韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 1호, 2004. 1. 45-60.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 1, Jan. 2004. 45-60.

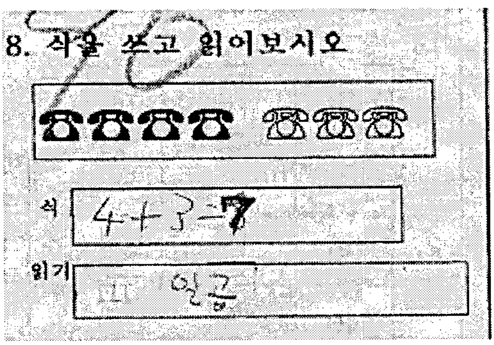
왜 하필 4+3인가?[1)]

김 창 일 (단국대학교)
김 신 좌 (단국대학교 대학원)

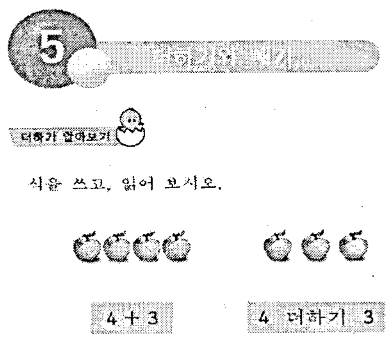
수학텍스트의 한 부분인 식은 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등의 여러 기호와 함께 학생들에게 다양한 수학을 경험을 제공한다. 그러나 이러한 수학텍스트의 다양성은 수학시험 채점시 4+3인가, 4+3=7인가 혹은 부분점수를 줄 것인가의 이슈로서 변질되어 등장한다. 따라서 본 연구에서는 초등학교에서 다루는 식의 의미, 초등학교 아동에게 지도되는 식의 형태, 초등학교 1학년 아동의 식에 대한 이해, 초등학교 교사들의 식에 대한 이해 형태를 서울시 소재 한 초등학교의 1학년 담임교사 9명과 1학년 1 개 학급에 속한 아동과의 면담 및 설문 조사를 통하여 알아보았다. 아울러 제언에서는 수학텍스트의 한 부분인 식의 실제 교육현장에서 어떻게 반영되고 있는가에 대한 탐색을 통하여 식의 의미를 올바르게 전하기 위한 지도 방법, 교사 인식에 대한 방향을 제시하였다.

1. 고민의 시작

요즈음 어느 시기 부터인가 초등학교에서 가장 큰 특징의 변화를 손꼽으라고 한다면, 학기말 또는 학년말에 수학경시대회를 개회한다는 것이다. 학교마다 전 학년이 실시되는 경우도 있고, 그렇지 않은 경우도 있다. 한 사례로서 얼마 전, 서울시 소재 어느 초등학교에서 1학년 가단계의 수학경시대회 문제로 주어진 그림을 보고, 식을 쓰고 읽는 문제가 출제되었다<그림 1>. 이 문제는 1학년 가단계의 수학익힘책을 근거로 하여 출제된 문제로서 내용은 <그림 2>와 같다.



<그림 1> 식을 쓰고 읽어보시오.



<그림 2> 식을 쓰고, 읽어 보시오.

---

1) 이 연구는 2003학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.

이 수학경시대회 문제는 4+3을 식으로 쓰고, 그 식을 읽어보는 학습내용에서 착안하여 출제한 문제이다. 따라서 평가관점은 그림을 보고, 식을 바르게 쓰고 읽을 수 있는가이다. 그러나 재미있게도 수학경시대회 실시 결과, 아동의 반응은 다양하게 나타났고, 그러한 현상에 대한 교사의 견해도 다양하게 나타났다. 특히, 교사의 반응은 심한 갈등의 양상도 보였는데, 그 대표적인 갈등은 크게 두 가지였다. 첫째, 다양하게 나타난 아동의 반응에서 4-3을 정답으로 인정하는가, 인정하지 않는가의 문제, 둘째, 4-3=7이 식인가 또는 4-3이 식인가의 문제가 바로 그것이다. 초등교사의 경우, 학창시절 수학에 점수가 높았던 자신의 경험 즉 교사 자신의 학력에 대한 자심감과 오답과 정답이 존재하는 쉬운 과목, 각종 공개 수업에서 가장 무난한 교과는 수학이라는 일반적 인식이 주된 감정적 요소로 작용하여 이러한 갈등은 현장 교사들에게는 매우 민감한 반응을 나타나게 하였다. 공개 수업 때 가장 무난한 교과가 수학과라는 일반적 인식이란, 타 교과로 수업을 공개하게 되면 많은 교수·학습 자료 및 준비물이 필요하지만, 수학과의 경우는 대체적으로 수학교과서와 수학익힘책만 있으면, "자, 여러분, 풀어보세요"로서 거의 대부분의 수학과 공개수업이 별 무리 없이 진행될 수 있다는 교과에 대한 인식을 의미한다. 한편, 채점에 대한 기준의 논쟁은 초등학교 담임교사가 수학교과시간에 아동을 어떻게 지도하며 또, 아동을 어떤 시각으로 대하며, 평가는 어떤 관점에 의거하여 실시하는가라는 교사 대 교사간의 교육철학으로도 연장되었다.

반면, <그림 1>의 문제를 일반 학부모 및 일반 성인에게 질문하였을 때, 교사간 발생했던 논쟁의 상황은 교과서에서 제시한 바와는 달리 일반적으로 '사 더하기 삼은 칠', '4-3'과 같은 인식이 널리 통용됨도 관찰할 수 있었다.

따라서 이러한 상황으로부터 다음과 같은 연구문제를 생각하는 것은 자연스러운 일이였다.

첫째, 초등학교에서 다루는 식이란 무엇인가?

둘째, 초등학교 아동에게 식은 어떠한 형태로서 지도되는가?

셋째, 초등학교 1학년 아동은 식을 어떻게 이해하며 표현하는가?

넷째, 초등학교 교사들은 식을 어떠한 형태로서 이해하여 지도하는가? 또한 아동의 다양한 반응에 대한 교사의 시각은 어떠한가?

본 연구에서는 제시한 연구 문제에 따라, 서울시 소재 초등학교 1학년 담임교사 9명과 그 학교의 초등학교 1학년 1개 학급을 연구대상으로 설정하였다. 이들에 대한 일정 형식의 질문을 제시하고, 그 각 질문에 나타난 반응을 해석하는 방법으로서 본 연구를 진행하였다.

2. 식이란 무엇인가?

(1) 수학 용어 사전적 의미

김선주(2003)의 SSAT·SAT의 수학용어 사전에 의하면, 식(expression)은 A collection of numbers(수), operation sign[계산 부호], and symbols of inclusion that stands for a number로서 어

느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 것이라고 풀이되어 있다. 김용운(1998)의 수학용어숙어영한・한영사전에 의하면, 식은 세 가지의 의미로 풀이되는데 내용은 다음과 같다.

첫째, formula로서의 式으로, 이러한 예로 점화~(recurrence formula),

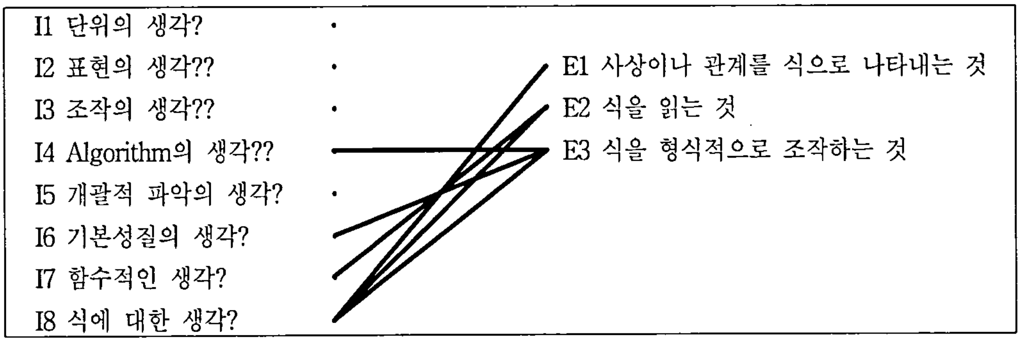
둘째, expression으로서의 式으로 근사~(approximate expression), 대수~(algebraic expression), 미분~(differential expression), 발산~(divergence expression), 분수~(fractional expression), 무리~(irrational expression), 전개~(expand expression), 정~(integral expression), 유리~(rational expression) 등이다.

셋째, modus로서의 論理式으로서, logical expression이다.

(주)한글과 컴퓨터의 한컴 사전에 의하면, 식은 expression으로서, expression은 사상이나 감정을 표현, 표시하는 표현법으로서, 말씨, 어법, 말투, 어구를 나타낸다. 대한수학회(1995)에서 발간한 수학용어집에 따르면, expression 혹은 formula는 식표현이라고 하였다. 박교식(2003)의 수학용어 다시보기에서는 식은 대체로 '어떤 일정한 형상(또는 꼴)을 갖추고 있는 수학적 표현'을 의미한다고 하였다. 즉, '식'은 한자 式을 음역한 것으로, '일정한 형상' 또는 '꼴'이라는 뜻이 있다고 하였다. 식은 軾(식)에서 유래한 것으로, 이것은 옛날 귀족들이 타던 수레의 손잡이 막대이다. 귀족들이 수레를 타고 내릴 때 하인들은 시중을 들게 되는데, 그 시중은 일정한 예를 갖추어 행해진다. 따라서 이러한 것으로부터 '제대로 된 모양새를 갖추다'라는 의미를 가진 '式'이라는 용어가 생겨나게 되었다고 하였다. 오늘날 '정식(正式)으로' 또는 '공식적(公式的)으로'등에서 이러한 의미를 볼 수 있다고 하였다. 뿐만 아니라 결혼식(結婚式), 졸업식(卒業式)에서의 식도 이와 같은 의미라고 하였다. 그는 식을 영어로는 expression(←express) 또는 formula임을 지적하면서, '식을 쓰시오'라고 할 때의 식은 expression이라고 하였다. 이 때의 expression에는 '표현'이라는 의미가 있으며, 일반화된 내용을 말하는 '공식'의 의미로 사용되는 것은 formula라고 하였다. 이것은 form+ula로 form은 '꼴, 형상, 형태, 형식, 양식'등을 의미하고, ula는 '규모가 작은 것'을 나타내는 접미사로서, formula에는 '(규모가 작은)꼴, 형태, 양식'이라는 뜻이 있다고 하였다. 여러 가지 경우에 성립하는 수식은 규모가 작은 하나의 형태로 나타나기 때문에 formula라고 한다고 언급하였다. 또, 공식이란, 한자 公式을 음역한 것으로, 수학에서는 주로 어떤 계산 또는 연산의 규칙을 수식으로 나타낸 것을 뜻한다고 하였다. 공(公)에는 '개인적인 것이 아니고, 사회 일반의 많은 사람들에게 관계되는 것'이라는 뜻이 있으므로, 어느 한 가지 특정한 경우에만 성립하는 것이 아니라, 많은 경우에 성립하는 식이라는 의미에서 공식이라는 용어를 사용한다고 하였다. 한편, 초등학교 수학에서만 사용되는 용어로서, 그는 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식, 나눗셈식이 있다고 지적하였다. 즉, '덧셈식'은 $4+5=9$와 같은 식을 말하고, '곱셈식'은 $4\times5=20$과 같은 식을, $9-5=4$와 같은 식은 '뺄셈식'으로, $9\div3=3$과 같은 식은 '나눗셈식'이라고 부른다고 하였다. 이들은 전체적으로 덧셈, 곱셈, 뺄셈, 나눗셈을 나타내기 때문에 덧셈 등식, 곱셈 등식, 뺄셈 등식, 나눗셈 등식을 간단히 줄여서 덧셈식, 곱셈식, 나눗셈식이라 명명한다고 하였다. 그는 '식의 값'에 대하여는 문자를 포함한 어떤 식에서 문자에 주어진 수를 대입하여 계산한 결과가 그 식의 값이라고 정

의하였다. 즉, 식 $4a-6b$에서 a에 2, b에 -3을 대입하면, $4a-6b=26$이 되고, 이때, 26이 식의 값이라고 하였다.

片桐重男(1992, 이용률 외 역)은 식에 관한 내용과 이에 관련된 생각에서 식이란, 보통의 문장보다 짧고, 의미는 명확하며, 결과에 직접 영향을 미치는 요인만으로 나타내어지는 것이라고 하였다. 따라서 식에 관한 내용은 사상(事象)이나 관계를 식으로 나타내기(E1), 식을 읽기(E2), 식을 형식적으로 조작하기(E3)로 정리할 수 있다고 하였다. 식에 관한 내용은 그 내용과 관련된 생각과 밀접한 관계가 있으며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다고 하였다.



<그림 3> 식에 관한 내용

앞서 살펴본 바와 같이 식에 대한 여러 가지 정의를 고려해 볼 때, 식이라 함은 expression 혹은 formula를 의미하는 것임을 알 수 있다. 즉, 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현이 식임을 알 수 있다.

그렇다면 우리 현행 교과서와 기존의 교과서들은 식을 어떻게 설명하고 있는가? 또 이러한 것들을 초등학교 학생에게 어떻게 설명하려 노력하고 있는가?

(2) 수학 텍스트와 식

O'Halloran(1999)에 의하면, 수학 텍스트는 수학적 상징, 일상 언어, 다이어그램과 그래프 형식의 시각적 텍스트를 포함한다고 하였다. O'Halloran(1999)에 의하면, 수학의 상징체계는 자연 언어의 사전문법(lexicogrammar)에서부터 발전한 것이라고 하였다. 상징과 언어 형식이 통합된 수학의 상징체계, 다시 말해서 일상 언어의 의미가 확장되고 그 구조를 축약하여 형성된 상징체계는 자연언어와 시각적 텍스트와 함께 가르쳐 질 때, 이해를 수월하게 도모 할 수 있다고 하였다. 즉 일상 언어는 상징에 대한 메타언어가 된다고 하였다. 김선희・이종희(2003)는 이러한 예로, 이차방정식의 근의 유도과정을 비교 설명하고 있는 데 그 내용은 <표 1>과 같다.

<표 1> 이차방정식의 근의 공식 유도과정

상징만을 사용한 예	상징과 일상 언어를 함께 사용한 예
$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ $x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$ $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 1 양변을 a로 나눈다 : $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 2 상수항을 이항한다 : $x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$ 3 완전제곱식으로 나타낸다 : $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 4 $b^2-4ac\geq 0$일 때 제곱근을 구한다. $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 5 구하는 해는 다음과 같다 : $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이 표에서 알 수 있는 바와 같이, 이차방정식의 근의 유도과정에서 상징만을 사용한 예는 상징과 일상 언어를 함께 사용한 예보다 그 이해가 어렵게 여겨진다. 수학 사회의 정해진 규약인 상징은 수학에 친숙하지 않은 사람에게는 수학이 어렵게 여겨지게 하는 주요한 이유이다. 따라서 단순하게 정리된 상징적인 식만으로는 수학적 개념이 확장되고 발전하는 과정에서 그 과정과 의미, 추론을 파악하기 힘들다고 주장하였다.

NCTM(1998, 2000)에서는 학교수학은 수학적 아이디어를 설득력 있게 표현하고 다른 사람의 생각을 이해할 수 있는 것이라고 하였다. 학교수학에는 상징적 표현 뿐 만아니라 말과 글, 구체물, 다이어그램이나 그래프 등의 여러 가지 표현이 가능하다고 하였다. 이를 통하여 상징과 일상 언어가 각각 서로 다른 역할과 기능을 갖으면서, 수학학습에서 상징과 일상 언어를 사용한 아이디어의 표현과 개념 설명은 학생들과 일반인에게 수학이 소수만의 학문이 아니라 누구나 배울 수 있는 학문이며 생활에서 수학적 구조를 깨닫고 사용할 수 있음을 주장하였다. Duval(1998)은 시각적 추론과 일상 언어·상징을 사용한 논리적 추론은 어느 것이 더 높은 위계를 갖는다고 할 수 없다고 하였으며, 수학의 언어적 관점에서 시각적 텍스트만으로 내용을 구성할 수 없다고 하였다. 김선희·이종희(2003)는

기하의 도형, 다이어그램, 함수의 그래프, 통계 그래프 등도 수학에서 사용하는 시각적 텍스트라고 하였다. 즉 논리적인 해설을 포함한 일상 언어와 상징의 표현만으로는 수학적 대상에 대한 직관적 이해를 하기 어려우므로, 직관과 발견술에 기하의 도형, 다이어그램 등의 시각적 텍스트가 도움이 된다고 하였다. 이에 수학을 구성하고 있는 언어적 요소들인 상징, 일상 언어, 시각적 텍스트는 제 기능에 맞게 사용되어야 하며, 문법에 기초하고 있는 개념 구조는 형식적이라기보다는 기능적이라고 하였다(Halliday, 1985). 따라서 이러한 전이과정을 거쳐 아동의 언어는 추상적이면서 형식적인 어른의 언어로 발전한다고 하였다.

Ernest(1999)는 암묵적 지식이란, 전통적으로 타당한 명제, 증명될 수 있는 정리들의 집합으로 이해되어 왔으나 명확하게 제시될 수 없는 지식이라고 하였다. Kitcher(1994)는 수학적 실행의 구성요소로 언급한 언어와 메타-수학적 집합이 이에 해당된다고 하였다. 메타-수학적 암묵적 지식은 교과서와 교사의 설명, 필기 등을 학생들이 모방하면서 학습이 되는 것으로서, 문제해결이나 증명 텍스트를 읽는 경험을 통해 학생들은 텍스트의 유형, 작문 전략, 제시 방식 등의 암묵적인 수사적 지식을 알게 된다고 하였다.

한편, 김선희 · 이종희(2003)은 수학은 전통적으로 엄밀한 규칙을 따르고 참과 거짓이 명확하다고 인식되고 있지만, 학교 수학에서는 그 명확성과 정확함의 한계가 모호한 경우가 있음을 지적하였다. 답이 $\frac{1}{2}$인 문제를 학생들이 $\frac{2}{4}$ 라고 했을 때 또는 답이 2 인 문제의 해를 $\sqrt{4}$ 라고 했을 때 정답으로 할 것인지 부분점수를 줄 것인지 등이 그 예로서 이런 일은 수학 답안지를 채점할 때 비일비재하며, 이러한 지식의 판단은 공유되고 있는 기준, 실행, 사회의 맥락과 문화에 관련된다고 하였다. 논리적이고 참임이 분명한 수학에서조차 이런 문제가 발생하며, 학교수학에서 기하 증명 텍스트의 분석이라는 연구에서 학생들은 교과서나 교사가 쓴 텍스트의 내용과 추론 과정 뿐 아니라 그 속에 암묵적으로 제시된 언어의 기능과 수사적 기술을 배워야 한다고 주장하였다. 교과서와 교사가 쓴 증명 텍스트는 이러한 점을 염두에 두어 학생들이 잘 이해하도록 쓰여 져야 하고, 학생은 자신의 증명 아이디어를 텍스트로 구성 할 때, 그 내용과 형식을 교사나 다른 학생들이 이해할 수 있도록 분명하게 표현해야 한다고 주장하였다. 또한, 그들은 Vygotskty(1985)가 주장한 사고의 발달이 이루어지기 위해 언어가 선행되어야 하고 아동의 언어 발달, 새로운 언어체계로서의 수학을 학습을 통한 수학적 사고의 발달을 위해서는 자연스럽고 유연한 사고의 매개 수단으로서 수학 언어가 사용되어야 함을 주장하였다.

Halliday, Ernest, 김선희·이종희 등의 주장을 정리하면, 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현인 식은 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등의 여러 기호와 함께 수학을 경험하게 해주는 수학텍스트의 한 부분이라고 하겠다. 따라서 식은 학생들이 수학적 의미를 깨닫고 알맞은 수학적 표현을 만들어 문제를 해결하고 상징을 조작하여 공식을 유도하면서 수학을 경험할 수 있도록 이러한 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등과 함께 지도되어야 할 것이다.

그렇다면, 초등학교 아동에게 식은 교과서를 통하여 구체적으로 어떻게 가르쳐 지고 있는가?

3. Expression과 Formulas

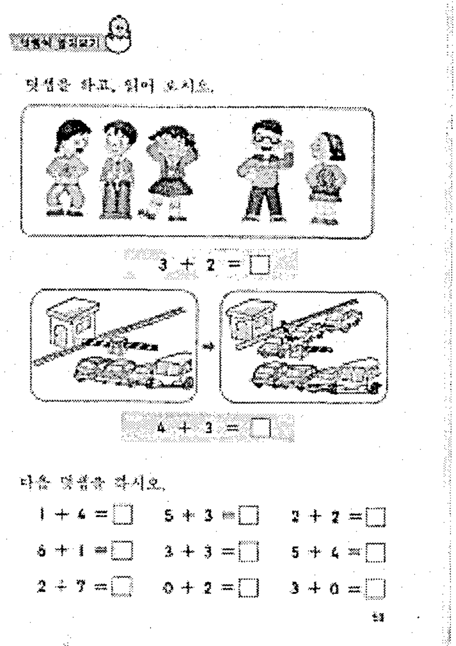
Freudenthal(1978)은 수학적 언어 수준을 지시적 언어를 사용하는 구체적 언어, 상대적인 관계를 사용하는 언어, 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어, 변환 등을 사용하여 나타내는 함수적 언어 수준으로 나누어, 상징보다 일상 언어가 더 낮은 수준의 언어라고 하였다. 상징에 대한 강조가 수학교실에도 반영되어 문제해결과정을 언어로 서술하기 보다는 여러 식을 쓰는 것을 강조하였는데 그러한 예로는 미국의 중등 교육과정으로서 개발된 Mathematics in Context의 Expression and Formulas의 '버스 수수께끼'에서 살펴 볼 수 있다.

아침 일찍 버스 종점에서 출반한 버스에는 손님이 한 명도 없기 마련입니다. 제일 처음 정류장에서 10명의 손님이 탔고, 두 번째 정류장에서는 6명의 손님이 탔습니다. 세 번째 정류장에서는 손님 4명이 내리고, 7명이 탔습니다. 네 번째 정류장에서는 손님 5명이 타고, 2명이 내렸으며, 다섯 번째 정류장에서는 4명의 손님만 내렸습니다.

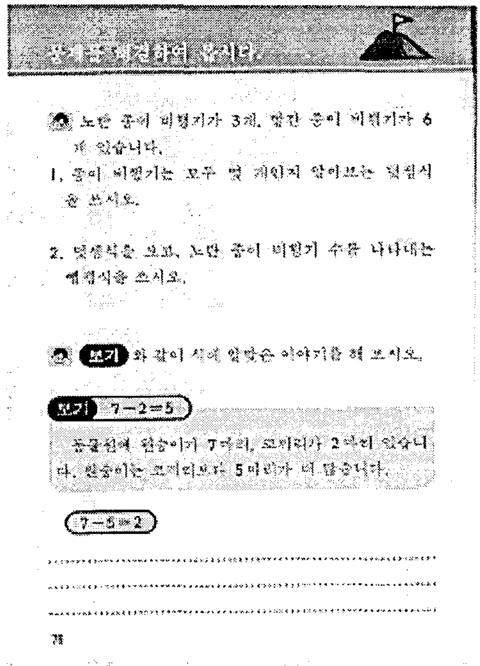
와 같은 상황(context)을 통하여, $10+6=16+3=19+3=22-4=18$라는 표현보다는

$$10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+3} 19 \xrightarrow{+3} 22 \xrightarrow{-4} 18$$

와 같이 각 변화를 화살표에 의해서 보여주는 것이 타당하다고 주장하고 있다. 승객 수, 돈, 또는 어떤 것이든지 간에 계산을 한 줄로 쓰게 하는 방법을 화살표를 이용한 식이라고 정의하였는데, 이러한 화살표를 이용한 식을 통하여 덧셈과 뺄셈을 나열할 수 있다고 하였다. 식을 쓰는 과정의 한 부분으로서 교과서에 이와 같이 서술함으로서 실질적인 예제 즉 구체적인 실생활 예와 함께 식을 다루고 있다. 한편, 우리나라 1학년 가 단계 수학교과서의 식에 대한 언급을 보면 <그림 4>, <그림 5>를 예로 들 수 있다. 덧셈식의 경우 시각적 표현이 주로 <그림 4>과 같이 만화적인 제시 상황에 의존하고 있으며, 식도<[그림 2>와 <그림 5>와 같이 일정한 수와 '+', '='로 나타낸 즉 4+3, 4+3=7와 같은 수학텍스트에 한정하여 식을 언급하고 있음을 알 수 있다.



<그림 4> 덧셈식

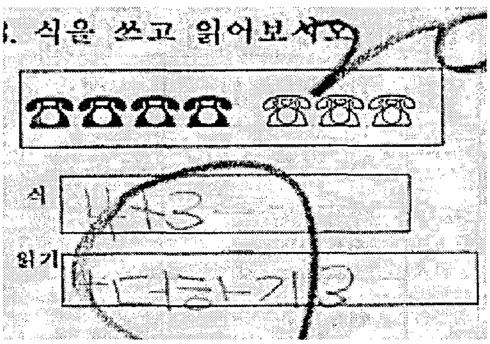


<그림 5> 7-2=5

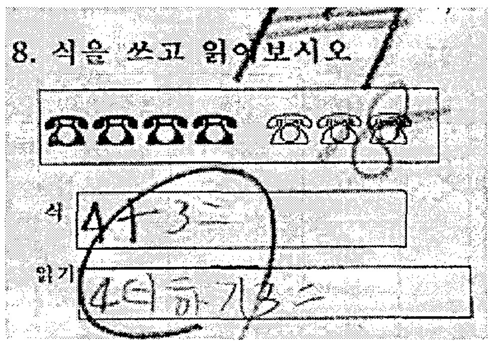
4. 교사와 아동의 식에 대한 견해

(1) 식을 쓰고 읽어보시오.

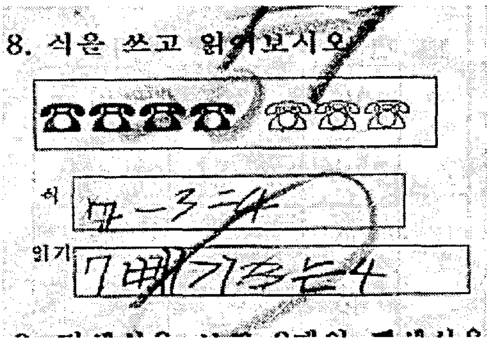
본 연구의 '고민의 시작'에서 밝힌 바와 같이 1학년 가 단계 수학경시대회에 출제한 식의 이해에 대한 평가 결과 나타난 아동의 반응을 몇 가지 예를 들면 다음과 같다.



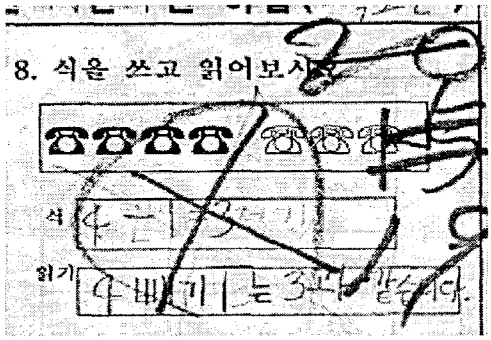
<그림 6> 연산 유형 덧셈 Ⅰ



<그림 7> 오류의 예



<그림 8> 연산 유형 뺄셈 II



<그림 9> 연산 유형 뺄셈 I

이러한 예들을 유형별로 정리하면 다음 표와 같다. (N=42)

<표 2> 식을 쓰고 읽어보시오

연산유형	식	읽기	아동수
뺄셈 I	7-3	7 빼기 3	0
뺄셈 II	7-3=4	7 빼기 3은 4와 같습니다.	0
		7 빼기 3은 4입니다.	0
		7 빼기 3은 4	1
뺄셈 III	4-3	4 빼기 3	1
뺄셈 IV	4-3=1	4 빼기 3은 1과 같습니다.	1
		4 빼기 3은 1입니다.	0
		4 빼기 3은 1	1

<표 3> 식을 쓰고 읽어보시오

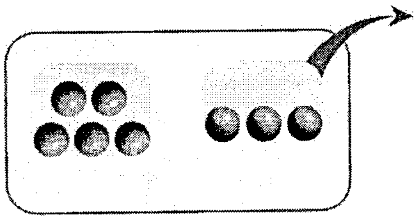
연산유형	식	읽기	아동수
덧셈 I	4+3	4 더하기 3	15
덧셈 II	4+3=7	4 더하기 3은 7과 같습니다.	6
		4 더하기 3은 7입니다.	0
		4 더하기 3은 7	9
오류	5+3=8	오 더하기 삼은 팔	1
	4+3=7	4 더하기 3= 7	1
	4+3=7	일곱	1
	4+3=	4 더하기 3 =	1
	4-3=7	사 빼기 삼은 칠과 같습니다.	1
	무응답		3

위의 표를 분석해 보면, 식에 대한 아동의 응답 유형은 크게 두 가지이다. 하나는 덧셈으로 문제를 인식하는 경우, 다른 하나는 뺄셈으로 문제를 인식하는 경우이다. 뺄셈의 경우는 전체 전화기에서 색이 다른 전화기의 수를 빼는 것으로 인식하는 경우와 색이 다른 전화기의 수를 서로 비교하는 문제로 인식하는 두 가지의 경우로 다시 세분할 수 있다.

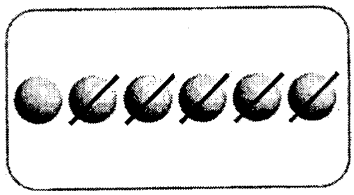
[그림]

<그림 10> 식을 쓰고 읽어보시오

한편, 교사를 상대로 한 설문에서는 응답자 9명 중 4명은 4+3 즉 덧셈Ⅰ 유형을 정답으로 보았고, 나머지 5명은 덧셈Ⅱ 유형을 정답이라고 응답하였다. 이는 아동의 다양한 반응에 비하여 대체적으로 교사는 <그림 10>의 전화기 문제를 덧셈으로 인식하고 있음을 알 수 있다. <그림 10>에 대한 오답으로는 4-3=1과 4-3라고 답하였다. 이와 같이 4-3=1 또는 4-3이 오답이라고 생각하는 이유를 면담한 결과, 시각적 표현이나 상징이 없기 때문이라고 응답하였다. 예를 들면, 아래의 두 그림과 같이 연산이 뺄셈임을 의미하는 화살표(↗)나 제거 표시(/)가 없기 때문을 그 이유로 설명하였다.



<그림 11> 화살표가 있는 뺄셈 유형



<그림 12> 그림을 삭제하는 뺄셈유형

이것은 교사의 경우, 화살표나 삭제를 의미하는 시각적 표현 '/'을 연산을 하는 데 있어 특별한 의미로 받아들이는 사례라고 하겠다. 이러한 생각은 다음과 같은 질문에 대한 응답과도 일맥상통한다.

다음은 어느 학생들이 위의 문제를 보고 [문장제]를 만든 것입니다. 바르지 않은 것은 어느 것인가요? · ( )

① 영훈: 영훈이네 전자상가에는 검은 색 전화기 4개와 흰 색 전화기 3개가 있습니다. 모두 몇 개의 전화기가 있습니까?
② 영선: 오늘은 슬기로운 생활시간에 병원 놀이를 하는 날. 모형 전화기를 모두 7개 모았습니다. 그 중 3개의 전화기를 승찬이네 모둠에게 주었습니다. 남은 전화기는 모두 몇 개인가요?
③ 진삼: 진삼이는 7개의 전화기를 그렸습니다. 검은 색 전화기는 4개를 그렸고, 흰색 전화기는 3개를 그렸습니다. 흰 색 전화기보다 검은 색 전화기를 몇 개 더 그렸나요?

2명의 교사가 '③'의 경우가 바르지 않은 경우로 지적하였는데, 그와 같이 응답한 이유로는 시각적 표현 및 특별한 상징이 없기 때문이라고 하였다. 또, 이와 같은 시각적 표현 및 '/'와 같은 특별한 상징에 대한 교사의 신념은 평가 문항을 매우 제한하여 진술하는 형태로 연계되는 양상을 보였다. 예를 들면, m와 cm와의 관계를 측정하기 위해 다음과 같은 문항을 출제하였다.

철수의 키는 103cm입니다. 몇 m 몇 cm입니까?·········· (   )
① 10m 3cm ② 10m 30cm ③ 1m 30cm ④ 1m 3cm

이 평가문항의 경우 매우 제한적인 서술로서 아동으로 하여금, 실생활의 유용성 및 상황에 대한 이해보다는 주로 수학적 기호 및 단위에 대한 암기를 한정적으로 묻는 상황으로 평가의 관점을 제한하고 있음을 알 수 있다. 이러한 한정적이고 제한된 문항 진술은 다음과 같은 문항진술로 변형될 수 있다.

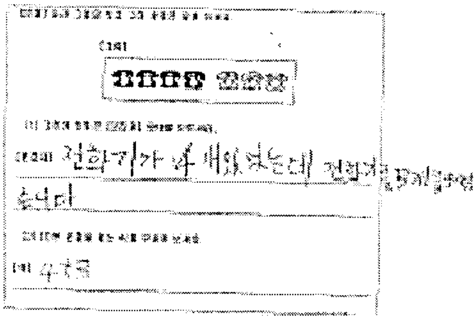
철수의 키는 103cm입니다. 바르게 나타낸 것은 어느 것입니까?·········· (   )
① 10m 3cm ② 10m 30cm ③ 1m 30cm ④ 1m 3cm

그러나 대부분의 교사는 이러한 포괄적인 문항진술보다는 한정적인 '……몇 m 몇 cm입니까?'라는 문항진술을 더 선호함을 설문 결과 알 수 있었다. 이러한 현상 역시 교사가 갖고 있는 수학텍스트에 있어서 시각적 표현 및 상징에 대한 신념을 보여주는 예이다.

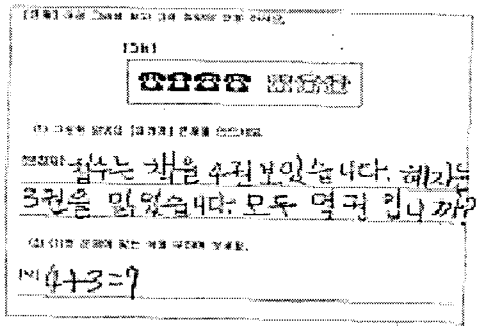
읽기에 대한 아동 응답을 분석해보면, 유형은 <표 2>, <표 3>과 같이 매우 다양함을 알 수 있다. 이러한 유형의 특징을 정리하면, 네 가지 경우로 정리할 수 있다. 첫째, 완전한 문장으로 읽는 경우, 예를 들면 '4 더하기 3은 7과 같습니다' 또는 '4 더하기 3은 7입니다'로 읽는 경우이다. 둘째, 불완전한 문장으로 읽는 경우, 예를 들면 '4 더하기 3은 7'또는 '7 빼기 3은 4'와 같은 경우이다. 셋째, 문자와 부호를 혼용하는 경우이다. 예를 들면, '4 더하기 3 ='이 그러한 경우이다. 넷째, 오류의 유형에서는 특이한 답을 발견할 수 있었는데, 그 예는 <그림 1>에서 제시한 바와 같다. 식을 읽는 것을 식의 값과 함께 혼용하여 쓰는 예이다. 식을 읽는 것에 대한 교사의 견해는 첫째, 식을 4+3=7이라고 하였을 때, 불완전한 문장 즉 '사 더하기 삼은 칠'과 같이 읽는다는 경우는 1명, 완전 문장 즉 '사 더하기 삼은 칠과 같습니다'의 경우는 2명, '사 더하기 삼'과 같은 경우는 6명이였다. 이것은 대체적으로 교사의 경우 수학기호 '='(등호)를 '서로 같음'으로 인식하고 있음을 나타낸다. 둘째, 식을 4+3이라고 응답한 교사의 경우, 식을 읽는 것은 모두 '사 더하기 삼'이라고 읽는다고 응답하였다.

(2) 그림에 알맞은 문장제를 만들어 보세요.

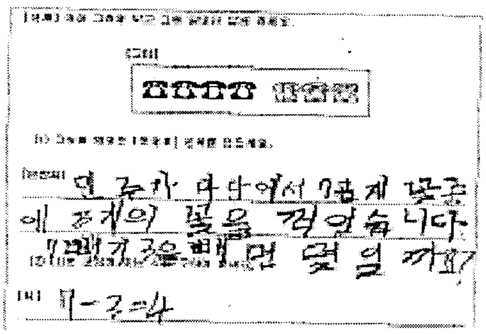
그림을 보고 그에 알맞은 문장제 문제를 만드는 질문에 대한 아동의 반응은 어떠한가? 참고로, 문장제라는 어휘의 뜻이 1학년 아동에게 어려운 어휘이기 때문에, 먼저 아동에게 문장제의 의미를 풀이하여 주는 시간을 제공하였다. 문장제의 뜻을 아는 아동이 있는지 물어보고, 서로 발표하는 시간을 줌으로써, 아동의 어휘에 알맞게 풀어보는 시간을 제공하였다.



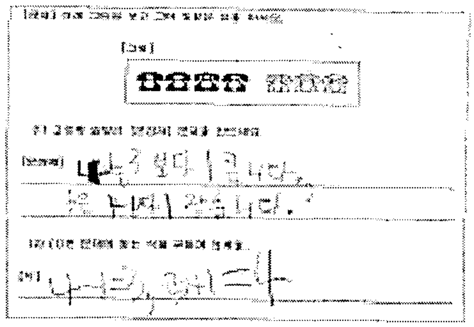
<그림 14> 4+3의 유형



<그림 15> 4+3=7의 유형



<그림 16> 7-3=4 유형



<그림 17> 기타

이 질문에 대한 답은 위에서 제시한 네 가지 예와 같았다. 그 유형을 분류하여 정리해보면, <표 4>와 같다.

<표 4> 그림에 알맞은 문장제를 만들어 보세요.

식 / 문장제	4+3 유형	4+3=7 유형	7-4=3	기타	계
4+3	4	9	·	·	13
4+3=7	4	14	·	1	19
7-4=3	·	·	1	·	1
기타	·	·	·	6	6
계	8	23	1	7	39

위 표에서 알 수 있는 바와 같이, 특이한 점으로는 문장제는 4+3의 유형으로 만들고, 식은 4+3=7과 같은 유형으로 만드는 아동은 9명, 문장제는 4+3=7의 유형으로 만들고, 식은 4+3의 유형으로 답한 아동이 4명이였다는 점이다. 구체적으로 예를 들면,

하니(가명) : 철이는 초콜릿 3개를 샀습니다. 근대 동대 아저씨가 사탕 4개를 주었습니다.[2)]
와 같이 문장제를 만들고 식은 4+3=7과 같이 쓰는 아동(9명)과

규석(가명) : 전화기 검정색 4개가 있습니다. 흰색 전화기 3개가 있습니다. 전화기는 모두 몇 개입니까?
와 같이 문장제를 만들고, 식은 4+3이라고 쓰는 아동(4명)을 발견할 수 있었다. 따라서 문장제를 만드는 문제를 통하여 교과서나 교사가 쓴 텍스트의 내용과 추론 과정 뿐 아니라 그 속에 암묵적으로 제시된 언어의 기능과 수사적 기술을 배울 기회가 학생들에게 제공된다. 또, 자신의 아이디어를 텍스트로 구성하면서, 그 내용과 형식을 교사나 다른 학생들이 이해할 수 있도록 분명하게 표현하는 학습을 경험하게 된다는 것도 확인할 수 있었다. 따라서 사고의 발달이 이루어지기 위해 언어가 선행되어야 하고 아동의 언어 발달에서 뿐 아니라 새로운 언어체계인 수학을 학습하면서 수학적 사고가 발달하기 위해서는 수학 언어가 자연스럽고 유연한 사고의 매개 수단으로서 사용되어야 함을 알 수 있다. 식 즉, 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현은 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등의 여러 기호와 함께 수학을 경험하게 해주는 수학텍스트의 한 부분으로 활용되어야 함을 알 수 있다.

또한, 이러한 문장제 문제를 만드는 과정에서 간접적으로 아동의 대인관계에 대한 생활상도 읽을 수 있었으며, 아동의 사고가 다양하게 확장되어 가는 것도 관찰할 수 있었다. 다음은 그러한 몇 가지 예이다.

ㅇ 덧셈유형

민주(가명) : 서영이네 집에는 전화기 4개 핸드폰 3개가 있습니다. 모두 몇 개?

소연(가명) : 미야는 오늘 아침에, 전화를 4번이나 전화 했습니다. 친구한테서는 3번이나 전화가 왔습니다.

태완(가명) : 전화기가 4개 있었는데, 전화기를 3개를 또 사왔습니다.

---

2) 아동의 실제 문장력을 보여주기 위해 맞춤법을 교정하지 않고 그대로 본 연구에 제시하였음.

ㅇ 뺄셈 유형

지연(가명) : 냉동실에 아이스크림 7개가 있습니다. 거기서 종식이가 4개를 먹었습니다. 그러면 남은 아이스크림은 몇 개 남았을까요?(7-4=3 유형)

위의 제시한 몇 가지 유형의 예를 통하여 교사는 다음과 같은 아동에 대한 정보를 얻게 된다.

첫째, 학교수학에 대한 아동의 인지를 볼 수 있다.

둘째, 문장제의 내용을 통하여서 아동의 수학적 사고가 현재 어떻게 전개되고 있는지 관찰할 수 있다.

셋째, 생활지도 측면에서 아동이 현재 어느 친구에게 호감을 갖고 있는지를 파악할 수 있는 기회를 제공한다.

5. 삶이 그대를 속일지라도

본 연구에서는 식에 대한 사전적 의미와 수학 텍스트에 있어서 식의 의미에 대한 이론적 고찰을 통하여 실제, 서울시 소재 어느 초등학교 수학경시대회에 출제된 식에 관한 문제에 대한 아동과 교사의 시각이 어떤 점이 같고 어떤 점이 다른지를 중점적으로 살펴보았다. 또, 식이란 수학에 있어서 어떠한 위치를 갖고 있는지, 수학텍스트에서의 식의 의미도 함께 살펴보았다. 따라서 본 연구의 결과 다음과 같은 점을 얻을 수 있었다.

첫째, 식이란 expression 혹은 formula를 의미한다. 식의 사전적 의미는 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현이다. 한편, 초등학교 교육내용에서 식은 4+3, 또는 4+3=7과 같은 형태로서 초등학교에서 다루어짐을 본 연구를 통하여 알 수 있었다.

둘째, 식은 교과서 등을 통하여 초등학교 아동에게 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현으로 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등의 여러 기호와 함께 언어로 서술하기 보다는 여러 식을 쓰는 것에 대한 다양한 경험을 통하여 제공되고 있음을 알 수 있었다. 예를 들면 [그림 4]와 같은 경우가 그러한 경우이다.

셋째, 초등학교 1학년 아동에게 있어서 식은 교사나 교과서를 통해 제공되는 수학적 텍스트의 일부로서 내용과 추론 과정 뿐 아니라 그 속에 암묵적으로 제시된 언어의 기능과 수사적 기술을 배울 기회를 제공함을 알 수 있었다. 이러한 기회를 통하여 수학적 사고의 발달이 이루어지며, 그 매개 수단으로는 수학 언어인 식이 자연스럽고 유연하게 작용됨을 알 수 있었다. 이러한 예는 그림에 알맞은 문장제 문제를 만들어 보는 활동을 통해 확인되었고, 몇 가지 예로는 [그림 14], [그림 15], [그림 16], [그림 17]을 들 수 있다.

넷째, 아동의 경우 다양한 표현이 식과 함께 수학적 사고를 발달하게 함에 반하여 교사의 경우는

제한적인 수학텍스트 '/', 화살표등의 특정적인 상징이 고정된 시각으로 식에 대한 해석에 반영되고 있음도 알 수 있었다. 그러한 예로 [그림 10]의 전화기 문제를 아동은 '4-3', '4-3=1'과 같은 식도 만들지만, 교사는 이와 같은 뺄셈식은 오답으로 인정하려는 경향을 보였고, 덧셈으로 [그림 10]의 문제를 인식하려는 경향을 보임을 들 수 있다.

따라서 본 연구 결과 다음과 같은 점을 제언하고자 한다.

첫째, 아동으로 하여금 자연스러운 수학언어를 매개로 하여 수학적 사고를 발달되도록 하려면, 수학적 텍스트의 하나인 식은 4+3=7, 4+3 이외에, 화살표를 이용한 식, '/' 또는 '↺'와 같은 다양한 표현 방법을 이용하여 지도되어야 할 것이다. 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현인 식은 그 표현에 있어서 다양성을 추구해야 할 것이다. 따라서, 그러한 대안으로 본 연구에서는 Matheamtics in Context의 Expression and Formulas의 화살표를 이용한 식을 예로 제시하였다.

둘째, 이러한 수학적 사고의 다양성이 교사보다는 아동에게 많이 관찰되는 바, 교사의 다양한 시각의 전환을 위한 노력이 우선시되어야 할 것이다. 즉 다양한 교사 연수, 교사 교육 프로그램이 개발·진행되어야 할 것이다.

셋째, 다양한 교사 연수 프로그램, 다양한 표현 방법을 이용한 식의 지도를 위하여 식을 다양하게 표현하는 많은 교재의 개발이 선행되어야 할 것이다.

넷째, 교사는 기존의 절대 평가 및 상대평가의 개념에서 벗어나, 아동의 사고를 깊이 숙고하여 아동의 발달에 조력할 수 있도록 아동의 발달 및 수학적 사고에 대한 폭 넓은 이해를 하기 위한 꾸준한 노력과 여유를 갖아야 할 것이다.

비록, 식의 사전적 정의가 어느 숫자를 나타내 주는 일련의 수, 문자, 부호들로 이루어진 하나의 표현이라고 할지라도 초등학생에게 있어서 식에 대한 이해가 일상 언어, 시각적 표현, 상징 등의 여러 기호를 통하여 학생들이 수학적 의미를 깨닫고 알맞은 수학적 표현을 만들어 문제를 해결하고 상징을 조작하여 공식을 유도하는 등의 수학을 경험에 밑바탕을 둔다면, 교사는 아동의 불완전하고 미완성된 식의 표현 속에서 수학적 사고의 발달과 그 사고의 전개를 읽을 수 있는 마음의 여유를 갖아야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2000). 수학 1-가, 서울 : 교육부

교육인적자원부 (2000). 수학익힘책 1-가, 서울 : 교육부

교육인적자원부 (2000). 초등학교 교사용 지도서 수학 1-가, 서울 : 교육부

김용운 (1998). 수학용어숙어영한한영사전, 서울 : 우성문화사

김선주 (2003). SSAT·SAT 수학용어사전, 서울:이지북

김동범(편) (2003). 삶이 그대를 슬프게 할지라도, 서울: 푸르름

김선희 · 이종희 (2003). 학교수학에서 기하 증명 텍스트의 분석, 대한수학교육학회 논문집 **제13권 1호**, 대한수학교육학회, pp.13-28.

김선희 · 이종희 (2003). 중학생들의 수학적 언어 수준, 대한수학교육학회 논문집 **제13권 2호**, 대한수학교육학회, pp.123-141.

나온교육연구소 (2003). 식과 공식, 서울:이우

대한수학회 (1995). 수학용어집, 서울:경문사

박교식 (1999). 수학기호 다시 보기 (1), 서울:수학사랑

박교식 (2003). 수학용어 다시 보기 (2), 서울:수학사랑

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 교육학박사학위논문.

片桐重男 (1992). 수학적인 생각의 구체화, 서울 : 경문사

Duval, R. (1998). *Geometry from cognitive point of view*. In C. Mammana & V. Villani(Eds.), Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st century, pp.37-51.

Ernest, P. (1999). Form of knowledge in mathematics and mathematics education : philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, **38**, pp.67-83.

Halliday, M. A. K. (1975). *Language How To Mean-Explorations in the Development of Language*, Victoria(Australia): Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. (1985). *An introduction to functional grammar*. London: Edward Arnold.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA : The Author.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA : The Author.

O'Halloran. K. (1999). Towards a systematic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica*, **124-1/2**, pp.1-29.

Romberg et al. (2003). *Expression and Formulas : Mathematics in Context*, Encyclopædia Britannica

[On-line] available http://www.naonedu.net