

강-소성 모델을 이용한 양단 고정보의 손상곡선

Damage Curves of the Fixed Ends Beam with the Rigid-Plastic Model

김 석 기*

Kim, Seok Ki

Abstract

The fixed ends beam is analyzed by the s d o f system with the rigid-plastic model. And the safety criteria of the fixed ends beam to the impulsive loads are established with the peak-load ratio to the static collapse load and impulse ratio to the ideal impulse producing the critical displacement. It is shown that the impulse and the peak-load of the impulsive loads are the important factors for the damage of the structures. It is also shown that the damage curves with the peak-load and impulse ratio are useful method to estimate the damage of the structures due to the emphasis on the equivalent dynamic loads rather than the equivalent static loads in the process of deriving the curve.

요 지

충격하중에 대한 양단 고정보의 거동을 강-소성 모델을 이용하여 파악 하였다 또한 손상을 발생시키는 정역학적 붕괴하중과 이상임펄스에 대한 하중최대치 비와 임펄스 비를 이용하여 손상곡선을 작성하였다 작성된 손상곡선으로부터 충격하중의 하중 최대치와 임펄스는 구조물의 안전에 중요 변수가 됨을 보였으며 또한 하중최대치 비와 임펄스 비로 작성된 손상곡선은 하중작용시간과 하중의 형태 그리고 구조물의 동적 특성이 함께 고려된 기준으로, 등가 동하중에 초점을 맞추어 일괄적으로 구조물의 안전성을 판단할 수 있는 방법이다

Keywords : Damage Curves, Peak Load, Impulse, Rigid-Plastic Model

핵심 용어 : 손상곡선, 최대하중, 임펄스, 강-소성 모델

* 단국대학교 공학부 토목환경공학전공 교수

E-mail skim@ Dankook.ac.kr ☎41-550-3523

• 본 논문에 대한 토의를 2004년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 2005년 4월호에 토론결과를 게재하겠습니다

1. 서론

높은 압력을 갖고 순간적으로 종료하는 충격하중에 대한 실제 구조물의 붕괴현상은 소성영역에서 이루어지며 붕괴 시의 변위가 일정한 붕괴형상(failure mode)을 보일 경우에는 일 자유도 계로 해석 할 수 있다. 충격하중에 대한 구조물의 안전성 검토 절차는 우선 충격하중의 특성을 파악하고, 충격하중에 의한 구조물의 붕괴형상을 파악한 후, 붕괴형상에 근거한 수학적 모델의 계수와 저항함수(resistance function)를 결정함으로써 이루어진다(Shen 등, 1993, Olson 등, 1993, Watson 등, 1989, Wees 등, 1995) 아래 그림에는 붕괴형상에 근거한 일 자유도계 모델과 탄-소성(elastic-plastic) 저항함수가 나타나 있다.

양단 고정보에 작용하는 집중하중의 크기가 탄성한계를 초과하여 계속 증가하면 최대모멘트가 발생되는 보의 내부와 양 지점에 소성힌지가 형성되며, 보의 내부와 양단에 형성된 소성힌지로 인하여 구조물은 불안정한 상태가 되어 하중이 더 증가할 경우 사용 한계상태나 강도 한계상태에 도달하여 붕괴하게 된다. 보의

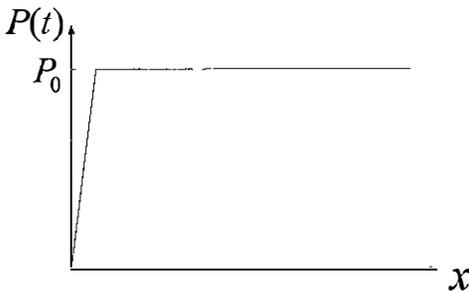
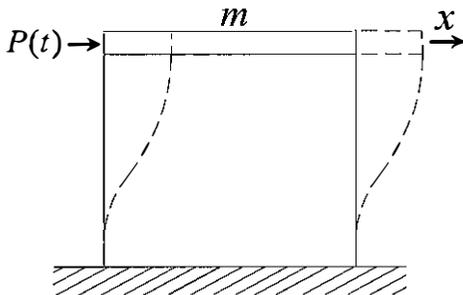


Fig 1 탄-소성 모델

중양에 작용하는 충격하중으로 인한 양단 고정보의 붕괴는 보의 중앙과 양 지점에 소성힌지가 형성되어 발생하게 되며, 이때 붕괴 시의 변위가 탄성영역의 변위와 비교하여 대단히 큰 경우에는 강-소성 모델을 저항함수로 사용한 일 자유도계로 해석 할 수 있다.

강-소성 모델의 하중-변위 곡선은 탄성영역에서는 강체로 그리고 소성영역에서는 완전소성(perfect plastic) 거동상태를 갖으며 양단 고정보의 경우 탄성영역에서는 강체로 그리고 소성영역에서는 소성힌지의 형성에 의한 완전 소성거동상태로 표현 할 수 있다.

순간적으로 종료하는 충격하중이 구조물에 작용할 때, 하중-시간 곡선하의 면적으로 정의되는 충격하중의 임펄스는 초기속도의 형태로 방출된다. 따라서 충격 하중에 의한 구조물의 거동은 초기속도에 의한 거동으로 볼 수 있으며, 이때 초기속도의 크기는 충격하중의 임펄스의 크기에 의해 결정된다. 초기속도의 크기를 결정짓는 이러한 임펄스는 하중-시간 곡선하의 면적으로 정의되기 때문에 충격하중에 대한 구조물의 거동은 충격하중의 최대치와 형태 그리고 하중작용시간(duration of loading)에 의해 영향을 받게 된다.

본 연구에서는 보의 중앙에 작용하는 충격하중에 대한 양단 고정보를 강-소성 모델을 저항함수로 사용한 일 자유도계로 해석하며, 양단 고정보의 안전을 파악할 수 있는 손상곡선을 하중최대치와 임펄스를 변수로 사용하여 작성한다. 작성된 손상곡선은 하중의 동적 특성과 구조물의 동적 특성이 함께 고려된 방법으로, 임계변위를 발생시키는 등가 동하중에 초점을 맞추고 있는 방법이다. 충격하중의 형태로는 사각형, 삼각형, 그리고 지수형태의 충격하중을 사용하며, 저항함수로서는 강-소성 모델을 사용한다.

2. 양단 고정보의 강-소성 거동

아래 Fig 2에는 양단 고정보의 붕괴형상이 나타나 있으며, 그림에서 P_0 는 양단과 중앙에 소성힌지를 발생시키는 정역학적 붕괴하중(static collapse load)의 크기이다. 양단 고정보의 안전성은 붕괴 시의 변위가 탄성영역의 변위와 비교하여 대단히 큰 경우 강-소성 모델을 저항함수로 사용하여 검토 할 수 있으며 Fig

3에는 지점의 처짐각과 하중을 변수로 사용하여 작성된 양단 고정보의 저항함수가 나타나 있다. Fig 3에 나타난 저항함수는 하중의 크기가 정역학적 붕괴하중보다 작을 때에는 강체로, 큰 경우에는 소성힌지의 회전에 의한 지점 처짐각의 완전 소성거동을 나타낸다

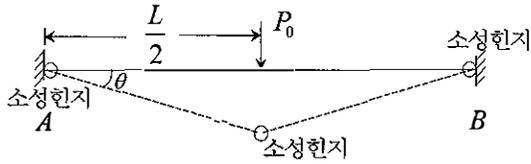


Fig 2 붕괴형상

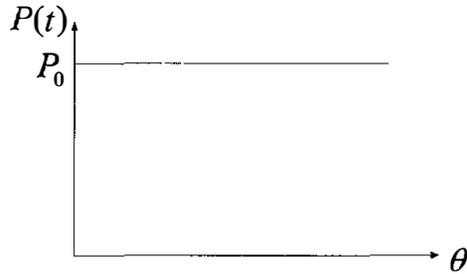


Fig 3 강-소성 모델

양단 고정보의 중앙에 작용하는 집중하중의 크기가 증가하면 양단과 중앙에 소성힌지가 형성되어 붕괴하게 된다. 이때 양단과 중앙에 소성힌지를 발생시키는 붕괴하중의 크기는 소성힌지가 형성된 평형상태에 가상변위를 추가하여 일의 원리 식을 세우면 구할 수 있으며, 이러한 방법으로 구한 붕괴하중과 소성힌지에 발생된 소성모멘트(plastic moment)의 관계는 다음과 같다

$$M_p = \frac{P_0 L}{8} \quad (1)$$

2.1 이상임펄스 거동

이상임펄스는 하중의 크기는 무한대로 큰 반면 하중 작용시간은 무한소로 짧은 하중을 말한다. 이상임펄스와 같이 순간적으로 종료하는 하중에 의한 구조물의

거동은 초기속도에 의한 자유진동으로 볼 수 있으며 이때 초기속도의 크기는 모멘텀-임펄스 관계를 이용하면 구할 수 있다

Fig 4에는 보 중앙에 작용한 이상임펄스에 의한 양단 고정보의 자유물체도가 대칭성을 이용하여 작성되어 있으며, 아래의 식(2)에는 Fig 4의 자유물체도로부터 유도한 운동방정식이 나타나 있다

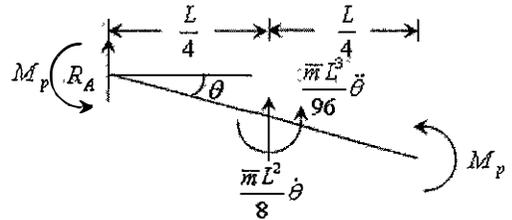


Fig 4 자유물체도(이상임펄스)

$$\frac{m L^3}{32} \theta'' + \frac{m L^3}{96} \theta'' + 2M_p = 0 \quad (2)$$

보 중앙에 작용한 이상임펄스에 의한 지점 처짐각의 시간이력은 식 (2)의 적분을 통하여 구할 수 있으나 적분과정에서 발생한 적분상수의 값을 찾기 위해서는 필요조건으로 지점의 초기 각속도를 구하여야 한다. 이상임펄스의 작용에 의한 지점의 초기 각속도는 모멘텀-임펄스 관계식을 사용하면 구할 수 있으며, Fig 5에는 모멘텀-임펄스 관계식을 세우기 위하여 작성된, 임펄스 값이 I인 이상임펄스에 의한 양단 고정보의 속도 분포도가 대칭성을 이용하여 작성되어 있다

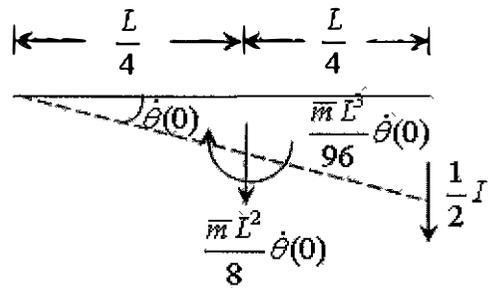


Fig 5 속도 분포도

Fig 5를 이용하여 각 모멘텀-임펄스(angular momentum-impulse) 관계식을 지점에 대하여 세우면 아래 식 (3)과 같으며, 식 (3)을 이용하여 이상임펄스의 작용에 의한 지점의 초기 각속도를 구하면 식 (4)와 같다

$$\frac{\bar{m}L^3}{32} \theta(0) + \frac{\bar{m}L^3}{96} \dot{\theta}(0) = \frac{1}{4} IL \quad (3)$$

$$\dot{\theta}(0) = 6 \frac{I}{mL^2} \quad (4)$$

보 중앙에 작용하는 임펄스 값이 I 인 이상임펄스에 의한 지점 처짐각의 시간이력은 식(4)의 초기조건 그리고 소성모멘트와 붕괴하중의 관계식(1)을 식(2)의 적분결과에 대입하여 구하면 다음과 같다.

$$\theta(t) = -3 \frac{P_0}{mL^2} t^2 + 6 \frac{I}{mL^2} t \quad (5)$$

Fig 6에는 임펄스 값이 I 인 이상임펄스에 의한 지점 처짐각의 시간이력이 식(5)를 이용하여 작성되어 있으며 최대 값은 아래와 같다

$$\theta_{\max}^i = \theta(t = \frac{I}{P_0}) = 3 \frac{1}{mL^2} \frac{I^2}{P_0} \quad (6)$$

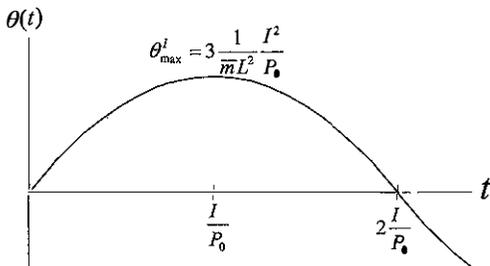


Fig 6 이상임펄스 거동

22 계단하중 거동

계단하중은 이상임펄스와는 반대로 하중작용시간이 무한대로 긴 하중이며 무한대의 임펄스 값을 갖는다 Fig 7에는 계단하중이 작용하는 양단 고정보의 자유물체도가 대칭성을 이용하여 작성되어 있으며, 식(7)에는 Fig 7의 자유물체도로부터 유도한 운동방정식이 나타나 있다 계단하중에 의한 지점 처짐각의 시간이력은 식(7)의 적분을 통하여 구하면 식(8)과 같다

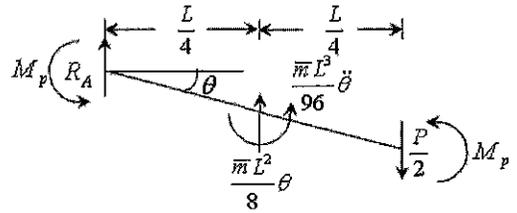


Fig 7 자유물체도(계단하중)

$$\frac{\bar{m}L^3}{32} \theta + \frac{\bar{m}L^3}{96} \dot{\theta} - \frac{PL}{4} + 2M_b = 0 \quad (7)$$

$$\theta(t) = 3 \frac{P - P_0}{mL^2} t^2 \quad (8)$$

여기서 P 는 계단하중의 크기이며, 강-소성 거동을 갖는 양단 고정보의 경우 계단하중의 크기가 붕괴하중보다 큰 경우에만 변위가 발생된다.

2.3 사각형하중 거동

하중작용시간이 τ 인 사각형 형태 충격하중에 대한 양단 고정보의 거동은 하중작용구간과 하중 종료후의 구간으로 나누어 구하여야 하며 하중작용구간에서는 계단하중에 의한 거동과 동일하다 하중 종료 후 자유진동 구간의 운동방정식과 지점 처짐각의 시간이력은 다음과 같다

$$\frac{\bar{m}L^3}{32} \theta'(t) + \frac{\bar{m}L^3}{96} \ddot{\theta}(t) + 2M_b = 0 \quad (9)$$

$$\theta(t) = -3 \frac{P_0}{mL^2} t^2 + 6 \frac{P - P_0}{mL^2} \tau t + 3 \frac{P - P_0}{mL^2} \tau^2 \quad (10)$$

여기서 $t' = t - \tau$ 이며, 아래 그림에는 사각형태 충격하중에 의한 양단 고정보의 지점 처짐각의 시간이력 이 식(10)을 이용하여 작성되어 있다

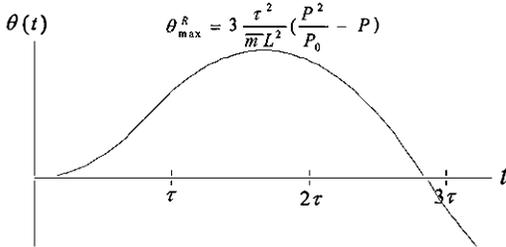


Fig 8 사각형 하중 거동

그림으로부터 사각형태 충격하중에 의한 최대 처짐각은 하중종료 후에 발생되며 그 크기는 아래와 같다

$$\theta_{\max}^R = \theta\left(t' = \frac{P - P_0}{P_0} \tau\right) = 3 \frac{\tau^2}{mL^2} \left(\frac{P^2}{P_0} - P\right) \quad (11)$$

2.4 삼각형 하중 거동

아래 그림에는 하중 최대치가 P 이고 하중작용시간은 τ , 그리고 임펄스 값은 $P\tau/2$ 인 삼각형 형태의 충격하중이 나타나 있다

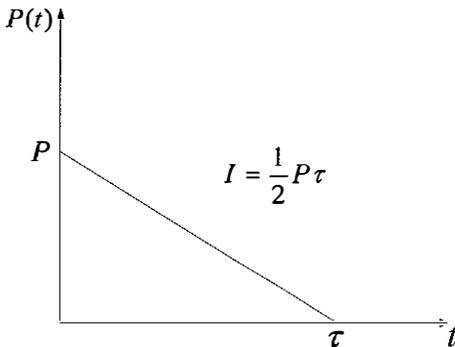


Fig 9 삼각형 하중

삼각형 형태의 충격하중에 대한 양단 고정보의 거동도 사각형 하중과 같이 하중작용구간과 하중 종료후의

구간으로 나누어 구하여야 하며, 하중작용구간의 운동방정식과 처짐각은 다음과 같다

$$\frac{\overline{mL}^3}{32} \ddot{\theta} + \frac{\overline{mL}^3}{96} \dot{\theta} - \frac{P(t)L}{4} + 2M_p = 0 \quad (12)$$

$$\theta(t) = 3 \frac{t^2}{mL^2} \left(-\frac{P}{3\tau} t + P - P_0\right) \quad (13)$$

여기서 $P(t)$ 는 삼각형 하중이다. 하중종료 후 자유진동 구간의 운동방정식과 지점 처짐각의 시간이력은 다음과 같다

$$\frac{\overline{mL}^3}{32} \theta(t') + \frac{\overline{mL}^3}{96} \dot{\theta}(t') + 2M_p = 0 \quad (14)$$

$$\theta(t') = -6 \frac{P_0}{mL^2} t'^2 + c_1 t' + c_2 \quad (15)$$

여기서 $t' = t - \tau$ 이며 c_1, c_2 는 적분상수이다

삼각형 형태의 충격하중이 양단 고정보에 작용하는 경우 하중최대치가 $2P_0$ 보다 작은 경우에는 하중작용구간에서 최대 값이 발생되며 그 크기는 아래와 같다

$$\theta_{\max}^{\tau} = \theta\left\{t = 2\left(1 - \frac{P_0}{P}\right)\tau\right\} = 4 \frac{\tau^2}{mL^2} \left\{\frac{(P - P_0)^3}{P^2}\right\} \quad (16)$$

하중최대치가 $2P_0$ 보다 큰 경우에는 하중종료 후에 최대 값이 발생되며 그 크기는 아래와 같다.

$$\theta_{\max}^{\tau} = \theta\left\{t' = \frac{1}{2} \frac{P - 2P_0}{P_0} \tau\right\} = \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{mL^2} \left\{3 \frac{P^2}{P_0} - 4P\right\} \quad (17)$$

2.5 지수하중 거동

아래 그림에는 하중 최대치가 P 그리고 유효 하중작용시간이 τ 인 지수형태 충격하중이 나타나 있으며 이러한 지수형태 충격하중의 임펄스 값은 적분과정을

이용하여 구하면 $P\tau$ 이다

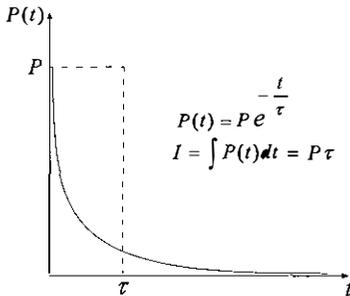


Fig 10 지수하중

지수형태 충격하중이 작용하는 양단 고정정보의 운동 방정식은 다음과 같다

$$\frac{\overline{mL}^3}{32} \ddot{\theta} + \frac{\overline{mL}^3}{96} \dot{\theta} - \frac{P(t)L}{4} + 2M_p = 0 \quad (18)$$

여기서 $P(t)$ 는 지수형태 충격하중이다 지수형태 충격하중에 의한 양단 고정정보 지점의 처짐각속도와 처짐각의 시간이력은 각각 아래의 식(19) 그리고 (20)과 같다

$$\dot{\theta}(t) = 6 \frac{1}{mL^2} (-Pr e^{-\frac{t}{\tau}} - P_0 t + Pr) \quad (19)$$

$$\theta(t) = 6 \frac{1}{mL^2} (Pr^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{P_0}{2} t^2 + Prt - Pr^2) \quad (20)$$

지수형태 충격하중에 의한 지점의 최대 처짐각은 다음과 같이 구할 수 있다. 최대 처짐각은 정지 중에 발생되며 따라서 식 (19)을 0으로 놓으면 최대 처짐각이 발생하는 시각을 아래와 같이 음 함수의 형태로 구할 수 있다.

$$\frac{t^*}{\tau} = \frac{P}{P_0} (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) \quad (21)$$

여기서 t^* 는 최대 처짐각이 발생하는 시각이며, 음 함수의 형태로 나타나기 때문에 명시적으로 구할 수는 없으나, 식 (20)에 대입하면 지수형태 충격하중에 의한 최대 처짐각을 아래와 같이 구할 수 있다

$$\theta_{\max} = 6 \frac{\tau^2}{mL^2} \left\{ \left(-P + \frac{P^2}{P_0} \right) (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) - \frac{1}{2} \frac{P^2}{P_0} (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}})^2 \right\} \quad (22)$$

또한 위의 식에서 지수 항이 있는 괄호 안의 값들을 식 (21)을 이용하여 정리하면 지수형태 충격하중에 의한 최대 처짐각은 다음과 같다

$$\theta_{\max}^E = 6 \frac{\tau^2}{mL^2} \left\{ (P - P_0) \frac{t^*}{\tau} - \frac{1}{2} P_0 \left(\frac{t^*}{\tau} \right)^2 \right\} \quad (23)$$

3 손상곡선

충격하중에 대해 구조물의 안전성을 검토 할 수 있는 손상곡선은 이상임펄스에 의한 임계변위와 충격하중에 의한 최대변위를 등치시킨 후, 충격하중의 임펄스 비와 하중최대치 비를 변수로 사용하여 구할 수 있으며, 여기서 임계변위는 구조물의 용도 및 목적에 따라 서로 다른 값을 가질 수도 있다 이상임펄스에 의한 양단 고정정보의 지점 처짐각의 최대 값은 식(6)과 같으며, 임펄스 값이 I_0 인 이상임펄스에 의해 임계변위가 발생되었다면 임계 처짐각은 다음과 같다

$$\theta_{cr} = 3 \frac{1}{mL^2} \frac{I_0^2}{P_0} \quad (24)$$

3.1 사각형하중 손상곡선

사각형 형태 충격하중이 양단 고정정보에 작용하는 경우, 최대 값은 식 (11)과 같으며, 식 (24)의 임계 처짐각과 등치시키면 사각형 형태 충격하중에 대한 손상곡선 식을 아래와 같이 구할 수 있다

$$I^2 = P/(P - 1) \quad (25)$$

여기서 I, P는 임계변위를 발생시키는 이상임펄스와 정역학적 붕괴하중에 대한 사각형 하중의 임펄스와 하중최대치의 비로 각각 아래와 같다

$$I = \frac{I}{I_0}, P = \frac{P}{P_0} \quad (26)$$

3.2 삼각형 하중 손상곡선

삼각형 형태 충격하중의 하중최대치가 $2P_0$ 보다 작을 때에는 하중작용 구간 내에서 최대치가 발생하며, 최대 처짐각은 식 (16)과 같다. 하중최대치가 $2P_0$ 보다 큰 경우에는 하중종료 후에 최대치가 발생하며, 최대 처짐각은 식 (17)과 같다 이들 최대 값을 이상임펄스에 의한 임계 처짐각인 식 (24)와 동치시키면 삼각형 형태 충격하중에 대한 손상곡선 식을 아래와 같이 구할 수 있다

$$I^2 = \frac{3}{16} [P^4/(P - 1)^3], 1 \leq P \leq 2 \quad (27)$$

$$I^2 = 3P/(3P - 4), 2 \leq P \quad (28)$$

3.3 지수하중 손상곡선

지수 형태 충격하중이 작용하는 경우, 최대 지점 처짐각은 식 (23)과 같으며, 식 (24)의 임계 처짐각과 동치시키면 지수 형태 충격하중에 대한 손상곡선 식을 아래와 같이 구할 수 있다

$$I^2 = \frac{P^2}{2(P - 1) \frac{t^*}{\tau} - (\frac{t^*}{\tau})^2} \quad (29)$$

아래 그림에는 사각형, 삼각형, 그리고 지수형태 충격하중에 대한 양단 고정정보의 손상곡선이 식 (25), (27), (28), 그리고 (29)를 이용하여 도시되어 있다.

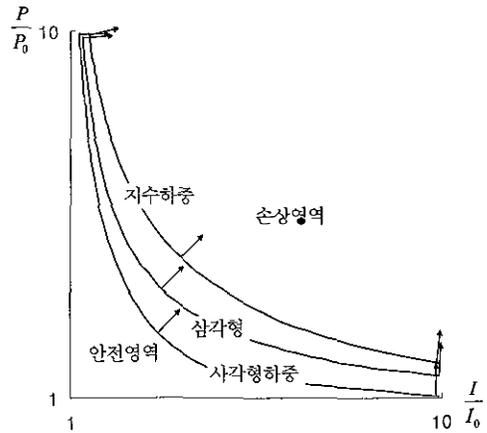


Fig 11 손상공선

Fig 11에 도시된 손상공선들은 동일한 임계변위를 발생시키는 하중들의 집합으로, 정역학적 붕괴하중에 대한 하중 최대치의 비와 임펄스 비를 이용하여 작성되어 있다. 손상공선의 우측 상단은 손상영역을 나타내며 우측 상단에 속한 하중이 작용하면 양단고정보에는 임계변위를 초과하는 변위가 발생한다. 손상영역의 반대편은 안전영역을 나타내며 안전영역에 속한 하중에 의한 양단 고정정보의 변위는 임계변위를 초과하지 않는다. 여기서 임계변위는 구조물의 용도 및 목적에 따라 사용한계상태나 강도한계상태로 정의 할 수 있다. 또한 손상공선 상의 화살표는 손상을 발생시킬 수 있는 하중 최대치의 비와 임펄스 비의 방향을 나타낸다.

각 손상공선에 도시된 그래디언트로부터 단기하중인 경우에는 임펄스가 그리고 장기하중인 경우에는 하중 최대치가 안전에 주요변수가 되는 것을 알 수 있으며 중기하중인 경우 임펄스와 하중최대치 모두 구조물 안전에 중요 변수가 되는 것을 알 수 있다.

Fig 11에 도시된 손상영역의 크기는 사각형, 삼각형, 그리고 지수 형태 하중의 순서로 분포되어 있는 것을 볼 수 있으며 이러한 손상영역의 분포로부터 동일한 하중작용시간을 갖는 여러 충격하중에 대한 손상영역의 크기는 충격하중의 임펄스 값에 의해 결정되는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

높은 압력을 갖고 순간적으로 종료하는 충격하중에 대한 양단 고정보의 거동을 강-소성 모델을 이용한 일자유도계로 해석하였으며, 또한 하중최대치 비와 임펄스 비를 변수로 사용하여 손상곡선을 작성하였다

손상곡선 작성 결과 장기하중인 경우에는 충격하중의 최대치가 그리고 단기하중인 경우에는 임펄스가 구조물의 안전에 주요변수가 되며 중기하중인 경우 임펄스와 하중최대치 모두 구조물 안전에 중요 변수가 되는 것을 파악하였다 또한 여러 형태 충격하중에 대한 손상영역의 크기는 임펄스의 크기가 증가되는 순서로 확대되었다

하중 최대치와 임펄스를 변수로 사용하여 작성된 손상기준은 하중의 동적 특성과 함께 구조물의 동적 특성도 고려된 기준으로 동일한 손상을 발생시키는 동가동하중에 초점을 맞추고 있는 방법이다

감사의 글

이 연구는 2002학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

참고문헌

- 1 Olson, M D, Nurick G N and Frogan, J R., "Deformation and Rupture of Blast Loaded Square Plates Prediction and Experiments". Int J Impact Eng 132, 1993
- 2 Shen, W and Jones, N, "Dynamic Response and Failure of Fully Clamped Circular Plates under Impulsive Loading", Int. J impact Eng 132, 1993, pp 259~291
- 3 Watson AJ, Hobbs B, Wright SJ, "Scaling Explosive Damage to Reinforced Concrete Beams and Slabs, Proceedings of the First International Conference on Structures under Shock and Impact, Cambridge", MA, USA, 1989 July, pp 15~28
- 4 Wees, Rolf MM van, Peters, Dirk-Jan, "Accuracy and Range of Applicability of the Single-Degree-of-Freedom Method, Proceedings of the Seventh International Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures", 24-28 . Mannheim, Germany, 1995 April, pp 371~380

(접수일자 : 2004년 9월 5일) (급행)