

# 직접수정된 8절점 가정변형률 유한요소를 이용한 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동 해석

Static, Buckling and Free Vibration Analyses of Fibrous Composite Plate using  
Improved 8-Node Strain-Assumed Finite Formulation by Direct Modification

박 원 태\*                      천 경 식\*\*                      임 성 순\*\*\*  
Park, Won-Tae              Chun, Kyoung-Sik              Yhim, Sung-Soon

## Abstract

In this paper, a simple improved 8-node finite element for the finite element analysis of fibrous composite plates is presented by using the direct modification. We derive explicit expressions of shape functions for the 8-node element with bilinear element geometry, which is modified so that it can represent any quadratic fields in Cartesian coordinates. The refined first-order shear deformation theory is proposed, which results in parabolic through-thickness distribution of the transverse shear strains and stresses from the formulation based on the third-order shear deformation theory. It eliminates the need for shear correction factors in the first-order theory. This finite element is further improved by combined use of assumed strain, modified shape function, and refined first-order theory. To show the effectiveness of our simple modification on the 8-node finite elements, numerical studies are carried out the static, buckling and free vibration analysis of fibrous composite plates.

## 요 지

본 논문에서는 복합적층판의 유한요소해석을 위해 직접수정법으로 간단히 개선된 8절점 유한요소를 제안하였다. 우선, 9절점 등매개변수 요소와 동일한 조건하에서 이차다항식을 표현할 수 있도록 형상함수를 수정하며, 이를 외시적(explicit)으로 표현하였다. 전단보정계수를 갖는 1차전단변형이론을 고차전단변형이론에 근거하여 간단히 개선함으로써 두께방향으로 전단응력 및 변형률이 포물선 분포를 가지도록 하였다. 더 이상의 전단보정계수가 필요하지 않다. 따라서 간단한 직접수정법 즉, 형상함수의 수정, 1차전단변형이론의 개선 및 가정변형률을 조합함으로써 8절점 유한요소의 성능을 개선하였다. 제안된 유한요소를 이용하여 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동 수치해석을 실시하여 비교검증하였다.

**Keywords** : 8-Node Finite Element, Direct Modification, Refined First-order Theory, Modified Shape Function, Assumed Strains

\* 정회원, 천안공업대학 토목과 부교수, 공학박사

\*\* 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사수료

\*\*\* 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

E-mail : pwtac@cntc.ac.kr 041-550-0355

•본 논문에 대한 토의를 2004년 12월 31일까지 학회로 보내주  
시면 2005년 4월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서론

전단변형을 고려하면서 제시된 1차전단변형이론(FSDT)은 면내변위는 선형, 횡방향 변위는 두께방향으로 일정하다는 가정하에 적절한 전단보정계수를 도입하였으며, 현재 대부분의 유한요소해에 폭넓게 적용되고 있다. 그러나 전단응력 및 변형률이 판/셸의 상하면에서 0이 되지 않아 경계조건을 만족할 수 없다. 이를 개선하고 3차원 탄성해에 보다 근접한 거동을 나타낼 수 있도록 변위장을 Taylor 확장식으로 전개한 고차이론이 제시되었다.

Reddy(1984)는 전단응력과 변형률이 판의 상하면에서 0이 되어야하는 조건을 이용하여 보다 단순화된 고차전단변형이론(TSDT)을 제시하였으며, 최근 Kant와 Swaminathan(2000, 2001, and 2002)은 일반화된 Hooke의 법칙을 이용하여 종방향 수직변형률/응력의 효과와 종방향 뒤틀림 등을 고려한 3차원 고차전단변형이론(HSDT)을 제시하였다. 또한 천경식등(2003a)은 다양한 고차전단변형이론을 이용하여 8절점 유한요소를 개발하여 각 고차이론에 따른 수치해석결과를 비교분석하였다. 하지만 고차전단변형이론은 최소한 절점당 7개 이상의 자유도를 포함하고 있으므로 보다 많은 계산량과 시간을 요구한다.

그러므로 고차전단변형이론이 아닌 1차전단변형이론에 근거한 유한요소들이 꾸준히 개발된다. 이들 중 8절점 유한요소는 폭넓게 적용되고 있는 유한요소이다. 그러나 평행사변형으로부터 유도된 8절점 형상함수에 의한 단점이 9절점 유한요소와 비교되면서 제시되었다(Lee와 Bathe, 1993; 천경식 등, 2004a). 사실 8절점 형상함수를 표현하는 등매개변수 다항식은 9절점 등매개변수 다항식에 비해 완벽하지 못하다.

8절점 유한요소의 단점을 극복하고자 MacNeal과 Harder (1992)는 볼록쌍일차 함수식(convex bilinear subparametric shape)를 도입하여 형상함수를 수정함으로써 효과적인 거동개선을 보였다. Kikuchi 등(1999)은 9절점의 내부 절점에 대한 형상함수와 선형 구속조건(linear constraint condition)에 의해 남겨진 2개의 자유도를 결정함으로써 8절점 형상함수를 수정, 보완하였다. 형상함수를 수정하는 대신 Donea와

Lamain(1987)은 Jacobian 행렬을 이용하여 대체할 전단변형률을 직접적으로 유도함으로써 전단에너지에 대한 정상적분을 수행하고, 요소의 찌그러짐을 보다 잘 구현할 수 있도록 하였다. 그러나 4절점 이외에 8절점이나 9절점은 대체전단변형률 유도방법이 쉽지 않고 매우 복잡한 식을 이끌어내므로 비효율적이다.

최근에는 추가변형률(enhanced assumed strain)과 비적합 변위모드(incompatible displacement mode)에 의해 유한요소의 많은 발전이 이루어졌다. 박원태등(2004b)은 추가변형률 유한요소와 직접적분법을 이용하여 곡선패널의 비감쇠 강제진동응답을 규명하였다. 천경식등(2004a)은 앞서 Kikuchi등(1999)이 제안한 수정된 형상함수와 EAS 접근방법에 근거한 Bubble 함수식으로 변형률을 보강함으로써 개선된 8절점 유한요소를 제시하였다. 또한 천경식등(2004b)은 Bubble 함수식을 이용하여 기존의 추가변형률 4절점 유한요소의 성능개선방안을 제시하였다. 그러나 요소의 거동을 개선하기 위한 추가변형률이나 비적합 변위모드는 요소내 일정변형률상태에 머물지 않아 Taylor 방법의 개념(Taylor 등, 1976)이나 CCL 방법(Choi와 Park, 1999)을 적용하여야 하는 번거로움이 있다.

따라서, 본 연구에서는 추가변형률이나 비적합 변위모드를 사용하지 않고 외시적(explicit)으로 구한 수정된 8절점 형상함수를 직접적으로 가정변형률과 연동시키고, Reddy(1984)의 고차이론으로부터 유도한 개선된 1차전단변형이론(천경식 등, 2003b)을 적용함으로써 간단한 직접수정된 8절점 유한요소가 제안되었다(천경식과 장석운, 2004). 개선된 8절점 유한요소를 이용하여 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동해석을 수행하고, 그에 따른 결과를 상호비교함으로써 제안된 요소의 우수성을 입증하고자 한다.

## 2. 요소의 거동개선

### 2.1 개선된 1차전단변형이론

복합적층판을 해석할 경우 고차전단변형이론을 적용하면 보다 정확한 거동을 나타내며, 전단보정계수를 필요치 않으나, 절점당 많은 자유도를 요구한다. 따라

서 보다 간단하면서도 적용성이 좋은 1차전단변형이론의 개선방향을 찾는 것이 우선이라 할 수 있다.

Rolfes와 Rohwer(1997)는 전단보정계수를 사용하지 않고 전단력과 모멘트간의 평형조건에 근거한 전단강성을 제안하였다. 하지만 판의 거동을 원통형 휨모드(cylindrical bending mode)로 가정하였으며, 전단강성행렬 유도시 면내력은 무시하고, 면외력만을 고려하여 적용대상모델에 한계가 있다. Auricchio와 Sacco(2003)는 3차원 평형방정식과 부분혼합된 수식화(partial mixed formulation)에 근거하여 매우 합리적인 결과를 도출하였지만, 적용식이 상당히 복잡하고, 추후 비선형 해석시 또 다른 추가적인 수식화를 요구한다.

본 연구에서는 Reddy(1984)의 고차이론에 근거하여 1차전단변형이론의 간단하면서도 효율적인 개선방안을 제시한다. 우선, 고차전단변형이론의 변위장과 그에 따른 변형률을 나타내면 식 (1), (2)와 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\phi_x - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0 + z\phi_y - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_y^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x^2 \\ \boldsymbol{\kappa}_y^2 \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{xz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_{xz}^2 \\ \boldsymbol{\kappa}_{yz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 &= u_{,x}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 = v_{,y}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^0 = u_{,y} + v_{,x} \\ \boldsymbol{\kappa}_x^0 &= \phi_{,xx}, \quad \boldsymbol{\kappa}_x^2 = -4/3h^2 (\phi_{,xx} + w_{,xx}) \\ \boldsymbol{\kappa}_y^0 &= \phi_{,yy}, \quad \boldsymbol{\kappa}_y^2 = -4/3h^2 (\phi_{,yy} + w_{,yy}) \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy}^0 &= \phi_{,xy} + \phi_{,yx}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{xy}^2 = -4/3h^2 (\phi_{,xy} + \phi_{,yx} + 2w_{,xy}) \end{aligned}$$

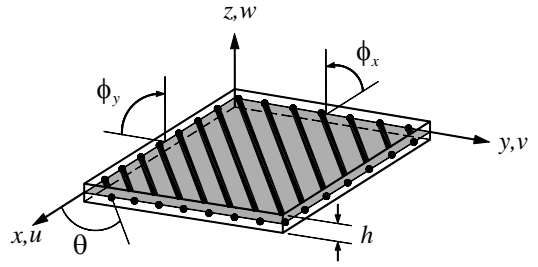


Fig. 1 복합적층판의 좌표계 및 자유도

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}^0 &= \phi_x + w_{,x}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{xz}^0 = -4/h^2 (\phi_x + w_{,x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}^0 &= \phi_y + w_{,y}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{yz}^0 = -4/h^2 (\phi_y + w_{,y}) \end{aligned} \quad (3)$$

식 (2)의  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ 와  $\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$ 에서  $z^3$ 항을 제외한 항으로도 충분히 면내변형률의 분포경향을 나타낼 수 있다. 즉,  $\boldsymbol{\kappa}_1^2$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_2^2$ 와  $\boldsymbol{\kappa}_6^2$ 을 무시하면 전단변형률을 제외한 나머지 면내변형률과 휨곡률은 1차전단변형이론과 동일하다(천경식 등, 2003b).

$$\boldsymbol{\omega}(\eta) = (1 - 4z^2/h^2) \quad (4a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{xz} = f_\eta \boldsymbol{\omega}(\eta) (\phi_x + \partial w / \partial x) \quad (4b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{yz} = f_\eta \boldsymbol{\omega}(\eta) (\phi_y + \partial w / \partial y) \quad (4c)$$

기존의 1차전단변형이론에 의한 전단변형률은  $\boldsymbol{\gamma}_{xz} = \phi_x + \partial w / \partial x$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{yz} = \phi_y + \partial w / \partial y$ 이다. 여기에 앞서 정의된  $\boldsymbol{\omega}$  함수를 곱해줌으로써 두께방향으로 포물선 분포를 나타낼 수 있으며, 이는 전단응력과 변형률이 판의 상·하면에서 0이 되어야하는 경계조건을 만족시킨다. 즉, 전단보정계수는 더 이상 필요하지 않다. 최종적으로 유효전단변형에 의한 에너지와 평균전단변형에 의한 에너지와의 비율함수  $f_\eta$ 를 결정하고, 식 (4)와 같이  $\boldsymbol{\omega}$ 와 함께 기존의 전단변형률항에 적용함으로써 1차전단변형이론을 간단히 수정할 수 있다.

## 2.2 형상함수의 수정

8절점 형상함수는 9절점 등매개변수 요소와 동일한 조건하에서 2차 변위를 정확히 보간하도록 수정할 수 있다. 즉, 요소 중앙점의 변위를 요소 외곽을 이루는 8개 절점의 변위에 대한 선형조합으로 구속조건을 설정한다.

$$\delta = \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i \delta_i \quad (5a)$$

$$\bar{N}_i = N_i^{(9)} + N_9^{(9)} T_i \quad (5b)$$

여기서,  $N_i^{(9)}$ 는  $i$ 번째 절점에 대한 9절점 형상함수이고,  $T_i$ 는 구속에 대한 계수를 의미한다. 식 (5b)의  $\bar{N}_i$ 를 기존의 8절점 형상함수  $N_i^{(8)}$ 와 계층적 함수식으로 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{N}_i = N_i^{(8)} + N_9^{(9)}(T_i - N_i^{(8)}(0,0)) \quad (6)$$

구속계수  $T_i$ 는 각 절점의 실제 좌표값에 의해 결정된다. 식 (7)은 기존 8절점 형상함수  $M_i^S$ 와 9절점 형상함수  $N_i$ 의 관계를 나타낸 것이며, 식 (8)은 본 논문에서 적용하고자 하는 수정된 8절점 형상함수  $M_i$ 이다(Kikuchi 등, 1999; 천경식 등, 2004a; 천경식과 장석윤, 2004).

$$M_i^S(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) - 1/4 N_9(\xi, \eta) \quad (7a)$$

$$M_{i+4}^S(\xi, \eta) = N_{i+4}(\xi, \eta) + 1/2 N_9(\xi, \eta) \quad (7b)$$

$$M_i(\xi, \eta) = M_i^S(\xi, \eta) + \frac{D_i - D_k}{8(D_i + D_k)} N_9(\xi, \eta) \quad (8)$$

$$M_{i+4}(\xi, \eta) = M_{i+4}^S(\xi, \eta) + \frac{D_m - D_i}{4(D_i + D_k)} N_9(\xi, \eta)$$

여기서, 자연좌표계(natural coordinate)에서 각 절점에 대한  $\xi_i$ 와  $\eta_i$ 는  $\xi_i = -1, 1, 1, -1, 0, 1, 0, -1, 0$ 와  $\eta_i = -1, -1, 1, 1, -1, 0, 1, 0, 0$ 이며,  $i = 1, \dots, 9$ 이다.  $D_i$ 는 절점  $i$ 에서의 Jacobian 행렬인  $\partial(x, y) / \partial(\xi, \eta)$ 의 4배와 동일하며 다음과 같다.

$$D_i = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_m - x_i \\ y_j - y_i & y_m - y_i \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$(i, j, k, m) = \text{any one of } \begin{bmatrix} (1, 2, 3, 4) & (3, 4, 1, 2) \\ (2, 3, 4, 1) & (4, 1, 2, 3) \end{bmatrix}$$

MacNeal과 Harder(1992)가 제시한 형상함수와는 달리 식 (8)에 나타낸 수정된 형상함수는 요소가 찌그러진 경우 8절점 형상함수를 나타내는 기본적인 단항식 중  $\xi^2 \eta$ 과  $\xi \eta^2$ 을 정확하게 보간하는 장점을 지닌다.

## 2.3 가정변형률

전단변형률을 수직변위의 미분형태가 아닌, 수직변위와는 독립적인 보간함수로 전단변형률을 가정한다. 가정된 전단변형률  $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ ,  $\tilde{\gamma}_{\eta\eta}$ 은 그림 2에 표시한 보간선택점을 이용하여 보간함수  $R_i$ 와  $S_i$ 를 이용하여 보간한다. 보간함수  $R_i$ 와  $S_i$ 는 참고문헌(천경식과 장석윤, 2004)에 잘 나타나 있으며, Fig. 2에서  $a$ 는 보간선택점으로  $1/\sqrt{3}$ 이다. 이때 Fig. 2에서 표시하였듯이  $\gamma_{\xi\xi, 5}$ 와  $\gamma_{\eta\eta, 5}$ 는 각각 보간선택점인  $RA$ 와  $RB$ ,  $SA$ 와  $SB$ 에서 평균치를 취하여 적용한다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi}^c = \sum_{i=1}^4 R_i(\xi, \eta) \cdot \gamma_{\xi\xi, i} + \frac{1}{2} R_5(\xi, \eta) \cdot (\gamma_{\xi\xi, RA} + \gamma_{\xi\xi, RB})$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\eta}^c = \sum_{i=1}^4 S_i(\xi, \eta) \cdot \gamma_{\eta\eta, i} + \frac{1}{2} S_5(\xi, \eta) \cdot (\gamma_{\eta\eta, SA} + \gamma_{\eta\eta, SB}) \quad (10)$$

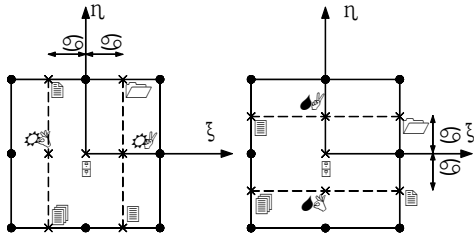


Fig. 2 가정된 변형률장을 위한 보간선택점

변형률은 전단잠김현상과 선택적 감차적분에 의해 발생하는 계급(rank)의 부족 및 그로 인한 가상의 제로에너지모드를 제거한다. 식 (10)과 같이 보간선택점과 그에 따른 가정변형률을 수정하고, 앞서 제시한 수정된 형상함수인 식 (8)을 가정변형률과 연동시킴으로써 보다 정확한 거동을 나타낼 수 있다.

### 3. 결과 분석

본 절에서는 간단한 직접수정 방안에 의해 개선된 8절점 유한요소의 우수성 및 타당성을 규명하고자 다른 연구자들에 의한 해석결과와 비교하였다. 적층조건은 식 (11), (12)에 제시된 직교이방성 성질을 갖는 각 층을 동일한 두께로 설정하고, Fig. 3에 나타낸 바와 같이  $(\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4)$  을 아래부터 위로 적층시켰다. 해석모델은 4변 단순지지된 적층판이고, 정적처짐, 좌굴 및 자유진동을 탄성계수비, 폭-두께비, 적층수 등의 다양한 조건에 따라 해석을 수행하였다. 기본적인 요소분할수는 4x4로 설정하였다.

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = 25, \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, G_{23}/E_2 = 0.2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = \text{variable}, \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5 \end{aligned} \quad (12)$$

본 연구에서 제안한 직접수정에 의해 개선된 8절점 유한요소는 8-SAP이라 하고(천경식과 장석운, 2004), ELS, TSDT, FSDT, 8QUAD72 그리고 8-ANS는 정적처짐,

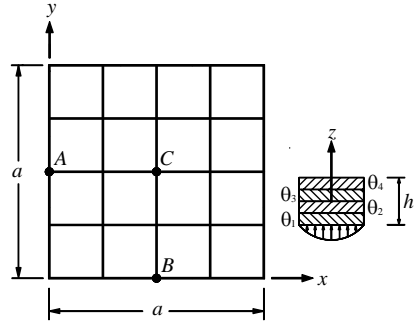


Fig. 3 적층판의 해석모델

좌굴하중 및 고유진동수를 비교하기 위해 제시된 이론들이다. ELS는 Pagano와 Hatfield (1972)의 3차원 탄성해이며, FSDT와 TS-DT는 각각 1차전단변형이론과 Reddy의 고차이론을 Navier 방법으로 풀 해석해(analytical solution)이다. 유한요소 8QUAD72는 천경식 등(2003a)이 개발한 고차전단변형이론을 갖는 다양한 8절점 유한요소중 절점당 9개의 자유도를 갖는 요소이며, 8-ANS는 Donea와 Lamain(1987)이 Jacobian 행렬을 이용하여 직접적으로 유도한 대재전단변형률을 갖는 8절점 유한요소이다. 정적, 좌굴 및 고유진동수는 무차원화하여 표시하여 식 (14)와 같다.

$$\bar{w} = w_c E_2 h^3 / a^4 q_0 \quad (14a)$$

$$\bar{N} = N_{cr} a^2 / E_2 h^3 \quad (14b)$$

$$\bar{\omega} = \omega_{11} a/h \sqrt{\rho/E_2} \quad (14c)$$

사인하중(sinusoidal loading)을 받는 적층판의 중앙점(C점) 무차원 처짐을 폭-두께비  $a/h$ 에 따라 비교하여 Table 1에 나타내었다. 식 (12)에 나타낸 직교이방성 재료를 (0/90/90/0)으로 적층시켰다. Table 1에서 ( )는 ELS로 나누어 표시한 것으로, 8-SAP는 8-ANS와 비교하여 정확도가 상당히 개선되었음을 알 수 있다. 폭-두께비 4에서 90%미만에 머물던 1차전단변형이론을 근거한 FSDT, 8-ANS와 비교하여 직접수정된 8-SAP는 90%이상의 수렴성을 나타내었다.

Table 1 무차원 처짐

$a/h$	Theory	Deflection
4	ELS	1.936 (1.000)
	TSDT	1.894 (0.978)
	FSDT	1.710 (0.883)
	8QUAD72	1.891 (0.977)
	8-ANS	1.695 (0.876)
	8-SAP	1.809 (0.934)
10	ELS	0.737 (1.000)
	TSDT	0.715 (0.970)
	FSDT	0.663 (0.900)
	8QUAD72	0.719 (0.976)
	8-ANS	0.661 (0.897)
	8-SAP	0.696 (0.944)
100	ELS	0.435 (1.000)
	TSDT	0.434 (0.998)
	FSDT	0.434 (0.998)
	8QUAD72	0.434 (0.998)
	8-ANS	0.434 (0.998)
	8-SAP	0.435 (1.000)

Fig. 4는 Fig. 3의 적층판에 표시한 A점과 B점에서 전단응력  $\tau_{xz}$ 와  $\tau_{yz}$ 의 두께방향분포를 비교하여 나타낸 것이다. 고차전단변형이론에 근거하여 개선한 1차 전단변형이론을 갖는 8-SAP의 전단응력은 Reddy의 고차이론인 TSDT와 비교하여 거동이 매우 유사함을 알 수 있다. 8-ANS는 각 층마다 일정한 응력분포를 보이고 있으며, 판의 상·하면에서 전단응력이 0이 되지 않는다. Fig. 4에서 FSDT\_3D는 전단력과 모멘트의 평형조건으로 직접적으로 유도한 응력분포이다. 평형조건으로 유도한 응력분포는 해석적인 방법(analytical solution)으로는 그 적용이 간단하고 이미 Reddy(1997)에 의해 식에 제시되어 있다. 유한요소에서는 응력에 대한 편미

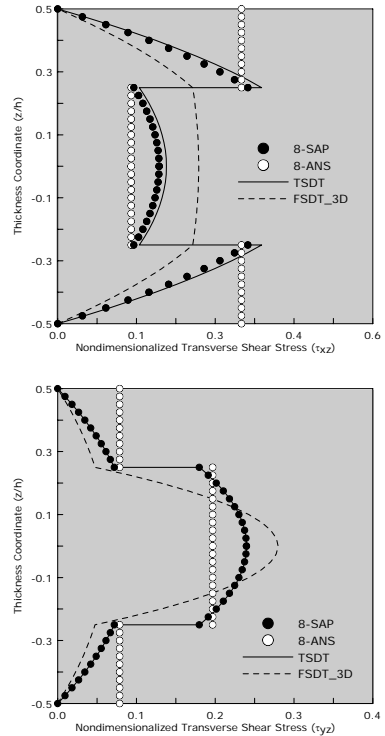


Fig. 4 두께방향에 따른 전단응력분포

분으로 인하여 고차의 형상함수가 적용되어야 하는 등의 문제가 있어 적용이 쉽지 않다. 이때 유한차분법 등의 후처리 과정(post-processor method)을 유한요소에 이용하면 3차원 탄성해와 유사한 분포경향을 보일 수 있다. 하지만 이와 같은 방법은 말그대로 후처리일뿐 해의 정확도를 개선하는 것이 아니다. Table 2는 적층수

Table 2 무차원 임계좌굴하중

Laminate	Theory	$a/h$				
		4	10	20	50	100
(0/90/0)	TSDT	8.1752	22.1207	31.0767	35.2293	35.9222
	FSDT	8.1631	22.3151	31.1959	35.2552	35.9290
	8QUAD72	8.1738	22.1169	31.0757	35.2308	35.9246
	8-ANS	8.1647	22.3195	31.2049	35.2680	35.9427
	8-SAP	8.1709	22.1090	31.0941	35.2449	35.9367
(0/90/90/0)	TSDT	8.9822	23.3400	31.6596	35.3467	35.9526
	FSDT	9.1138	23.4529	31.7071	35.3560	35.9550
	8QUAD72	8.9681	23.3033	31.6497	35.3470	35.9547
	8-ANS	9.0243	23.4579	31.7166	35.3690	35.9688
	8-SAP	8.9370	23.2226	31.5935	35.3434	35.9622

와 폭-두께비에 따른 무차원 임계좌굴하중을 비교하여 나타낸 것이다. 적용한 재료물성치는 식 (13)이며, 탄성계수비  $E_1/E_2$ 는 40으로 고정한다. 요소분할수는 8×8이다. 정적처짐의 결과와 마찬가지로 무차원 좌굴하중의 폭-두께비에 따른 분포경향에서 8-ANS는 FSDT 즉, 1차전단변형이론에 근접한 반면 8-SAP는 TSDT 즉, 고차전단변형이론과 유사한 거동을 보임으로써 상당히 개선된 것을 확인할 수 있다.

마지막으로, 폭-두께비  $a/h = 5$ 인 적층판의 탄성계수비에 따른 무차원 고유진동수를 비교하고자 한다. 적용한 재료물성치는 식 (13)과 같으며, 적층조건은 (0/90/90/0)이다. 요소분할수는 8×8로 설정한다. Table 3에서 보듯이 수정된 형상함수와 전단응력과 전단변형률의 분포경향을 간단히 바꿔 개선한 1차전단변형이론을 갖는 8-SAP은 동일한 자유도를 갖는 8-ANS에 비해 Reddy(1984)의 단순화된 고차이론과 매우 유사한 거동을 나타내고 있음을 알 수 있다. Reddy의 고차이론을 유한요소로 적용하게 되면 절점 7개 이상의 자유도를 요구하는 반면(천경식 등, 2003a; 박원태 등, 2004a), 본 연구에서 제안한 직접수정법에 의해 절점당 5개의 자유도를 가지고도 고차이론과 비교하여 충분한 수렴성을 보인다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 8절점 유한요소의 거동개선을 위한 간단하면서도 직접적인 방법을 제안하였다. 9절점 등매개변수 유한요소와 동일한 조건하에서 2차 변위를 정확히 보간하도록 형상함수를 수정하며, 판의 상·하면에서 전단변형률과 응력이 경계조건을 만족하도록 1차 전단변형이론을 수정함으로써 전단보정계수를 필요치

않게 되었다.

직접수정된 8절점 유한요소(8-SAP)를 이용하여 복합 적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동 해석을 수행하고 참고문헌과 비교하여 우수성을 입증하였다. 그 결과 1차 전단변형이론으로도 충분히 고차전단변형이론과 유사한 거동을 보임으로써 해의 정확도가 상당히 개선되었다. 특히 폭-두께비가 작은 경우 즉, 판의 두께가 두꺼운 경우 정해와 비교하여 90%미만의 정확도를 갖는 8-ANS와 비교하여 본 연구에서 제시한 8-SAP는 90%이상의 정확도를 갖는다. 또한 고유진동수와 좌굴하중은 직접수정법에 의해 충분히 Reddy의 고차이론에 의한 결과와 유사한 거동을 보임으로써 매우 우수함을 알 수 있었다.

추후 본 연구에서 제시한 직접수정법을 비적합변위 모드 또는 추가변형률 요소와 결합함으로써 보다 안정된 무결점 8절점 판요소를 제시할 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

1. 박원태, 천경식, 손병직(2004a), "채널단면의 기하학적 형상변화에 따른 캔틸레버 적층구조물의 안정성 연구", 한국구조물진단학회지, 제8권 2호, pp. 169-175.
2. 박원태, 천경식, 손병직(2004b), "추가변형률 유한요소-직접적분법을 이용한 복합적층 곡선패널의 비감쇠 강제진동응답", 한국구조물진단학회지, 제8권 2호, pp. 247-258.
3. 천경식, 최희권, 장석윤(2003a), "다양한 Serendipity 유한요소에 따른 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동해석 비교연구", 대한토목학회 논문집, 제23권 5A호, pp. 901-909.
4. 천경식, 홍대기, 장석윤(2003b), "복합적층구조해석을 위한 1차전단변형이론의 간단한 수정방안", 서울시립대학교 산업기술연구소 논문집, 제11집, pp. 1-7.
5. 천경식, 임성순, 장석윤(2004a), "등방성 및 복합적층판 해석을 위한 개선된 8절점 Serendipity 유한요소", 대한토목학회 논문집, 제24권 2A호, pp. 401-409.
6. 천경식, 박대용, 장석윤(2004c), "개선된 추가변형률 4절점 평판요소", 한국강구조학회 논문집, 제14권 3호, pp. 295-303.
7. 천경식, 장석윤(2004), "8절점 Serendipity 가정변형률 평판요소의 효율적인 성능개선을 위한 간단한 직접수정방안", 한국강구조학회 학술발표대회 논문집, pp. 330-337.

Table 3 무차원 고유진동수

$E_1/E_2$	TSDT	FSDT	8-ANS	8-SAP
3	6.560	6.570	6.571	6.561
10	8.272	8.298	8.299	8.264
20	9.526	9.567	9.568	9.510
30	10.272	10.326	10.327	10.256
40	10.787	10.854	10.855	10.778

8. Auricchio, F. and Sacco E. (2003) "Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.70, pp. 381-390.
9. Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N. (1986) "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.22, pp. 697-722.
10. Choi, C.K. and Park, Y.M. (1999) "Quadratic NMS Mindlin-plate-bending element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, pp. 1273-1289.
11. Donea, J. and Lamain, L.G. (1987) "A modified representation of transverse shear in CO quadrilateral plate elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 63, pp. 183-207.
12. Hinton, E. and Huang, H.C. (1986) "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Computers & Structures*, Vol.23(3), pp. 409-431.
13. Kant, T. and Swaminathan, K. (2000) "Analytical solutions using a higher order refined theory of the stability analysis of laminated composite and sandwich plates", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.10 (4), pp. 337-357.
14. Kant, T. and Swaminathan, K. (2001) "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite Structures*, Vol.53, pp. 73-85.
15. Kant, T. and Swaminathan, K. (2002) "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite Structures*, Vol.56, pp. 329-344.
16. Kikuchi, F., Okabe, M. and Fujio, H. (1999) "Modification of the 8-node Serendipity element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.179, pp. 91-109.
17. Lee, N.S. and Bathe, K.J. (1993) "Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3553-3576.
18. MacNeal, R.H. and Harder, R.L. (1992) "Eight nodes or nine?", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.33, pp. 1049-1058.
19. Pagano, N.J. and Hatfield, S.J. (1972) "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites", *AIAA Journal*, Vol.10, pp. 931-933.
20. Reddy, J.N. (1984) "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, pp. 745-752.
21. Reddy, J.N. (1997) "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", CRC Press.
22. Rolfes, R. and Rohwer, K. (1997) "Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp. 51-60.
23. Taylor, R.L., Beresford, P.J. and Wilson, E.L. (1976) "A nonconforming element for stress analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, pp. 1211-1219.
24. Wilson, E.L. and Ibrahimbegovic, A. (1990) "Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffness and stresses", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.7, pp. 229-241.

(접수일자 : 2004년 4월 21일)