방법으로 형식화된다.

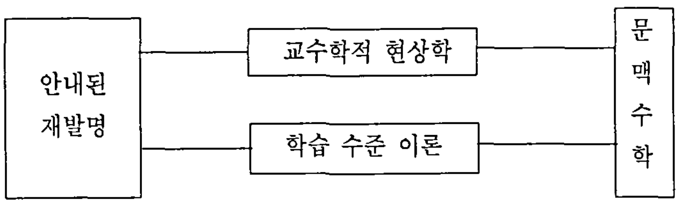
수학화 과정은 현실을 수학화하는 것을 출발점으로 해서 수학 자체의 수학화로 이어지며 이는 처음에는 국소적으로 나중에는 전반적으로 진행된다. 즉, 수학화 과정은 현실의 어떤 상황에서 드러나는 수학적인 요소들을 찾아내는 것으로부터 시작해서 그것을 수학적으로 세련시켜 가는 과정이며, 그런 과정 속에서 현상과 본질의 교대가 계속 반복되면서 조직화되는 과정인데 이 과정은 한 영역에서 국소적인 조직화일 수도 있고 전반적인 조직화일 수도 있다. 따라서 수학화 활동은 현실 내의 풍부한 문맥 내에서 이상화와 단순화 과정을 통해서 비본질적인 것을 제거하고 그 문맥 내의 본질을 이해하는 활동으로 볼 수 있는데 문맥 내의 본질을 이해한다는 것은 여러 가지 상황, 문제, 절차, 도식, 법칙, 알고리듬, 구조, 공식, 기호체계, 공리체계 등과 같이 현실속의 상황이든 이미 수학적으로 조직화된 상황이든 그것들 사이에서 본질을 파악해 나가는 활동을 의미한다.

수학화 활동 중에 학교 수학에서 경험될 수 있는 수학화의 기본적인 활동으로 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화하기, 단축화와 점진적인 도식화, 형식화, 알고리듬화, 국소적 조직화 등을 들 수 있다(정영옥, 1997).

### 3. 현실적 수학교육의 학습-지도 원리

Freudenthal은 교사의 적절한 안내에 의해 학습자로 하여금 선조들이 이미 발명한 수학을 조직해야 할 현상으로부터 출발해서 한 단계 한 단계씩 점진적으로 수준의 비약을 거쳐 재발명해 가도록 하는 수학화 경험을 강조하였다.

이와 같은 점에서 Freudenthal은 점진적인 수학화를 안내하는 수학화 학습지도 원리(<그림Ⅱ-1> 참조)로 안내된 재발명, 교수학적 현상학, 학습 수준 이론을 제시하고 있다. 교사의 안내에 의해서 학생들이 수학화 과정을 밟을 때, 거시적인 하나의 틀을 제공해 주는 것이 학습 수준 이론이며 점진적인 수준의 이행을 위한 여러 가지 현상들을 제공해 주고자 하는 것이 교수학적 현상학이며 이러한 수업원리를 실제 수업 장면에서 구현하는 방법으로 풍부한 의미의 문맥을 제공하여 발명을 안내하는 것이 안내된 재발명이다.




<그림 Ⅱ-1> 수학화 학습 지도 원리

## Ⅲ. 확률과 통계 영역에서의 문맥

현실적 수학교육은 안내된 재발명, 점진적 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 기본원리로 삼고 있다. 안내된 재발명은 수학이 발명된 과정과 유사한 과정을 경험하여 학습자 스스로가 직관적 관념, 비형식적 지식 등으로 재조직하는 것을 말하고, 수학화란 현실 문맥에 포함되어 있는 수학적인 요소를 형식화, 일반화하여 세련되게 조직해 나가는 과정을 말한다. 이와 같은 수학화 과정은 수준 상승을 초래할 수 있는데, 이 때 수준의 비약이 가능하도록 교수학적 조치를 취하면서 점진적으로 안내해야 한다는 것이다.

현실적 수학교육에서 교수·학습의 첫 번째 단계는 구체적인 문맥으로부터 시작한다. 따라서 본 연구에서는 문맥의 구성 방향을 설정하여 이에 적합한 문맥을 개발하고자 한다. 개발된 문맥들은 현실적 수학교육 이론 틀에 적용하여 고등학교 학생들에게 교수·학습 자료로서 활용될 수 있고, 그에 따라 학생들의 수학화 활동의 활성화와 학업성취 수준의 향상을 기대할 수 있다.

## 1. 문맥의 구성 방향

고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용하기 위한 문맥의 구성 방향은 다음과 같이 설정하였다.

1) 확률과 통계의 개념이 완성된 지식체계로서가 아니라 실세계의 다양한 상황으로부터 발견과 구성, 조직화로 형성되어갈 수 있도록 구성한다.
2) 17세기 이후 수학자들이 생각했던 확률과 통계의 아이디어로부터 학습자들이 나름대로 수학적 원리, 법칙 등을 끌어 낼 수 있는 유사한 문맥상황을 구성한다.
3) 확률과 통계 역사와 관련된 문맥(득점문제, 주사위문제 등), 현실 세계 상황에서의 문맥(몬티홀 딜레마, 지참금 등과 같은 문맥), 타 교과에서의 활용 문맥(색각이상자와 같은 문맥), 카지노 게임등의 게임동산 문맥, 실생활에서의 통계동산 등의 문맥을 통하여 확률과 통계 개념의 수학화를 경험할 수 있도록 상황을 구성한다.
4) 학습자 스스로가 모둠 활동 또는 사고 활동에 대한 반성적 사고를 통해 수준 상승이 이루어지도록 구성한다.

## 2. 문맥 개발

고등학교 확률과 통계 영역에서 개발 가능한 문맥을 관련된 확률과 통계의 개념과 더불어 제시하면 다음과 같다.

A. 확률과 통계의 역사 관련 문맥

- 가. 득점 문제 : 수학적 확률과 확률의 덧셈정리
- 나. 주사위 문제 : 여사건의 확률
- 다. Huygens의 다섯 문제 : 확률의 성질
- 라. Graunt의 생명표 : 통계적 확률
- 마. De Moivre의 이항분포의 정규 근사 : 이항분포의 정규 근사

B. 현실 세계의 상황 문맥

- 가. 몬티홀 딜레마(Monty Hall Dilemma), 카드뽑기 활동 : 수학적 확률
- 나. 병원의 규모문제, 지참금문제, 로또 확률문제 : 수학적 확률
- 다. 딱지 뽑기 활동 : 통계적 확률
- 라. 포커게임, 페니실린문제, 빵소니택시문제 : 조건부확률
- 마. 주차 위반 판결문제, 방사능 자동탐지기문제, 전자 회로 문제 : 사건의 독립과 종속
- 바. 탁구공 추출문제, 농구 챔피언 승률문제 : 이산확률분포와 확률질량함수
- 사. 주머니 속공의 추출문제 : 독립시행의 확률
- 아. 과자 봉지 속의 딱지 모으기 : 확률분포의 평균
- 자. 수능에서의 변환표준점수, 지능검사문제, 수시모집문제,
  생산직 근로자의 월급 문제 : 정규분포와 표준화

차. 제과점 하루평균 수익문제, 복권문제, 미로문제 : 이산확률변수의 기대값
카. 게임동산 : 수학적확률, 조건부확률, 확률분포의 평균
타. 자바 애플릿 이용 : 이항분포의 정규 근사
파. 학생 키의 조사활동 : 연속확률변수와 정규분포
하. 통계동산 : 기술통계, 이항분포와 정규분포, 모집단과 표본, 모평균의 추정

C. 타 교과에서의 활용 문맥
가. Galton의 완두콩 교배 : 통계적 확률
나. 색각이상자 문제, 유전자 문제 : 이항분포
다. RNA, DNA 문제 : 확률의 덧셈정리 및 조건부 확률
라. 건강한 사람의 포타슘치 문제 : 정규분포와 확률

위에서 제시한 문맥을 현실적 수학교육의 이론 틀에 따라 문맥 내용, 교사의 안내 과정, 수학화 과정의 단계로 예시하면 다음과 같다. 예시되지 않은 문맥은 백경호(2004)에 실려 있다.

**(1) 득점 문제(Problem of points)**

약 1500년 전부터 이탈리아 수학자들은 다음과 같은 득점문제에서의 공평한 상금 배분 문제를 풀기 위해 노력해왔다.

「실력이 같은 A, B 두 사람이 같은 액수의 판돈을 내고 내기를 한다. 한 번 이기면 1점씩 득점하는데 먼저 $s$점을 이기는 사람이 판돈을 모두 갖는 것으로 하였다. 그런데 불가피한 이유로 A가 $s_1$점, B가 $s_2$점(단, $s_1 > s_2$)을 이긴 상태에서 게임을 중단할 수밖에 없었다. A와 B의 판돈은 어떻게 배분해야 공평한가?」

득점문제가 인쇄 형태로 처음 발견된 것은 1494년 이탈리아의 수학자 파치올리(Pacioli)에 의해서였다. 그는 $s=6$, $s_1=5$, $s_2=2$ 인 득점문제를 풀었으나 판돈을 $s_1$: $s_2$으로 배분해야 한다고 잘못 풀었다. 그 후 카르다노(Cardano)가 1539년에 귀납적 추론으로 이 문제를 풀었다고 한다(Hald, 1990). 득점문제에서 $s=3$, $s_1=2$, $s_2=1$인 경우를 문맥으로 개발하면 다음과 같다.

<문맥>

실력이 같은 A, B 두 사람이 1000원씩을 걸고 내기를 했는데, 한 번 이기면 1점을 얻는 것으로 하고 먼저 3점을 얻는 사람이 2000원 모두를 갖기로 하였다. 이 내기에서 A가 먼저 2점을 얻고, B가 1점을 얻은 상태에서 불가피하게 게임을 중단할 수밖에 없게 되었다. 이 때, 이 게임을 무효로 하자니 먼저 2점을 딴 A가 억울해 하고, B가 앞일은 모르는 것인데 어떻게 A가 꼭 이긴다고 할 수 있느냐며 항의를 해 도무지 어떻게 판돈을 배분할지 난감하다. 여러분이 이와 같은 상황에서 재판을 맡아 공정하게 판결을 내린다면 어떻게 배분하겠는가?

<교사의 안내>

게임이 계속된다고 가정하자. 만일 4번째 게임에서 A가 이긴다면 A는 3점을 얻게되므로 A가 2000원 모두 가져야 한다. 만일 B가 이긴다면 A가 2점, B가 2점을 얻은 것이 되므로 두 사람이 각각 1000원씩 나누어 가지면 된다. 결과적으로 A는 이기든 지든 상관없이 1000원을 갖는다. 그 다음 게임에서 A가 이길 확률과 B가 이길 확률은 반반이므로 남은 1000원을 두 사람이 똑같이 500원씩 나누어 가지면 된다. 이 때, A와 B가 각각 얼마씩 가져야 공정한지를 안내한다.

<수학화 과정>

두 사람의 실력이 비슷하다고 하였으므로 한 번의 게임에서 A가 이길 확률과 B가 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이다. 먼저 A가 이 게임에서 이기는 경우는 다음의 두 가지이다.

① 바로 다음 게임에서 이기는 경우

② 다음 게임에서 지고 그 다음 게임에서 이기는 경우

이 때, ①의 경우의 확률은 $\frac{1}{2}$, ②의 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이므로 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 이다. 또, B가 이기는 경우는 연속으로 두 점을 얻어야 하므로 B가 이길 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다. 따라서 총 2000원을 A: $2000\times\frac{3}{4}=1500$(원), B: $2000\times\frac{1}{4}=500$(원)으로 분배하는 것이 공정하다.

<수직적 수학화 과정>

득점문제에서 $s=5$ $s_1=3$, $s_2=2$인 경우를 위의 수학화 과정을 확장하여 풀어라.

**(2) 주사위 문제**

확률은 파스칼(Pascal)과 페르마(Fermat)가 1654년 7월부터 10월까지 7번의 서신을 왕래한 것이 기원이 되었다고 전해진다. 그 당시에는 학회 활동이 없었으므로 새로운 이론은 학자간에 서신 왕래하여 알리는 것이 풍습이었다. 그 당시의 도박사이었던 드 메레(de Mere)는 다음과 같은 주사위 문제를 서신을 통해 Pascal에게 물었다.

「한 개의 주사위를 4번 던져서 적어도 한 번 이상 6의 눈이 나오면 물주가 이기고, 6의 눈이 한 번도 나오지 않으면 도박사가 이기는 게임이 있다. 이 게임은 승률은 671 : 625 (0.518)로 물주에게 유리하였다고 한다.

따라서 도박사들은 게임 방식을 바꾸기로 하였다. 두 개의 주사위 24번을 던져서 적어도 (6, 6) 눈이 한 번 이상 나오면 물주가 이기고, 한 번도 나오지 않으면 도박사가 이긴다고 하자. 이 게임은 앞의 게임의 결과와는 달리 승률이 4 : 6으로 도박사들에게 유리하다. 왜 그런가? 」

드 메레(de Mere)로부터 질문 받은 파스칼(Pascal)은 이 주사위게임을 해결하기에 충분한 시간이 없다며 페르마(Fermat)에게 이 문제의 해결책을 쉽게 찾을 수 있을 것이라고 서신을 보냈다. 한편, 이 주사위 문제를 해결하기 위해 카르다노(Cardano)도 매달렸지만 실패하였다고 전해진다.

<문맥>

한 개의 주사위를 여러 번 던져 적어도 한 번 이상 6의 눈이 나오면 갑이 이기고 그렇지 않으면 을이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번을 던져야 유리한가? 또, 두 개의 주사위를 여러 번 던져 적어도 한 번 이상 (6, 6)의 눈이 나오면 갑이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번을 던져야 유리한가?

<교사의 안내>

(a) 한 개의 주사위를 1번, 2번, 3번, … 던졌을 때, 갑이 이길 확률을 구해보도록 한다. 한 개의 주사위를 1번 던지면 6의 눈이 1번 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 따라서 갑이 불리하다.

한 개의 주사위를 2번 던지면, 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 2번 모두 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^2=0.305$이다. 따라서 갑이 불리하다.

한 개의 주사위를 3번 던지면, 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 3번 모두 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^3=0.421$이다. 따라서 갑이 불리하다.

한 개의 주사위를 4번 던지면 갑에게 유리한지, 아니면 불리한지를 추론해 보도록 한다.

(b) 드 메레(de Mere)는 한 개의 주사위를 던질 때 6의 눈이 나올 가능성은 $\frac{1}{6}$이고, 두 개의 주사위를 던질 때, (6, 6)의 눈이 나올 가능성은 $\frac{1}{36}$이므로 한 개의 주사위를 4번 던졌을 때 유리하면 두 개의 주사위를 던졌을 때에는 $4\times6=24$ 번 던지면 유리 할 것으로 생각하였다. 그러나 실제로는 그렇지가 않다는 것을 오랜 경험을 통해 알게 되었다. 그 이유를 살펴보자.

(a)에서와 같은 방법으로 생각하면 두 개의 주사위를 24번 던질 때 적어도 한번 이상 (6, 6)의 눈이 나올 확률은 한번도 (6, 6)의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률을 이용하여 구할 수 있다. 이 때, 이 확률 값이 얼마 이상이면 갑이 유리한지를 안내한다.

<수학화 과정>

(a) 한 개의 주사위를 n번 던질 때 적어도 1번 이상 6의 눈이 나올 확률은 1번도 6의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{5}{6})^n$이다. 이 확률이 0.5보다 클 n의 최소값은 $n=4$이다. 따라서 $n\geq4$이면 갑이 유리하다.

(b) 두 개의 주사위를 n번 던질 때 적어도 한번 이상 (6, 6)의 눈이 나올 확률은 한번도 (6, 6)의 눈이 나오지 않는 경우의 여사건의 확률이므로 갑이 이길 확률은 $1-(\frac{35}{36})^n$이다. 이 확률이 0.5보다 클 $n$의 최소값은 $n$=25이다. 따라서 $n \geq 25$이면 갑이 유리하다.

<수직적 수학화 과정>
성공의 확률이 $p$인 어떤 시행을 계속 한다고 하자. 이 시행에서 적어도 한 번 이상 성공이 나오면 갑이 이기고 그렇지 않으면 을이 이긴다고 할 때, 갑은 몇 번의 시행을 해야 유리한가?

**(3) 몬티홀 딜레마(Monty Hall Dilemma)**

<문맥>
몬티홀 딜레마는 미국의 TV 게임 쇼인 'Let's make a deal'이라는 프로그램에서 방영된 게임으로 그 쇼의 사회자인 Monty Hall의 이름에서 유래된 것이다. 이 TV 방송 프로그램에서 사회자는 출연자에게 세 개의 문중에서 한 개의 문을 선택 할 기회를 주고, 상품이 있는 문을 선택하면 그 상품을 주는 게임을 한다. 이 때 세 개의 문중에는 한 개의 문 뒤에만 상품이 있고, 출연자가 한 개의 문을 선택하면 사회자는 출연자가 선택한 문 이외의 상품이 없는 문을 열어 보여 주면서 선택한 문을 바꿀 기회를 준다. 출연자가 문을 바꾸는 것이 상품을 타는데 유리하겠는가? 아니면 불리하겠는가?

<교사의 안내>
3개의 문을 각각 A, B, C라고 할 때 상품이 있는 경우가 오른쪽과 같음을 안내하고 학생들로 하여금 각각의 경우의 확률을 구해보게 한다. (단, O는 상품이 있는 경우, ×는 상품이 없는 경우를 나타낸다)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 경우 1 | O | × | × |
| 경우 2 | × | O | × |
| 경우 3 | × | × | O |

<수학화 과정>
(i) 출연자가 문을 바꾸지 않으면 상품을 탈 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
(ii) 출연자가 A문을 선택한 다음 바꾸는 경우는 다음과 같다.
경우 1: 사회자는 B문 또는 C문을 보여줄 것이고 이때 문을 바꾸면 상품을 탈 수 없다.
경우 2: 사회자는 C문을 보여 줄 것이고 이 때 문을 바꾸면 상품을 탈 수 있다.
경우 3: 사회자는 B문을 보여 줄 것이고 이 때 문을 바꾸면 상품을 탈 수 있다.

위의 3가지 중에서 상품을 탈 수 있는 경우는 2가지이므로 문을 바꾸면 상품을 탈 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 출연자가 B문, C문을 선택한 다음 문을 바꾸는 경우에도 확률은 같으므로 문을 바꾸는 것이 상품을 타는데 유리하다.

<수직적 수학화 과정>

위에서 문이 4개 있고, 이 중에서 한 개의 문 뒤에만 상품이 있을 때, 문을 바꾸면 상품을 탈 확률은 얼마인가?

### (4) 뺑소니 택시 문제

<문맥>

A 도시에서 한 밤중에 택시가 교통사고를 내고 뺑소니 친 사건이 발생하였다. A 도시에서 운행되는 택시는 노란색 택시가 70%, 녹색 택시가 30% 라고 한다. 어느 목격자는 그 날밤 사고를 내고 뺑소니 친 택시가 녹색이라고 진술하였다. 그러나 그 목격자는 색각이상자이어서 한 밤중에 택시의 색깔을 바르게 맞출 확률이 80%이라고 한다. 그날 밤 교통사고를 내고 뺑소니 친 택시가 목격자의 진술대로 녹색일 확률을 구하여라(단, 뺑소니 택시는 A도시에서 운행되는 택시라고 한다.).

<수학화 과정>

사고 당시 목격한 차량이 녹색이라고 진술할 사건을 A, 사고 택시가 녹색일 사건을 B라고 하자. 주어진 문제는 목격자가 사고 차량이 녹색이라고 진술했을 조건 아래 녹색 택시가 사고 차일 확률이므로 $P(B \mid A)$의 확률을 구하면 된다.

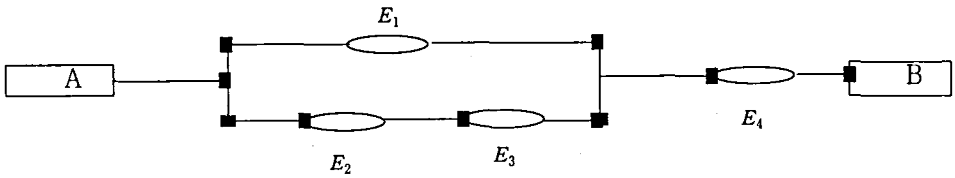
$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) = 0.8\times0.7 + 0.2\times0.3 = 0.62$

따라서 구하는 확률은 $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.8\times0.7}{0.62} = \dfrac{28}{31}$

### (5) 전자회로문제

<문맥>

아래 <그림 Ⅲ-1>의 회로는 어느 전자제품의 부분 회로도이다. 이 회로에서 각 스위치가 고장날 확률은 0.8이라고 할 때, A에서 B로 전류가 흐를 확률을 구하여라.




<그림 Ⅲ-1> 전자제품의 회로도 1

<수학화 과정>

우선 각 스위치가 고장날 확률은 0.8이므로 각 스위치가 고장나지 않을 사건을 각각 $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$라 하면 확률은 여사건의 확률에 의하여 다음과 같다.

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = 1 - 0.8 = 0.2$

이 때, 전류가 흐르는 경우는 우선 $E_1$이고 $E_4$인 경우 즉, $E_1 \cap E_4$이 있고 또한 $E_2$이고 $E_3$이고 $E_4$인 경우 즉, $(E_2 \cap E_3) \cap E_4$인 경우가 있으므로 전류가 흐르는 경우는

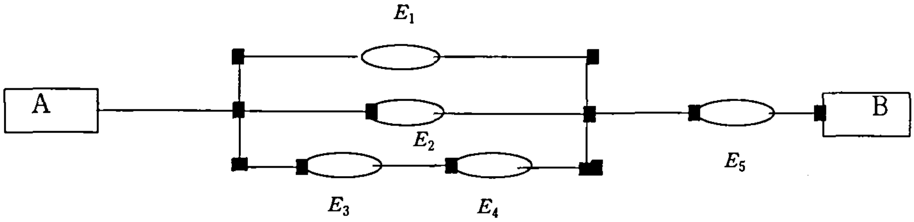
$\{ E_1 \cup (E_2 \cap E_3) \} \cap E_4$

따라서 확률의 덧셈정리와 독립인 경우의 확률의 곱셈정리에 의하면 전류가 흐를 확률은

$$P[(E_1 \cup (E_2 \cap E_3)) \cap E_4] = P[(E_1 \cup (E_2 \cap E_3)] P(E_4)$$
$$= \{P(E_1) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\} P(E_4)$$
$$= \{0.2 + 0.2^2 - 0.2^3\} \times 0.2 = 0.046$$

<수직적 수학화 과정>

아래 <그림 Ⅲ-2>의 회로는 어느 전자제품의 부분 회로도이다. 이 회로에서 각 스위치가 고장날 확률은 0.8이라고 할 때, A에서 B로 전류가 흐를 확률을 구하여라.

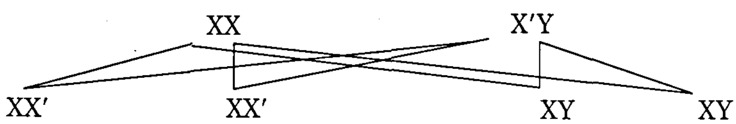



<그림 Ⅲ-2> 전자제품의 회로도 2

### (5) 색각이상자문제

<문맥>

사람의 염색체는 46개이다. 그 중에서 44개는 보통 염색체이고, 2개는 성염색체이다. 성염색체는 X 염색체와 Y염색체가 있는데 Y염색체의 존재여부에 따라 성이 결정된다. 즉, 여자의 성염색체는 XX이고, 남자의 성염색체는 XY이다. 색각이상은 성염색체 중에서 X염색체에 의해서 열성 유전된다. 예를 들어, 색각 이상 염색체를 X'이라고 하면, 정상인 여자(XX)와 색각 이상자인 남자(X'Y) 사이에 태어난 딸은 모두 보인자(XX' 또는 X'X 으로 겉으로는 정상이지만 실제로는 색각이상 유전자를 보유한 사람)이고, 아들은 모두 정상이 된다. 아래 <그림 Ⅲ-3>은 성염색체의 가계도이다.



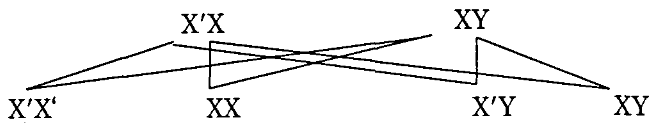

<그림 Ⅲ-3> 성염색체 가계도 1

우리나라의 경우 남자는 전 인구의 5.5%, 여자는 0.44% 정도가 색각이상자라고 한다. 색각이상자는 의사, 간호사, 항공조종사 등이 될 수 없으므로 장래의 진로 선택에 제약이 많다.

정상인 남자와 색각보인자인 여자가 결혼하여 3명의 자식을 두었다고 할 때, 3명 모두 색각 이상자일 확률을 구하여라.

<교사의 안내>

정상인 남자(XY)와 색각 보인자인 여자(X′X) 사이에 태어난 자식의 성염색체는 다음과 같다. 아래 <그림 Ⅲ-4>는 성염색체의 가계도이다.




<그림 Ⅲ-4> 성염색체 가계도 2

이 때, 자식 중에서 색각이상자는 아들(X′Y) 한 명 뿐이다. 따라서 색각이상자인 자식이 태어날 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이 때, 자식 3명이 모두 색각이상자일 확률은 어떻게 구할 수 있는지를 안내한다.

<수학화 과정>

정상인 남자(XY)와 색각보인자인 여자(X′X) 사이에 태어난 자식이 색각이상자일 확률 $\frac{1}{4}$이다. 이 때, 3명의 자식 중에서 색각이상자의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 B(3, $\frac{1}{4}$)을 따른다. 따라서, 3명 모두 색각이상자일 확률은 다음과 같다.

$$P(X=3)= {}_3C_3(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$$

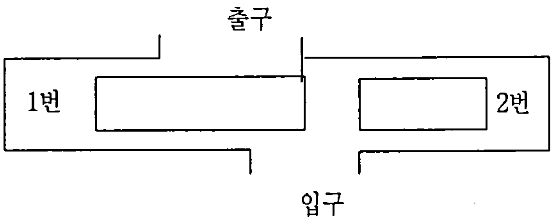
<수직적 수학화 과정>

다람쥐의 털 색깔 유전자에는 검은털 인자와 빨간털 인자가 있다. 검은털 유전자는 빨간털 유전자에 대하여 우성이다. 즉, 검은털 유전자를 B, 빨간털 유전자를 b라고 하면 Bb 또는 bB의 유전형질을 갖는 다람쥐는 검은털 다람쥐이다. 유전형질이 각각 Bb, bB인 두 마리의 다람쥐가 교미하여 5마리의 새끼를 낳았다고 할 때, 그 중에서 3마리 이상이 검은털 다람쥐일 확률을 구하여라.

**(6) 미로문제**

<문맥>

다음 <그림 Ⅲ- 5>는 생쥐 한 마리가 미로의 입구에 서서 1번 길 또는 2번 길을 선택하여 출구로 나가려고 한다. 1번 길을 선택하면 출구로 나가는데 까지 1분이 걸리고, 2번 길을 선택하면 2번 길의 입구로 다시 나오는데 2분이 걸린다. 2번 길에서 나온 생쥐는 다시 1번 길 또는 2번 길을 선택하여 출구로 나가려고 한다. 생쥐가 출구로 나갈 때까지 걸리는 평균 시간을 구하여라.




<그림 Ⅲ- 5> 미로 1

<수학화 과정>

1번 길과 2번 길을 선택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 1번 길을 선택하여 출구로 나가는데 걸리는 시간은 1분, 2번 길을 선택하여 돌아 나온 생쥐가 다시 1번 길을 선택하여 출구로 나가는데 걸리는 시간은 3분이다. 이 과정을 되풀이하는 것이므로 출구로 나가는데 걸리는 평균 시간을 E라고 하면

$$E=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 5+\cdots①$$

이를 계산하기 위해서 $\frac{1}{2}E$를 생각하면

$$\frac{1}{2}E=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 5+\cdots②$$

①식에서 ②식의 변변을 빼면

$$\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right]=\frac{1}{2}+2\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

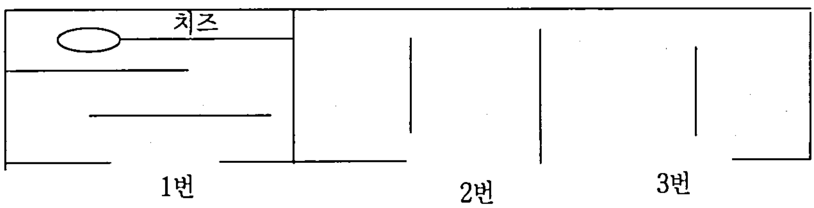
$\therefore\ E=3$ (분)

<다른 풀이> 출구로 나가는데 걸리는 평균 시간을 E라고 하자. 1번 길과 2번 길을 선택하는 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 1번 길을 선택하여 출구로 나가는데 걸리는 시간은 1분, 2번 길에서 다시 2번 길의 입구로 돌아오는데 걸리는 시간은 2분이다. 2번 길에서 나온 생쥐는 다시 처음과 같은 상황에 있으므로 그곳에서 출구로 나가는데 걸리는 평균 시간도 E이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$E=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}(2+E) \qquad \therefore \quad E = 3(\text{분})$$

<수직적 수학화 과정>

생쥐 한 마리가 다음 <그림 Ⅲ-6>과 같은 미로에 있는 치즈를 찾아 먹으려고 한다. 생쥐가 치즈를 찾는데 걸리는 시간은 1번 문으로 들어가면 3분이 걸린다. 2번 문으로 들어가서 다시 돌아 나오는데 4분이 걸리고, 3번 문으로 들어가서 돌아 나오는데 5분이 걸린다. 생쥐는 어떤 문으로 갔는지 기억 할 수 없고, 치즈를 찾을 때까지 이문, 저문으로 들어간다고 한다. 생쥐가 치즈를 찾을 때까지 걸리는 평균 시간을 구하여라. (단, 각 문을 선택할 확률은 모두 같고, 같은 문을 다시 들어갈 수도 있다. 또, 각 문에 도달하는 시간은 무시한다.)




<그림 Ⅲ-6> 미로 2

## Ⅳ. 결 론

21세기 지식·정보화 기반 사회에서 경쟁우위를 확보하기 위해서는 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창출할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재의 육성이 필요하다. 이에 따라 수학교육도 학생들 스스로 문제를 탐구, 관찰, 조직, 분석하는 활동을 통해 문제를 해결하고 수학적 원리와 법칙을 이끌어 낼 수 있는 능력을 길러주는데 중점을 두어야 한다. 이와 같은 수학교육의 목표를 학교 수학에서 구현할 수 있는 방법 중의 하나가 Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 현실적 수학교육이다.

현실적 수학교육은 안내된 재발명, 점진적 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 기본원리로 삼고 있다. 안내된 재발명은 수학이 발명된 과정과 유사한 과정을 경험하여 학습자 스스로가 직관적 관념, 비형식적 지식 등으로 재조직하는 것을 말하고, 수학화란 현실 문맥에 포함되어 있는 수학적인

요소를 형식화, 일반화하여 세련되게 조직해 나가는 과정을 말한다. 이와 같은 수학화 과정은 수준 상승을 초래할 수 있는데, 이 때 수준의 비약이 가능하도록 교수학적 조치를 취하면서 점진적으로 안내해야 한다는 것이다.

현실적 수학교육의 가장 큰 특징은 수학의 실제적 응용이다. 현실 상황에 관한 문맥, 즉 어떤 구체적인 수업과정에서 학생들에게 열려있는 수학화 되어야 할 현실세계의 상황을 탐구하여 수학적 개념을 추출하고, 추상화 및 형식화 과정을 통하여 다시 현실 세계로 피드백 하는 사이클이 그 교육과정의 핵심이라고 할 수 있다. 따라서 현실적 수학교육에서 가장 중요한 것은 수학화의 근원이자 응용의 근원으로 삼고 있는 현실 상황에 관한 문맥을 찾아내는 것이다.

본 연구는 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육을 적용하기 위해서 문맥의 구성 방향을 설정하여 이에 적합한 문맥을 다음과 같이 개발하였다

1. 확률과 통계의 역사 관련 문맥
   가. 득점 문제 : 수학적 확률과 확률의 덧셈정리
   나. 주사위 문제 : 여사건의 확률
   다. Huygens의 다섯 문제 : 확률의 성질
   라. Graunt의 생명표 : 통계적 확률
   마. De Moivre의 이항분포의 정규 근사 : 이항분포의 정규 근사
2. 현실 세계의 상황 문맥
   가. 몬티홀 딜레마(Monty Hall Dilemma), 카드뽑기 활동 : 수학적 확률
   나. 병원의 규모문제, 지참금문제, 로또 확률문제 : 수학적 확률
   다. 딱지 뽑기 활동 : 통계적 확률
   라. 포커게임, 페니실린문제, 뺑소니택시문제 : 조건부확률
   마. 주차 위반 판결문제, 방사능 자동탐지기문제, 전자 회로 문제 : 사건의 독립과 종속
   바. 탁구공 추출문제, 농구 챔피언 승률문제 : 이산확률분포와 확률질량함수
   사. 주머니 속공의 추출문제 : 독립시행의 확률
   아. 과자 봉지 속의 딱지 모으기 : 확률분포의 평균
   자. 수능에서의 변환표준점수, 지능검사문제, 수시모집문제,
   생산직 근로자의 월급 문제 : 정규분포와 표준화
   차. 제과점 하루평균 수익문제, 복권문제, 미로문제 : 이산확률변수의 기대값
   카. 게임동산 : 수학적확률, 조건부확률, 확률분포의 평균
   타. 자바 애플릿 이용 : 이항분포의 정규 근사
   파. 학생 키의 조사활동 : 연속확률변수와 정규분포
   하. 통계동산 : 기술통계, 이항분포와 정규분포, 모집단과 표본, 모평균의 추정

3. 타 교과에서의 활용 문맥
   가. Galton의 완두콩 교배 : 통계적 확률
   나. 색각이상자 문제, 유전자 문제: 이항분포
   다. RNA, DNA 문제 : 확률의 덧셈정리 및 조건부 확률
   라. 건강한 사람의 포타슘치 문제 : 정규분포와 확률

개발된 문맥들은 현실적 수학교육 이론 틀에 적용하여 고등학교 학생들에게 교수 · 학습 자료로서 활용될 수 있고, 이를 통하여 학생들의 수학화 활동의 활성화와 학업성취 수준의 향상을 기대할 수 있다.

# 참 고 문 헌

권오남 · 신경희 · 신은주 · 김영신 · 최효진 (2002). 대학 미분방정식 교수 · 학습의 새로운 방향 : RME 접근, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 12(3), pp.389-408.

김수경 (2002). Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 중학교 함수영역의 학습자료개발, 한국교원대학교 석사학위 논문.

김용성 (2000). 문제상황을 기초로한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제해결력에 미치는 효과, 한국교원대학교 석사학위 논문.

백경호 (2004). 고등학교 확률과 통계 영역에서 현실적 수학교육의 적용, 한국교원대학교 석사학위 논문.

서동엽 · 홍진곤 (2001). 확률개념 도입의 맥락과 난점. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **11(1)**, pp.179-191.

이승희 (2002). Freudenthal의 수학화 활동을 위한 중학교 기하영역의 학습자료개발, 한국교원대학교 석사학위 논문.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 교육학 박사학위 논문.

정영옥 (1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰-초등학교의 알고리듬 학습을 중심으로. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **9(1)**, pp.81-110.

정영옥 (2000). 수학교육 연구동향 - 네델란드의 현실적 수학교육, 대한수학교육학회지<학교수학>, **2(1)**, pp.283-310.

한국교원대학교 확률과 통계 국정도서 편찬위원회 (2003). 확률과 통계, 교육인적자원부.

Ahlgren, A and Garfield, J .(1991). Analysis of the Probability Curriculum, In Kapadia. R, and Borovcnik. M., *Chance Encounter : Probability in Education*, Kluer Academic Publishers.

Dubucs, J. P. (1993). *Philosophy of Probability*, Kluer Academic Publishers.

Darrell Huff (1954). *How to lie with Statistics,* New York : Norton and Company.

Fishbeine, E. (1975). *The intuitive sources of Probabilistic thinking in children*, Dordrecht : Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

_____________(Eds.) (1976). Five years IOWO - On H. Freudenthal's retirement from the directorship of IOWO, *Educational Studies in Mathematics,* 7.

_____________ (1991). *Revisiting mathematics education, China Lectures,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1990). Context problems and realistic mathematics instruction. In K. Gravemeijer(Eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education* Culemborg: Techini Press.

_____________ (1994) Developing realistic mathematics education. Utrecht: Cd-$\beta$ Press, Freudenthal Institute.

Garfield. J, Ahlgren. A. (1988). Difficulterties in Learning Basic Concepts in Probability and statistics., *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, pp.44-63.

Hald, A. (1990). A *History of Probability and Statistics*, New York: John Wiley & Sons,

Streefland, L. (1990). Realistic mathematics education: What does it mean? In K. Gravemeijer(Eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education* Culemborg: Techini Press.

Treffers, A. (1987). *Three dimensin, a model of goal and theory description in mathematics instruction*: The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

_________ (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland(Eds.), *Realistic mathematics education in primary school*, Utrecht: CD-$\beta$ Press, Freudenthal Institute.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic mathematics Education. http://www.fi.uu.nl/en/rme/welcome.html, NORMA-Lecture, 5-9.