韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 99-109.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 99-109.

부동점 정리와 연립방정식 (및 연립부등식)

이 병 수 (경성대학교)

이 논문에서는 연립방정식 및 연립부등식의 보다 나은 이해와 효율적인 지도를 위해 부동점 정리와 함께 부동점 정리와 동치인 몇 가지 주요 정리를 먼저 소개하고, 일가함수의 부동점 정리와 연립방정식의 관계성 및 집합가 함수의 부동점 정리와 연립부등식과의 관계성을 다룬다.

I. 부동점 정리와 동치 정리들

다음의 부동점 정리는 1912년 네덜란드의 수학자 브라우어(Brouwer)가 소개한 일가 함수에 대한 부동점 정리로 유클리드(Euclid) 공간 $\mathbb{R}^n$의 긴밀, 볼록 부분집합상에서 정의된 연속 일가 함수의 부동점의 존재성을 보이고 있으며, 비선형 해석학의 뿌리라고 해도 과언이 아닐 정도로 아주 중요한 위치를 차지하고 있다.

정리 1. 브라우어(Brouwer)의 부동점 정리(Brouwer, 1912)
K가 $\mathbb{R}^n$의 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이며, $f: K \to K$가 연속함수일 때 $f(x)=x$를 만족하는 $x\,(\in K)$가 존재한다.

다음의 브라우어(Brouwer)의 클래식한 부동점 정리는 $\mathbb{R}^n$의 단위원상에서 정의된 연속 일가 함수의 부동점의 존재성을 다루고 있다.

정리 2 (Park, 1995). 함수 $f: B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\} \to B^n$가 연속이면 $f(x)=x$를 만족하는 $x\,(\in B^n)$가 존재한다.

1961년에 발표된 다음의 키 판(Ky Fan)의 최대 · 최소 부등식(minimax inequality) 정리는 비선형 해석학에서는 가장 중요한 정리 중의 하나라고 말해도 지나치지 않을 정도로 많이 활용되고 있는 정리이다.

정리 3. Ky Fan's minimax inequality (Ky Fan, 1961)
K가 힐버트(Hilbert) 공간의 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이고 함수 $f: K \times K \to \mathbb{R}$가 $x \mapsto f(x, \cdot)$이

하반연속(lower semi-continuous)이고 $y \mapsto f(\cdot, y)$가 오목(concave)인 함수일 때

$$\sup_{y \in K} f(x, y) \leq \sup_{y \in K} f(y, y)$$

를 만족하는 $x \in K$가 존재한다.

1941년에 발표된 다음의 가꾸타니(Kakutani)의 부동점 정리는 집합가 함수(set-valued function)에 대한 부동점 정리로 게임이론과 내쉬(Nash)의 균형 이론에 활용되는 주요 정리이다.

정리 4. Kakutani's fixed point theorem(Kakutani, 1941)

K가 힐버트(Hilbeert) 공간의 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이고 집합가 함수 $F: K \to 2^K$가 상반연속(upper semi-continuous)이며, 함수값이 폐 · 볼록 · 비공집합일 때 $x \in F(x)$를 만족하는 $x \in K$가 존재한다.

다음의 정리는 집합가 함수의 근의 존재성에 대한 정리로 가꾸타니(Kakutani)의 부동점 정리 및 브라우어(Brouwer)의 부동점 정리와 동치인 정리이다.

정리 5 (Aubin, 1993). K가 힐버트(Hilbeert) 공간의 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이며, 집합가 함수 $F: K \to 2^K$가 상반연속(upper hemi-continuous)이고 또한 함수값이 폐 · 볼록 · 비공집합이며 임의 원소 $x \in K$에 대해 $F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$라고 하자. 그러면

(i) $O \in F(x)$인 $x \in K$가 존재한다.

(ii) 임의 원소 $y \in K$에 대해 $y \in z - F(z)$를 만족하는 $z \in K$가 존재한다.

여기서 $T_K(x) = cl\left(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x) \right)$는 점 x에서 집합 K의 tangent cone이다.

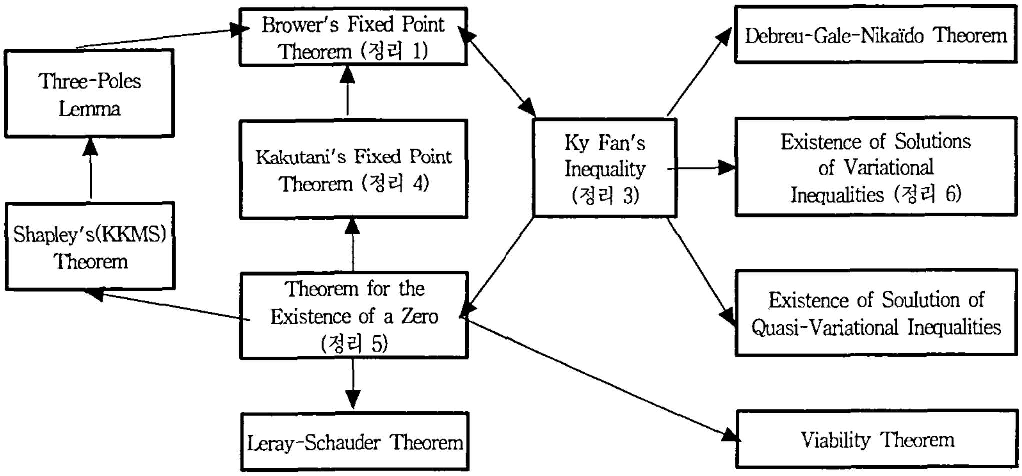
다음의 정리는 집합가 함수에 대한 변분부등식(variational inequality)의 해의 존재성에 관한 정리로 비선형 해석학의 여러 분야 특히 최적화 문제(optimization problem)에 응용성이 매우 높은 정리이다.

정리 6 (Aubin, 1993). K가 힐버트(Hilbert) 공간의 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이고 집합가 함수 $F: K \to 2^K$가 상반연속(upper semi-continuous)이고 또한 함수값이 콤팩트 · 볼록 · 비공집합이라고 하자. 그러면 다음의 변분부등식

$$\langle v, x - y \rangle \geq 0, \quad y \in K$$

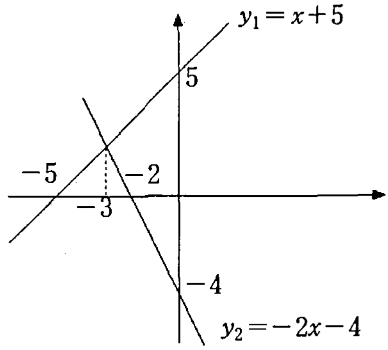
를 만족하는 $x \in K$와 $v \in F(x)$가 존재한다.

다음의 도표는 위에서 소개한 여섯 개의 정리를 포함한 여러 주요 정리들의 관계성을 보여주고 있다.



II. 일가 함수의 부동점과 연립방정식

예제 1 (강행고 외 9인, 2001). 방정식 $x+5=-2x-4$의 근은 <그림 2-1>에서 처럼 두 직선 $y_1=x+5$와 $y_2=-2x-4$이 만나는 점의 x좌표이다.



<그림 2-1>

중등수학에서는 두 함수의 정의역에 관한 조건이나 함수의 특성에 관해 특별한 제한을 제시하지는 않지만, 두 함수 y_1과 y_2는 정의역 $\mathbb{R}$에서 연속인 함수이다. 또는 $x=-3$을 포함한 유계 폐구간, 예를 들면, $[-5,0]$에서 연속이다.

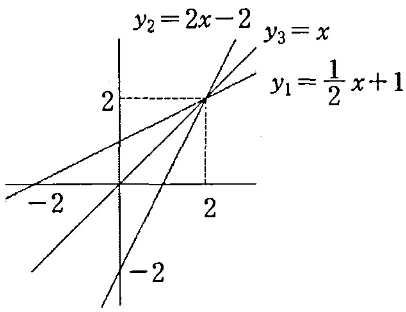
또한 연립방정식

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x + 1 \\ y_2 = 2x - 2 \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 x의 값은 <그림 2-2>에서 처럼 세 직선

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x + 1 \\ y_2 = 2x - 2 \\ y_3 = x \end{cases}$$

이 공동으로 만나는 점의 x좌표이다.



<그림 2-2>

이 연립방정식의 경우에도 마찬가지로 세 함수의 정의역이나 함수의 특성에 관해 특별한 언급이 없지만 세 함수 모두 $x = 2$를 포함하는 유계 폐구간, 예를 들면 $[0, 4]$에서 연속이다.

정의 1. 일반적으로 방정식 $f(x) = x$를 만족하는 값 x를 함수 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$의 부동점(fixed point)이라고 하며, 이 경우의 부동점은 연립방정식

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = f(x) \end{cases}$$

의 교점의 x값이다. 여기서 구간 $[a, b]$는 유계 폐구간으로 볼록하고, 콤팩트이며, 연결되어 있고, 함수 f는 $[a, b]$에서 연속인 함수로 자신을 자신의 상으로 보내는 역할을 한다.

예제 2. 함수 $f(x) = x$와 함수 $g(x) = ax + b$는

(1) $a = 1$, $b = 0$이면 무수히 많은 점에서 만난다.

(2) $a = 1$, $b \neq 0$이면 만나지 않는다.

(3) $a \neq 1$이면 단 한 점 $x = \frac{-b}{a-1}$에서 만난다.

특별히 $a > 1$, $b > 0$이거나 혹은 $a < 1$, $b < 0$이면 구간 $(-\infty, 0)$에서 만나고, $a > 1$,

$b<0$이거나 혹은 $a<1$, $b>0$이면 구간 $(0, \infty)$에서 만난다. 또 $a=0$이면 $x=b$에서 만난다. 두 함수가 만나는 점이 바로 함수 $g(x)=ax+b$의 부동점이다.

예제 3. 함수 $f(x)=x$와 함수 $g(x)=ax^2+bx+c$는

(1) $a=b=0$일 때, 한 점 $x=c$에서 만난다.

(2) $a=0$, $b\neq 0$일 때는 예제 2의 경우와 같다.

(3) $a\neq 0$, $b=0$일 때 두 함수는

$1-4ac=0$일 때 한 점 $x=\dfrac{1}{2a}$에서

$1-4ac>0$일 때 두 점 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4ac}}{2a}$에서 만난다.

(4) $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때 두 함수는

$(b-1)^2-4ac>0$일 때는 두 점에서 만나고,

$(b-1)^2-4ac=0$일 때는 한 점에서 만나며,

$(b-1)^2-4ac<0$일 때는 만나지 않는다.

두 함수가 만나는 점이 바로 함수 $g(x)=ax^2+bx+c$의 부동점이다.

예제 4. 방정식 $x=x^2$의 근은 직선 $y_1=x$와 곡선 $y_2=x^2$과의 교점의 x좌표인 $x=1$이다. 함수 $y_2=x^2$은 $x=0$과 $x=1$를 포함하는 어떤 구간 예를 들면 유계 폐구간이고 볼록하고, 긴밀하며 연결인 집합 $[-1, 5]$에서 연속이다. 또한

$$\begin{aligned} x=0 \text{ 혹은 } x=1 &\Leftrightarrow x(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-x=0 \\ &\Leftrightarrow x^2=x \end{aligned}$$

이므로 함수 $y_2=x^2$의 부동점은 $x=0$과 $x=1$임을 알 수 있다.

정의 2. 방정식 $f(x)=g(x)=x$를 만족하는 값 x를 함수 f와 g의 공통 부동점(common fixed point)이라고 한다. 이 경우의 공통 부동점은 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=f(x) \\ y_3=g(x) \end{cases}$$

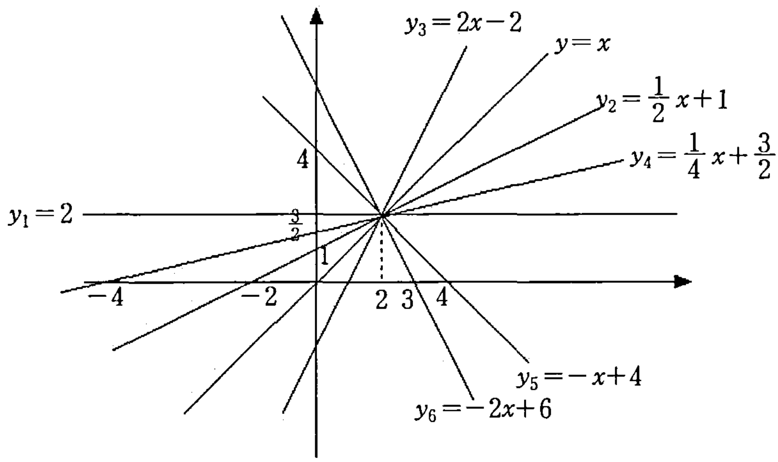
의 교점의 x의 값이다.

예제 5. 연립방정식

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x + 1 \\ y_2 = 2x - 2 \\ y_3 = x \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 $x=2$는 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$과 $g(x) = 2x - 2$의 공통 부동점이다.

예제 6. 다음의 그림에서 처럼 함수 $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$, $y_3 = 2x - 2$, $y_4 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$, $y_5 = -x + 4$, $y_6 = -2x + 6$, ⋯ 등은 공통 부동점 $x=2$를 가진다.



<그림 2-3>

위의 그림에서 처럼 무한개의 함수 $y = \frac{1}{2}(a+2)x - a$와 $y = -ax + 2a + 2$ $(a \geq 0)$는 모두 공통 부동점 $x=2$를 가진다.

일반적으로 무한개의 함수

$$y = -ax + ab + b \ (a \geq 0) \text{와} \ y = \frac{1}{b}(a+b)x - a \ (a \geq 0,\ b \neq 0)$$

은 모두 공통 부동점 $x=b$를 가진다.

정리 7. 바나(Banach)의 축소 원리 (Banach, 1922) (또는 바나의 부동점 정리)

(X, d)가 완비적 거리 공간이고 함수 $f: (X, d) \to (X, d)$가 축소 함수(즉, 임의 x, $y \in X$에 대해 $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$. 단, 여기서 $0 < c < 1$)이면 $f(x) = x$를 만족하는 $x \in X$는 단 하나 존재한다.

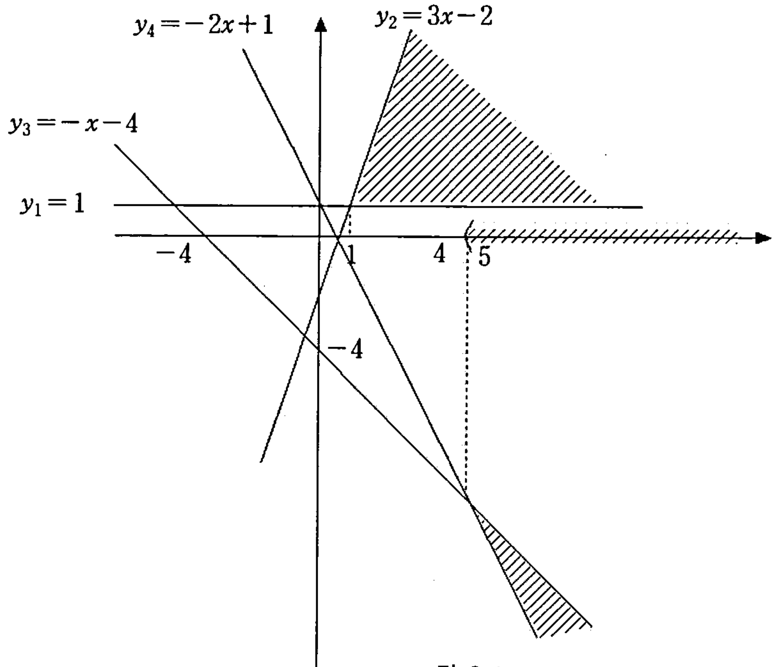
참고. 함수 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$이 유계 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 유계 개구간 (a, b)에서 미분 가능하면, 평균치 정리에 의해 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$를 만족하는 $c \in [a, b]$가 존재한다. 여기서 $|f'(c)| < k < 1$이 성립한다면 바나(Banach)의 축소 정리에 의해 $f(x) = x$를 만족하는 x가 $[a, b]$에 존재하게 된다.

III. 집합가 함수의 부동점과 연립부등식

예제 7 (강행고 외 8인, 2002). 다음의 연립부등식

$$\begin{cases} 3x-2 > 1 \\ -2x+1 < -x-4 \end{cases}$$

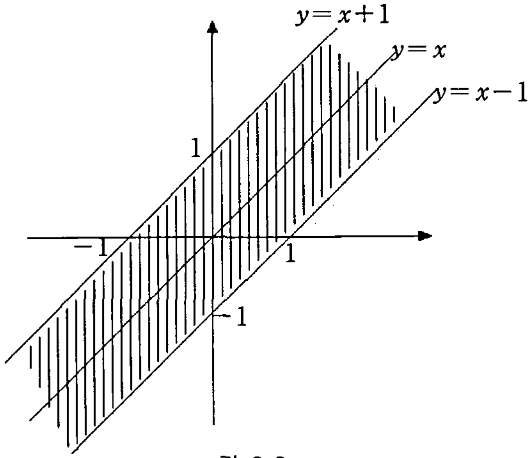
를 만족하는 x의 범위는 $(5, \infty)$이다.



<그림 3-1>

정의 3. 집합가 함수 $F: X \to 2^X$에 의해 $x \in F(x)$인 점 $x \in X$를 함수 F의 부동점이라고 한다. 즉, 함수 F의 부동점이란 원소가 자신의 상에 속하는 것을 의미한다.

예제 8. $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$을 $F(x)=[x-1, x+1]$로 정의하면 모든 실수는 집합가 함수 F의 부동점이다. 실제로 모든 실수는 부등식 $x-1 \le x \le x+1$을 만족한다.



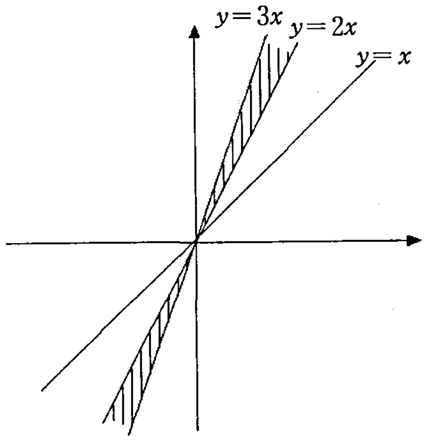
<그림 3-2>

부동점들의 집합 $\mathbb{R}$은 볼록, 폐집합이다.

예제 9. $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$을

$$F(x)=\begin{cases}[2x, 3x], & x \ge 0 \\ [3x, 2x], & x < 0\end{cases}$$

로 정의하면 F의 부동점은 $x=0$ 하나 뿐이다.



<그림 3-3>

실제로 부등식 $2x \le x \le 3x$ 또는 $3x \le 2x \le x$을 만족하는 값은 $x=0$ 뿐이다.

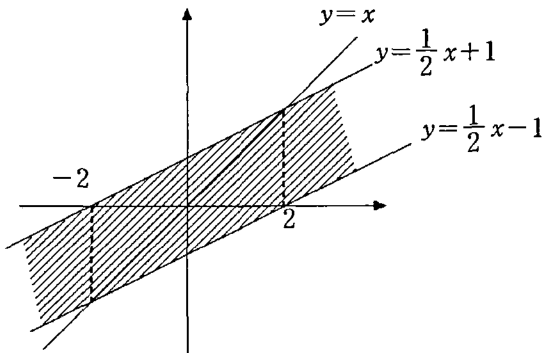
$$x=0 \Leftrightarrow 2x \le x \le 3x$$
$$\Leftrightarrow x \in [2x, 3x]$$

F의 부동점들의 집합은 폐집합이고 볼록집합인 $\{0\}$이다.

예제 10. $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$을 $F(x)=\left[\frac{1}{2}x-1, \frac{1}{2}x+1\right]$로 정의하면 집합가 함수 F의 부동점들의 집합은 $[-2,2]$이다. 실제로

$$-2 \le x \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1 \le x \le \frac{1}{2}x+1$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}x-1, \frac{1}{2}x+1\right]$$

이므로 $F(x)=\left[\frac{1}{2}x-1, \frac{1}{2}x+1\right]$로 정의된 함수 F의 부동점들의 집합은 유계 폐구간인 $[-2,2]$이다.



<그림 3-4>

예제 11. $F(x)=\left[\frac{2x^2-2}{3}, \frac{-x^2+4}{3}\right]$로 정의된 집합가 함수 $F: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$의 부동점들의 집합은

$$\frac{2x^2-2}{3} \le x \le \frac{-x^2+4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2-2}{3} \le x \\ x \le \frac{-x^2+4}{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x \le 2 \\ x^2+3x \le 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(x-2) \le 0 \\ (x+4)(x-1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{2} \le x \le 1$$

이므로 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$이다.

정의 4. 두 집합가 함수 F, $G: X \to 2^X$에 대해 $x \in F(x)$이고 $x \in G(x)$인 점 $x \in X$를 F와 G의 공통 부동점이라 한다.

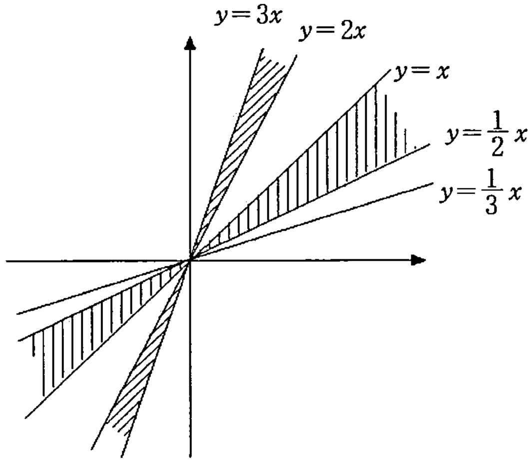
예제 12. 두 개의 집합가 함수

$$F(x) = [2x, 3x]\text{와} \quad G(x) = \left[\frac{1}{3}x, \frac{1}{2}x\right]$$

의 공통 부동점들의 집합은 두 개의 부등식

$$\begin{cases} 2x \le x \le 3x \\ \frac{1}{3}x \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 x들의 집합인 $\{0\}$이다.



<그림 3-5>

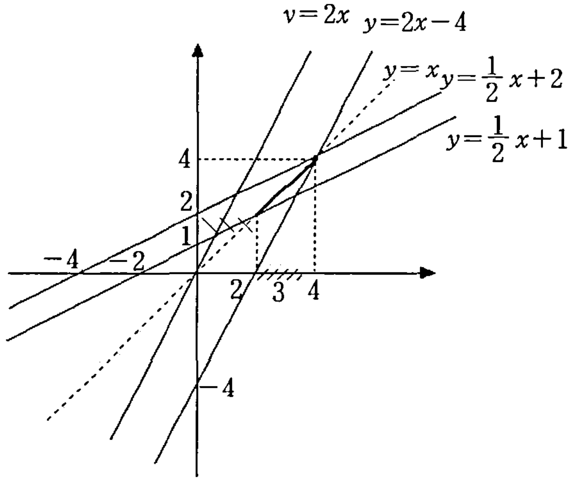
예제 13. 두 개의 집합가 함수 F, $G: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$을 각각

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}x+1, \frac{1}{2}x+2\right], \quad G(x) = [2x-4, 2x]$$

로 정의하면 연립부등식

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 \le x \le \frac{1}{2}x+2 \\ 2x-4 \le x \le 2x \end{cases}$$

에 의해 F와 G의 공통부동점들의 집합 $[2,4]$를 얻는다.



<그림 3-6>

참 고 문 헌

강행고 외 9인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)중앙교육진흥연구소, 서울.

강행고 외 8인 (2002). 중학교 수학 8-가, (주)중앙교육진흥연구소, 서울.

Aubin, J. P. (1993). *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Brouwer, L. E. J. (1912). *Über abbildungen von mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71**, pp.97-115.

Banach, S. (1922). *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales*, Fund. Math. **3**, pp.133-181.

Brown, R. F. (1993). *A Topological Introduction to Nonlineat Analysis*, Birkhäuser, Berlin.

Fan, K. (1961). *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. **142**, pp.305-310.

Istrătescu, V. I. (1981). *Fixed Point Theory*, D. Reidel, Dordrecht.

Kakutani, S. (1941). *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8**, pp.457-459.

Park, S. (1995). Eighty years of the Brouwer fixed point theorem ; In "Antipodal Points and Fixed Points" edited by J. Jaworowski, W. A. Kirk and S. Park, Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul National University, Seoul.