

시간 지연과 데이터 손실을 고려한 네트워크 제어시스템의 안정도 분석

論 文

53D-10-2

Stability Analysis of Networked Control System with Time Delay and Data Loss

丁俊弘[†] · 崔壽榮^{*} · 朴基憲^{**}
(Joonhong Jung · Sooyoung Choi · Kiheon Park)

Abstract - The major concern of networked control system is network uncertainties such as time delay and data loss. Because these uncertainties may degrade the performance of networked control system and destabilize the entire system. Therefore, the performance and the stability variation of networked control system due to network uncertainties must be considered first in designing networked control system. In particular, the stability analysis of networked control system is most important issue since time delay and data loss can make the overall systems unstable. In this paper, we present a new stability analysis method of networked control system with time delay and data loss, which is impossible in previous works. The proposed method can determine maximum time delay and allowable transmission rate that preserve stability performance of networked control system. The results of the simulation validate effectiveness of our stability analysis method.

Key Words : Networked Control System, Maximum Time Delay, Allowable Transmission Rate, Stability Analysis

1. 서 론

네트워크 제어시스템(networked control system:NCS)은 공간적으로 떨어져 있는 다양한 구성 장치들을 공유 매체(common bus)로 연결하여 제어 신호, 입출력 신호, 관리 정보 등을 교환하는 시스템을 말한다. 네트워크 구조를 제어 시스템에 적용할 경우에는 제어기, 센서, 액추에이터, 관리 장치 등의 연결에 필요한 배선을 최소화 할 수 있으므로 시스템 설치 비용을 절감할 수 있다. 또한 전체 프로세서를 하나의 네트워크로 통합할 수 있기 때문에 시스템 관리를 체계화 할 수 있고 유지·보수를 용이하게 만드는 등 다양한 장점을 가질 수 있다. 특히, 대규모 제어시스템(large scale control system)이나 분산형 제어시스템(decentralized control system)은 플랜트에 산재한 부 시스템들을 모두 연결하여 제어에 필요한 데이터를 주기적으로 교환해야 하므로 네트워크 제어시스템에 대한 관심이 점점 더 고조되고 있다.

네트워크 제어시스템의 주요한 연구 분야는 첫째, 시간 지연과 전송 데이터의 손실 등과 같은 네트워크 불확실성에 따른 전체 시스템의 성능 및 안정도 변화를 분석하고 이에 대한 영향을 효과적으로 보상하는 방법[1]~[10], 둘째, 전송

데이터의 종류, 메시지의 버스 점유 방식, 그리고 네트워크 프로토콜의 종류 등을 고려한 메시지 스케줄링 기법 개발 [1],[2],[11]~[13], 셋째, 네트워크 제어시스템의 실제 적용 분야[10],[14]~[16]로 나눌 수 있다. 이 중에서 가장 관심을 받는 분야는 네트워크 제어시스템의 성능 평가 및 네트워크 제어시스템에 적합한 안정화 제어기를 설계하는 것이다. 특히, 시간 지연이나 데이터 손실은 네트워크 제어시스템의 성능을 크게 저하시킬 뿐 아니라 전체 시스템을 불안정하게 만들 수 있으므로 이러한 불확실 요소가 전체 시스템의 성능이나 안정도에 미치는 영향을 체계적으로 분석하는 과정은 무엇보다 중요하다.

네트워크 제어시스템의 제어 성능 및 안정도 변화를 분석한 주요 연구 결과로는 Walsh[1],[2], Branicky[1],[3], Lian [4],[5], Hassibi[6], 그리고 Rabello[7] 등이 있다. 시간 지연에 따른 네트워크 제어시스템의 안정도 분석과 관련하여, Walsh 등은 네트워크 제어시스템의 안정도를 보장하는 센서와 제어기 사이의 최대 데이터 전송 주기(maximum allowable transfer interval:MATI)를 유도하였다. Branicky 등은 네트워크 제어시스템을 연속 플랜트와 이산 제어기가 혼합된 하이브리드 시스템(hybrid system)으로 모델링하고 전체 시스템의 안정도를 보장하는 시간 지연과 샘플링 주기를 결정할 수 있는 방법을 제시하였다. Lian 등은 네트워크 제어시스템의 다양한 시간 지연 모델을 수립하고 위상 여유 분석법을 적용하여 제어기의 적절한 샘플링 주기를 결정할 수 있는 방법을 유도하였다. 데이터 손실에 따른 네트워크 제어시스템의 안정도 분석과 관련하여, Hassibi 등은 Lyapunov 안정 조건을 이용하여 네트워크 제어시스템의 안정도를 판별할 수 있는 쌍일차 행렬 부등식(bilinear matrix

† 교신저자, 正會員 : 成均館大 情報通信工學部 博士課程修了
E-mail : nelcast@skku.edu

* 正會員 : 三星電子 스토리지事業部 責任研究員 · 工博

** 正會員 : 成均館大 情報通信工學部 教授 · 工博

接受日字 : 2004年 4月 8日

最終完了 : 2004年 8月 9日

inequality:BMI)을 유도하였으며, Rabello 등은 BMI 문제의 해를 찾는 과정에 유전 알고리즘을 적용하는 방법을 제안하였다. 그러나 Walsh 등이 제안한 안정도 판별 방법은 구해진 MATI가 네트워크 제어시스템에 적용할 수 있는 샘플링 주기보다 너무 작아서 실제 구현이 어렵다는 문제점을 가지고 있으며, Branicky 등이 제안한 방법은 동적 제어를 사용하는 네트워크 제어시스템에 적용할 수 없다는 단점을 지니고 있다. 무엇보다도, 참고문헌 [1]~[5]에서는 시간 지연만을 고려했을 때 전체 시스템의 안정도 분석이 가능하고 참고문헌 [6],[7]은 데이터 손실만을 고려했을 때 전체 시스템의 안정도 분석이 가능하다는 커다란 제약 조건을 가지고 있다. 즉, 현재까지의 연구 결과로는 시간 지연과 데이터 손실을 동시에 고려했을 때, 네트워크 제어시스템의 안정도를 판별하고 그 변화를 분석하는 것이 불가능하다.

본 논문에서는 시간 지연과 데이터 손실을 모두 고려한 네트워크 제어시스템을 대상으로, 전체 시스템의 안정도 변화를 분석할 수 있는 새로운 방법을 제안한다. 이를 위해 먼저, 시간 지연과 데이터 손실을 포함하는 네트워크 제어시스템을 비동기 시스템(asynchronous dynamical system: ADS) 등가 모델로 표현하고 제어기의 샘플링 주기, 시간 지연, 그리고 데이터 전송률에 따라 변화하는 안정도를 판별할 수 있는 새로운 정리들을 제안한다. 이후, 제안한 정리를 이용하여 네트워크 제어시스템의 안정도를 보장하는 최대 시간 지연(maximum time delay)과 데이터 전송률 범위(allowable transmission rate)를 결정할 수 있음을 보이고 이를 4장의 시뮬레이션에 적용, 그 결과를 분석한다.

2. 네트워크 제어시스템의 등가 모델

2.1 시간 지연을 고려한 네트워크 제어시스템

아래와 같은 선형 시불변 시스템으로 모델링 되는 플랜트를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x_p(t) \in R^n$, $u(t) \in R^k$, $y(t) \in R^m$

위의 시스템을 안정화시키는 피드백 제어기는 식(2)와 같이 주어졌다고 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $x_c(t) \in R^p$, $y_c(t) = u(t)$,

$u_c(t) = w(t) - y(t)$, $w(t)$: 외부 입력

식(1)의 플랜트를 네트워크에 연결된 디지털 제어기로 안정화할 경우에는 제어기 방정식을 적절한 방법을 이용하여 이산화하는 과정이 필요하다. 이 때, 플랜트, 센서, 액추에이터, 이산 제어기, 그리고 네트워크를 포함하는 전체 시스템의 블록선도는 그림 1과 같이 나타낼 수 있다[1]~[3],[10].

여기서, 센서는 샘플링 시점을 기준으로 플랜트의 출력을 측정하고(clock-driven sensor) 제어기는 센서에서 데이터를 수신하는 즉시 제어 입력을 계산하며(event-driven controller) 액추에이터는 제어기에서 데이터를 수신하는 즉시 입력값을 계산, 실제 플랜트에 인가한다(event-driven actuator)[1], [3].

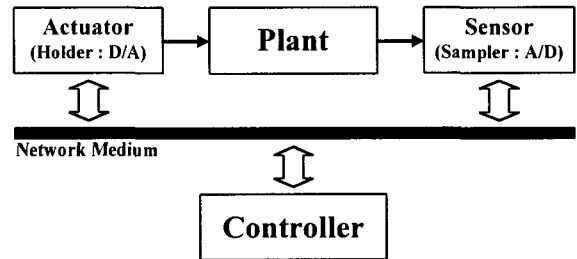


그림 1 네트워크 제어시스템의 블록선도
Fig. 1 Block diagram of networked control system

그림 1의 네트워크 제어시스템에서 시간 지연을 발생시키는 인자는 크게 네트워크 지연(network-induced delay, $\tau_{network}$)과 계산 지연(computation delay, τ_{com})으로 나눌 수 있다 [4],[5],[10]. 전자는 네트워크 대역폭과 전송할 데이터의 크기에 따라 달라지는 전송 지연(transmission delay, τ_{trans}), 물리적인 신호의 이동 속도인 전파 지연(propagation delay, τ_{prop}), 전송할 데이터가 공유 버스를 점유할 때까지 대기하는 큐 지연(queueing delay, τ_{queue}) 등으로 세분할 수 있다. 후자는 센서, 제어기, 액추에이터 등에 할당된 작업을 수행하는데 소요되는 계산 시간을 나타낸다. 이러한 시간 지연을 네트워크 제어시스템 모델에 도입하기 위해 아래와 같은 정의 1과 정의 2를 수립한다.

정의 1 센서에서 측정된 출력이 제어기까지 전송되는 네트워크 경로를 센서 경로(sensor path)라 하고 제어기에서 계산된 제어 입력이 액추에이터까지 전송되는 네트워크 경로를 액추에이터 경로(actuator path)라 한다.

정의 2 네트워크 제어시스템의 시간 지연은 매 샘플링 시점을 기준으로 측정된 출력이 센서 경로, 제어기, 그리고 액추에이터 경로를 거쳐 실제 시스템의 제어 입력으로 인가될 때까지 소요되는 시간이다. 이 때, 센서 경로에서 발생하는 시간 지연을 센서 경로 시간 지연(τ_{sp} , sensor path time delay)이라 하고 액추에이터 경로에서 발생하는 시간 지연을 액추에이터 경로 시간 지연(τ_{ap} , actuator path time delay)이라 한다.

센서 경로의 시간 지연은 센서에서 측정된 출력이 제어기에 도달할 때까지 소요되는 시간 즉, 센서의 계산 지연($\tau_{com,s}$)과 센서에서 제어기까지 데이터가 전송되는데 소요되는 시간($\tau_{network,sc}$)의 합으로 나타낼 수 있다. 액추에이터 경로의 시간 지연은 제어기에서 계산된 제어 입력이 플랜트에 도달할 때까지 소요되는 시간 즉, 제어기의 계산 지연

($\tau_{com,c}$), 계산된 제어 입력 데이터가 액추에이터까지 전송되는데 소요되는 시간($\tau_{network,ca}$), 그리고 액추에이터 계산 지연($\tau_{com,a}$)의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{sp} &= \tau_{com,s} + \tau_{network,sc} \\ \tau_{ap} &= \tau_{com,c} + \tau_{network,ca} + \tau_{com,a} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\tau_{network,sc} = \tau_{queue,s} + \tau_{trans,sc} + \tau_{prop,sc}$
 $\tau_{network,ca} = \tau_{queue,c} + \tau_{trans,ca} + \tau_{prop,ca}$

따라서, k 번째 샘플링 시점에서 네트워크 제어시스템에 발생하는 전체 시간 지연은 그림 2의 타이밍 선도와 같이 나타낼 수 있다(단, $h > \tau_{sp} + \tau_{ap}$).

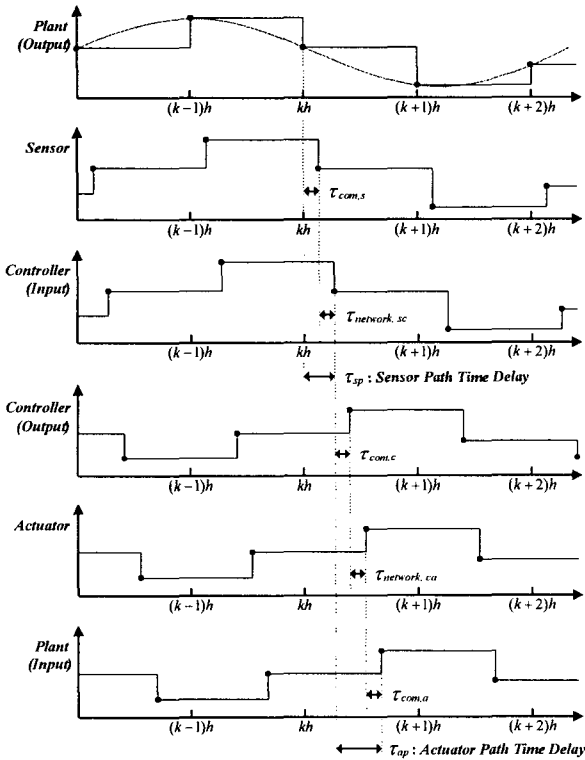


그림 2 네트워크 제어시스템의 타이밍 선도
 Fig. 2 Timing diagrams of networked control system

그림 2로부터 측정된 출력이 제어기에 입력되는 시점은 τ_{sp} 만큼의 시간 지연이 존재하고 계산된 제어 입력이 플랜트에 인가되는 시점은 τ_{ap} 만큼의 시간 지연이 존재함을 알 수 있다. 즉, 센서 경로 시간 지연은 제어기의 지연 입력 요소로 작용하고 액추에이터 경로 시간 지연은 플랜트의 지연 입력 요소로 작용하는 것과 같으므로 그림 3과 같은 변형된 시스템을 생각할 수 있다.

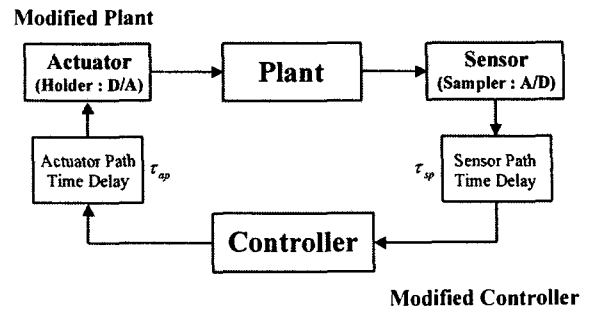


그림 3 시간 지연을 포함하는 네트워크 제어시스템
 Fig. 3 Networked control system with time delay

액추에이터 경로의 시간 지연을 플랜트의 지연 입력으로 고려하여 이산화하면(샘플링 주기 $h[sec]$) 식(4)와 같은 변형된 플랜트 방정식을 유도할 수 있다[10].

$$\begin{aligned} \bar{x}_p(k+1) &= \bar{A}_p \bar{x}_p(k) + \bar{B}_p u(k) \\ y(k) &= \bar{C}_p \bar{x}_p(k) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $\bar{x}_p^T(k) = [x_p^T(k) \quad u^T(k-1)]$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_p &= \begin{bmatrix} e^{A_p h} & \int_{h-\tau_{ap}}^h e^{A_p s} B_p ds \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_p &= \begin{bmatrix} \int_0^{h-\tau_{ap}} e^{A_p s} B_p ds \\ I \end{bmatrix}, \bar{C}_p = [C_p \quad 0] \end{aligned}$$

마찬가지로, 센서 경로의 시간 지연을 제어기의 지연 입력으로 고려하여 이산화하면 식(5)와 같은 변형된 제어기 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_c(k+1) &= \bar{A}_c \bar{x}_c(k) + \bar{B}_c u_c(k) \\ y_c(k) &= \bar{C}_c \bar{x}_c(k) + \bar{D}_c u_c(k) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\bar{x}_c^T(k) = [x_c^T(k) \quad u_c^T(k-1)]$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_c &= \begin{bmatrix} e^{A_c h} & \int_{h-\tau_{sp}}^h e^{A_c s} B_c ds \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_c &= \begin{bmatrix} \int_0^{h-\tau_{sp}} e^{A_c s} B_c ds \\ I \end{bmatrix}, \bar{C}_c = [C_c \quad 0], \bar{D}_c = D_c \end{aligned}$$

2.2 시간 지연과 데이터 손실을 고려한 네트워크 제어시스템

식(4), (5)의 변형된 플랜트와 제어기가 두 개의 스위치에 의해 연결된 시스템 모델을 고려하자.

그림 4에서 플랜트의 출력은 스위치 1을 통해 제어기 입력으로 인가되고 제어기의 출력은 스위치 2를 통해 플랜트 입력으로 인가된다. 전체 시스템의 동적 특성은 플랜트와 제어기의 동작과 독립적인 스위치의 열림과 닫힘에 따라 달라지게 되며, 이와 같이 독립적으로 발생하는 외부 사건(스

위치의 상태)에 의해 동적 특성이 변화하는 시스템을 비동기 시스템(asynchronous dynamical system: ADS)이라 한다 [6],[7].

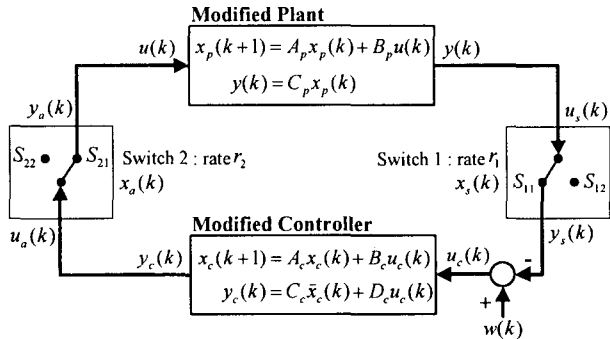


그림 4 시간 지연과 데이터 손실을 고려한 네트워크 제어 시스템

Fig. 4 Networked control system with time delay and data loss

여기서, 스위치 1과 2를 각각 센서 경로와 액추에이터 경로의 데이터 전송 특성을 나타낸 것이라 하면 그림 4는 시간 지연과 데이터 손실의 두 가지 네트워크 불확실성을 동시에 고려할 수 있는 새로운 구조의 네트워크 제어시스템 모델로 생각할 수 있다.

이제, 센서 경로에서 데이터가 전송되는 사건은(E_1) 스위치 1이 닫힌 상태(S_{11}), 데이터가 손실되는 사건은(\bar{E}_1) 스위치 1이 열린 상태(S_{12})라 하자. 스위치 1이 닫혔을 경우에는 현재의 출력 $y_s(k)$ 는 현재의 입력 $u_s(k)$ 와 같고, 스위치 1이 열렸을 경우에는 현재의 출력 $y_s(k)$ 는 한 시점 이전의 입력 $u_s(k-1)$ 과 같으므로 센서 경로의 동적 방정식은 식(6)과 같이 결정된다.

- 센서 경로 데이터 전송(event E_1 : rate r_1)

$$x_s(k+1) = 0, \quad y_s(k) = u_s(k) \quad (6.a)$$

- 센서 경로 데이터 손실(event \bar{E}_1 : rate $1-r_1$)

$$x_s(k+1) = u_s(k), \quad y_s(k) = x_s(k) \quad (6.b)$$

여기서, $x_s(k)$: 센서 경로의 상태,
 r_1 : 센서 경로의 데이터 전송률($0 < r_1 \leq 1$)

마찬가지로, 액추에이터 경로에서 데이터가 전송되는 사건은(E_2) 스위치 2가 닫힌 상태(S_{21}), 데이터가 손실되는 사건은(\bar{E}_2) 스위치 2가 열린 상태(S_{22})라 하면, 액추에이터 경로의 동적 방정식은 식(7)과 같이 결정된다.

- 액추에이터 경로 데이터 전송(event E_2 : rate r_2)

$$x_a(k+1) = 0, \quad y_a(k) = u_a(k) \quad (7.a)$$

- 액추에이터 경로 데이터 손실(event \bar{E}_2 : rate $1-r_2$)

$$x_a(k+1) = u_a(k), \quad y_a(k) = x_a(k) \quad (7.b)$$

여기서, $x_a(k)$: 액추에이터 경로의 상태,
 r_2 : 액추에이터 경로의 데이터 전송률($0 < r_2 \leq 1$)

따라서, 시간 지연과 데이터 손실을 모두 포함하는 네트워크 제어시스템 모델은 식(4)~(7)의 시스템이 모두 결합된 것이라 생각할 수 있으며, 이러한 시스템의 등가 모델은 일반적인 선형 결합 시스템(linear interconnected system)의 연구 결과[10],[17]로부터 유도할 수 있다. 이를 위해 먼저, 그림 4의 네트워크 제어시스템 모델을 그림 5와 같은 선형 결합 시스템으로 표현한다.

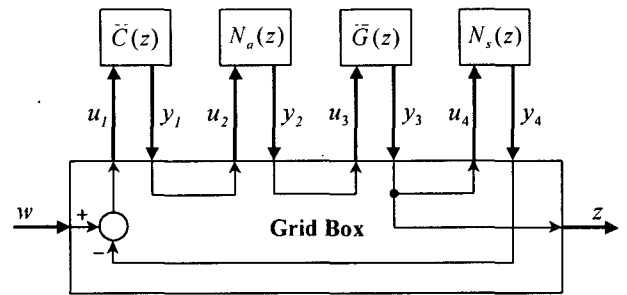


그림 5 선형 결합 시스템으로 표현된 네트워크 제어시스템
 Fig. 5 Networked control system described by linear interconnected system

시간 지연을 고려한 변형된 플랜트 $\bar{G}(z)$ 와 변형된 제어기 $\bar{C}(z)$ 는 식(4), (5)로부터,

$$\bar{G}(z) = \begin{bmatrix} \bar{A}_p & \bar{B}_p \\ \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}(z) = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ \bar{C}_c & \bar{D}_c \end{bmatrix} \quad (8)$$

데이터 전송 및 손실을 고려한 센서 경로와 액추에이터 경로의 동적 특성은 식(6), (7)로부터 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$N_s(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}, & \text{data transmission} \\ \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}, & \text{data loss} \end{cases},$$

$$N_a(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0_k & 0_k \\ 0_k & I_k \end{bmatrix}, & \text{data transmission} \\ \begin{bmatrix} 0_k & I_k \\ I_k & 0_k \end{bmatrix}, & \text{data loss} \end{cases} \quad (9)$$

여기서, 영행렬과 단위행렬은 모두 정방행렬이고 첨자는 각 행렬의 차수를 표기한 것이다. 다음으로 각 부 시스템의 입력과 출력을 포함하는 전체 시스템의 상태, 제어, 그리고 출력벡터를 식(10)과 같이 정의한다.

$$x_t(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_c(k) \\ x_a(k) \\ \bar{x}_p(k) \\ x_s(k) \end{bmatrix}, \quad u_t(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix}, \quad y_t(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, $u_1(k) = u_c(k)$, $u_2(k) = u_a(k)$, $u_3(k) = u(k)$,
 $u_4(k) = u_s(k)$, $y_1(k) = y_c(k)$, $y_2(k) = y_a(k)$,
 $y_3(k) = y(k)$, $y_4(k) = y_s(k)$

식(8)~(10)으로부터,

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= A_t x_t(k) + B_t u_t(k) \\ y_t(k) &= C_t x_t(k) + D_t u_t(k) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $A_t = \text{diag}(\bar{A}_c, 0_k, \bar{A}_p, 0_m)$,
 $B_t = \text{diag}(\bar{B}_c, X, \bar{B}_p, Y)$,
 $C_t = \text{diag}(\bar{C}_c, X, \bar{C}_p, Y)$,
 $D_t = \text{diag}(\bar{D}_c, \bar{X}, 0_{m \times k}, \bar{Y})$,
 $X = \begin{cases} 0_k, & \text{actuator path data transmission} \\ I_k, & \text{actuator path data loss} \end{cases}$,
 $\bar{X} = \begin{cases} I_k, & \text{actuator path data transmission} \\ 0_k, & \text{actuator path data loss} \end{cases}$,
 $Y = \begin{cases} 0_m, & \text{sensor path data transmission} \\ I_m, & \text{sensor path data loss} \end{cases}$,
 $\bar{Y} = \begin{cases} I_m, & \text{sensor path data transmission} \\ 0_m, & \text{sensor path data loss} \end{cases}$

각 부 시스템의 연결 관계를 나타내는 Grid Box 식은 그림 5로부터 아래와 같이 결정된다.

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \\ z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} 0_{m \times k} & 0_{m \times k} & 0_m & -I_m & I_m \\ I_k & 0_k & 0_{k \times m} & 0_{k \times m} & 0_{k \times m} \\ 0_k & I_k & 0_{k \times m} & 0_{k \times m} & 0_{k \times m} \\ 0_{m \times k} & 0_{m \times k} & I_m & 0_m & 0_m \\ 0_{m \times k} & 0_{m \times k} & I_m & 0_m & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$$

식(8)~(12)와 같이 표현된 선형 결합 시스템은 참고문헌의 정리([10, 정리 1]), [17, Lemma 1])를 이용할 경우, 식(11)의 행렬 B_t , C_t , D_t 에 따라 서로 다른 네 가지의 이산시스템으로 나타낼 수 있다. 즉, 시간 지연과 데이터 손실을 동시에 고려한 네트워크 제어시스템은 정리 1과 같은 비동기 시스템으로 모델링 할 수 있다.

정리 1 그림 5의 네트워크 제어시스템과 등가인 비동기 시스템은 식(13)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi_s x_t(k) + \Gamma_s w(k) \\ z(k) &= [0 \quad 0 \quad \bar{C}_p \quad 0] x_t(k) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $s=1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & -\bar{B}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_c & 0 & \bar{A}_p - \bar{B}_p \bar{D}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \\ \bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi_2 &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & 0 & -\bar{B}_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_c & 0 & \bar{A}_p & -\bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 & 0 & \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \\ \bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi_3 &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & -\bar{B}_c \bar{C}_p & 0 \\ \bar{C}_c & 0 & -\bar{D}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & \bar{B}_p & \bar{A}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \bar{D}_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi_4 &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & 0 & -\bar{B}_c \\ \bar{C}_c & 0 & 0 & -\bar{D}_c \\ 0 & \bar{B}_p & \bar{A}_p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \bar{D}_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

증명 선형 결합 시스템의 등가 모델이 존재하기 위한 필요충분조건은 아래와 같은 G_1 , G_2 의 역행렬이 존재하는 것이며[17, well-posedness condition],

$$G_1 = I - M_{11} D_t, \quad G_2 = I - D_t M_{11} \quad (14)$$

이 조건을 만족할 때 전체 시스템의 등가 모델은 식(15)와 같이 나타낼 수 있다[10],[17].

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi x_t(k) + \Gamma w(k) \\ z(k) &= H x_t(k) + J w(k) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $\Phi = A_t + B_t G_1^{-1} M_{11} C_t$, $\Gamma = B_t G_1^{-1} M_{12}$,
 $H = M_{21} G_2^{-1} C_t$, $J = M_{21} G_2^{-1} D_t M_{12} + M_{22}$

이제, 센서와 액추에이터 모든 경로에서 데이터가 손실 없이 전송될 경우 즉, 시간 지연 요소만을 포함하는 네트워크 제어시스템을 고려하자. 이는 사건 E_1, E_2 가 동시에 발생할 경우의 ($E_1 \times E_2$) 네트워크 제어시스템이라 할 수 있으며, 식(14)의 well-posedness 조건은

$$\begin{aligned} G_{11} &= I_{(2m+2k)} - M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, I_m) \\ G_{12} &= I_{(2m+2k)} - \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, I_m) \cdot M_{11} \end{aligned} \quad (16)$$

이고 모두 역행렬이 존재한다. 따라서, 데이터 손실이 발생하지 않은 네트워크 제어시스템의 등가 모델은 식(15)로부터 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi_1 x_t(k) + \Gamma_1 w(k) \\ z(k) &= H_1 x_t(k) + J_1 w(k) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \text{diag}(\bar{A}_c, 0_k, \bar{A}_p, 0_m) + \text{diag}(\bar{B}_c, 0_k, \bar{B}_p, 0_m) \\ &\quad \cdot G_{11}^{-1} M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, 0_k, \bar{C}_p, 0_m) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & -\bar{B}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_c & 0 & \bar{A}_p - \bar{B}_p \bar{D}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \text{diag}(\bar{B}_c, 0_k, \bar{B}_p, 0_m) \cdot G_{11}^{-1} M_{12} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \\ \bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= M_{21} G_{12}^{-1} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, 0_k, \bar{C}_p, 0_m) \\ &= [0 \quad 0 \quad \bar{C}_p \quad 0] \end{aligned}$$

$$J_1 = M_{21} G_{12}^{-1} \cdot \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, I_m) \cdot M_{12} + 0 = 0$$

센서 경로에서 데이터 손실이 발생할 경우에는 사건 \bar{E}_1, E_2 가 동시에 발생할 때의 ($\bar{E}_1 \times E_2$) 네트워크 제어시스템이라 할 수 있으며, 식(14)의 well-posedness 조건은

$$\begin{aligned} G_{21} &= I_{(2m+2k)} - M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, 0_m) \\ G_{22} &= I_{(2m+2k)} - \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, 0_m) \cdot M_{11} \end{aligned} \quad (18)$$

이고 모두 역행렬이 존재한다. 따라서, 센서 경로에서 데이터 손실이 발생한 네트워크 제어시스템의 등가 모델은 식(15)로부터 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi_2 x_t(k) + \Gamma_2 w(k) \\ z(k) &= H_2 x_t(k) + J_2 w(k) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \text{diag}(\bar{A}_c, 0_k, \bar{A}_p, 0_m) + \text{diag}(\bar{B}_c, 0_k, \bar{B}_p, I_m) \\ &\quad \cdot G_{21}^{-1} M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, 0_k, \bar{C}_p, I_m) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & 0 & -\bar{B}_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_c & 0 & \bar{A}_p & -\bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 & 0 & \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \text{diag}(\bar{B}_c, 0_k, \bar{B}_p, I_m) \cdot G_{21}^{-1} M_{12} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \\ \bar{B}_p \bar{D}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= M_{21} G_{22}^{-1} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, 0_k, \bar{C}_p, I_m) \\ &= [0 \quad 0 \quad \bar{C}_p \quad 0] \end{aligned}$$

$$J_2 = M_{21} G_{22}^{-1} \cdot \text{diag}(\bar{D}_c, I_k, 0_{m \times k}, 0_m) \cdot M_{12} + 0 = 0$$

액추에이터 경로에서 데이터 손실이 발생할 경우에는 사건 E_1, \bar{E}_2 가 동시에 발생할 때의 ($E_1 \times \bar{E}_2$) 네트워크 제어시스템이라 할 수 있으며, 식(14)의 well-posedness 조건은

$$\begin{aligned} G_{31} &= I_{(2m+2k)} - M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, I_m) \\ G_{32} &= I_{(2m+2k)} - \text{diag}(\bar{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, I_m) \cdot M_{11} \end{aligned} \quad (20)$$

이고 모두 역행렬이 존재한다. 따라서, 액추에이터 경로에서 데이터 손실이 발생한 네트워크 제어시스템의 등가 모델은 식(15)로부터 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi_3 x_t(k) + \Gamma_3 w(k) \\ z(k) &= H_3 x_t(k) + J_3 w(k) \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \text{diag}(\bar{A}_c, 0_k, \bar{A}_p, 0_m) + \text{diag}(\bar{B}_c, I_k, \bar{B}_p, 0_m) \\ &\quad \cdot G_{31}^{-1} M_{11} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, I_k, \bar{C}_p, 0_m) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 & -\bar{B}_c \bar{C}_p & 0 \\ \bar{C}_c & 0 & -\bar{D}_c \bar{C}_p & 0 \\ 0 & \bar{B}_p & \bar{A}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \text{diag}(\bar{B}_c, I_k, \bar{B}_p, 0_m) \cdot G_{31}^{-1} M_{12} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \bar{D}_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= M_{21} G_{32}^{-1} \cdot \text{diag}(\bar{C}_c, I_k, \bar{C}_p, 0_m) \\ &= [0 \quad 0 \quad \bar{C}_p \quad 0] \end{aligned}$$

$$J_3 = M_{21} G_{32}^{-1} \cdot \text{diag}(\overline{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, I_m) \cdot M_{12} + 0 = 0$$

마지막으로, 센서와 액츄에이터 모든 경로에서 데이터 손실이 발생할 경우 즉, 사건 $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ 가 동시에 발생할 때의 ($\overline{E}_1 \times \overline{E}_2$) 네트워크 제어시스템을 고려하자. 이 때의 well-posedness 조건은

$$G_{41} = I_{(2m+2k)} - M_{11} \cdot \text{diag}(\overline{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, 0_m)$$

$$G_{42} = I_{(2m+2k)} - \text{diag}(\overline{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, 0_m) \cdot M_{11} \quad (22)$$

이고 모두 역행렬이 존재한다. 따라서, 모든 경로에서 데이터 손실이 발생한 네트워크 제어시스템의 등가 모델은 식(15)로부터 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$x_i(k+1) = \Phi_4 x_i(k) + \Gamma_4 w(k)$$

$$z(k) = H_4 x_i(k) + J_4 w(k) \quad (23)$$

여기서,

$$\Phi_4 = \text{diag}(\overline{A}_c, 0_k, \overline{A}_p, 0_m) + \text{diag}(\overline{B}_c, I_k, \overline{B}_p, I_m) \cdot G_{41}^{-1} M_{11} \cdot \text{diag}(\overline{C}_c, I_k, \overline{C}_p, I_m)$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{A}_c & 0 & 0 & -\overline{B}_c \\ \overline{C}_c & 0 & 0 & -\overline{D}_c \\ 0 & \overline{B}_p & \overline{A}_p & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C}_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_4 = \text{diag}(\overline{B}_c, I_k, \overline{B}_p, I_m) \cdot G_{41}^{-1} M_{12} = \begin{bmatrix} \overline{B}_c \\ \overline{D}_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = M_{21} G_{42}^{-1} \cdot \text{diag}(\overline{C}_c, I_k, \overline{C}_p, I_m)$$

$$= [0 \quad 0 \quad \overline{C}_p \quad 0]$$

$$J_4 = M_{21} G_{42}^{-1} \cdot \text{diag}(\overline{D}_c, 0_k, 0_{m \times k}, 0_m) \cdot M_{12} + 0 = 0$$

식(17), (19), (21), 그리고 식(23)으로부터 정리 1은 자명하다. ■

3. 네트워크 제어시스템의 안정도 분석

정리 1의 비동기 시스템으로 표현한 네트워크 제어시스템은 센서 경로의 시간 지연 τ_{sp} 와 데이터 전송률 r_1 , 액츄에이터 경로의 시간 지연 τ_{ap} 와 데이터 전송률 r_2 , 그리고 제어기의 샘플링 주기 h 에 따라 전체 시스템의 안정도가 변화한다. 본 장에서는 이러한 네트워크 제어시스템의 안정도를 판별할 수 있는 정리들을 제안하며, 더 나아가 샘플링 주기와 시간 지연이 결정되었을 때 안정도를 보장하는 데이터 전송률의 범위를 구할 수 있는 정리를 제시한다. 먼저, 데이

터 손실이 발생하지 않았을 때 즉, 시간 지연 요소만을 고려한 네트워크 제어시스템은 식(17)의 등가 모델로 표현할 수 있으며, 이에 대한 안정도는 정리 2를 통해 판별할 수 있다.

정리 2 센서 경로 시간 지연 τ_{sp} 와 액츄에이터 경로 시간 지연 τ_{ap} 가 상수라고 가정하자. 이 때, 모든 경로에서 데이터 손실이 발생하지 않는다면 ($r_1 = r_2 = 1$), 네트워크 제어시스템이 안정하기 위한 필요충분조건은

$$|\lambda_i(\Phi)| < 1, \quad i=1, 2, \dots, n+p+m+k \quad (24)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \overline{A}_c & -\overline{B}_c \overline{C}_p \\ \overline{B}_p \overline{C}_c & \overline{A}_p - \overline{B}_p \overline{D}_c \overline{C}_p \end{bmatrix}$$

여기서,

증명 시간 지연을 상수라 가정하면 식(17)은 일반적인 선형 시불변 이산시스템이 되며, 이러한 이산시스템이 안정하기 위한 필요충분조건은 시스템 행렬의 모든 고유값이 단위원 내에 존재해야 하므로,

$$\left| \lambda_i \left(\begin{bmatrix} \overline{A}_c & 0 & -\overline{B}_c \overline{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{B}_p \overline{C}_c & 0 & \overline{A}_p - \overline{B}_p \overline{D}_c \overline{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right| < 1 \quad (25)$$

여기서, $i=1, 2, \dots, n+p+2m+2k$

의 관계가 성립해야 한다. 그런데 식(25)의 고유값은 아래 특성방정식을 만족하는 λ 이며,

$$\det \left(\lambda I_{n+p+2m+2k} - \begin{bmatrix} \overline{A}_c & 0 & -\overline{B}_c \overline{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{B}_p \overline{C}_c & 0 & \overline{A}_p - \overline{B}_p \overline{D}_c \overline{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det(\lambda I_{m+k})$$

$$\cdot \det \left(\lambda I_{n+p+m+k} - \begin{bmatrix} \overline{A}_c & -\overline{B}_c \overline{C}_p \\ \overline{B}_p \overline{C}_c & \overline{A}_p - \overline{B}_p \overline{D}_c \overline{C}_p \end{bmatrix} \right)$$

$$= 0 \quad (26)$$

이를 만족하는 해는 식(26)에서 보는 바와 같이 $m+k$ 개의 0과 Φ 의 고유값으로 결정된다. 따라서, 식(25)는 Φ 의 고유값이 단위원 내에 존재하는 조건과 일치한다. ■

데이터 손실이 발생할 경우 네트워크 제어시스템은 정리 1과 같이 서로 다른 네 가지의 이산 상태를 가지는 비동기 시스템으로 표현할 수 있으며, 이 때 전체 시스템의 안정도는 정리 3을 이용하여 판별할 수 있다.

정리 3 센서 경로의 데이터 전송률을 r_1 이라 하고 액츄에이터 경로의 데이터 전송률을 r_2 라 하자. 이 때, 식(27)을 만족하는 Lyapunov 함수 $V\{x_i(k)\}$ 가 존재하고

$$V\{x_i(k)\} = x_i(k)^T P x_i(k), \quad P > 0 \quad (27)$$

식(28), (29)를 만족하는 상수 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4 > 0$ 가 존재하면,

$$\hat{r}_1 \log \hat{\alpha}_1 + \hat{r}_2 \log \hat{\alpha}_2 + \hat{r}_3 \log \hat{\alpha}_3 + \hat{r}_4 \log \hat{\alpha}_4 > \log a > 0 \quad (28)$$

$$\Phi_s^T P \Phi_s \leq \hat{\alpha}_s^{-2} P, \quad s=1,2,3,4 \quad (29)$$

여기서, $\hat{r}_1 = r_1 \times r_2, \hat{r}_2 = (1-r_1) \times r_2,$
 $\hat{r}_3 = r_1 \times (1-r_2), \hat{r}_4 = (1-r_1) \times (1-r_2)$

정리 1로 표현된 네트워크 제어시스템은 식(30)과 같이 점근 안정하다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k \|x_i(k)\| = 0 \quad (30)$$

여기서, a : 네트워크 제어시스템의 수렴도

증명 정리 1의 네트워크 제어시스템에서 발생하는 데이터 전송과 손실을 집합 $E \in \{E_1, \bar{E}_1, E_2, \bar{E}_2\}$ 에 속하는 사건이라 하면, 발생 사건에 따라 달라지는 네트워크 제어시스템의 이산 상태는 식(31)과 같은 네 가지 경우로 나눌 수 있다.

$$s \in \{E_1 \times E_2, \bar{E}_1 \times E_2, E_1 \times \bar{E}_2, \bar{E}_1 \times \bar{E}_2\} \quad (31)$$

여기서, E_1 : 센서 경로 데이터 전송,
 \bar{E}_1 : 센서 경로 데이터 손실,
 E_2 : 액츄에이터 경로 데이터 전송,
 \bar{E}_2 : 액츄에이터 경로 데이터 손실

s 라는 이산 상태가 되기 위한 사건들의 집합(discrete state event set)을 $I(s) = \{E_{s1}, E_{s2}\}$ 라 하면, 사건 집합의 요소는 식(32)와 같이 나타낼 수 있으며,

$$\begin{aligned} I(s=1) &= I(E_1 \times E_2) = \{E_{11}, E_{12}\} = \{E_1, E_2\} \\ I(s=2) &= I(\bar{E}_1 \times E_2) = \{E_{21}, E_{22}\} = \{\bar{E}_1, E_2\} \\ I(s=3) &= I(E_1 \times \bar{E}_2) = \{E_{31}, E_{32}\} = \{E_1, \bar{E}_2\} \\ I(s=4) &= I(\bar{E}_1 \times \bar{E}_2) = \{E_{41}, E_{42}\} = \{\bar{E}_1, \bar{E}_2\} \end{aligned} \quad (32)$$

각 사건의 발생 확률은 식(33)과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &: \text{rate } r_1, \bar{E}_1 : \text{rate } (1-r_1) \\ E_2 &: \text{rate } r_2, \bar{E}_2 : \text{rate } (1-r_2) \end{aligned} \quad (33)$$

외부입력 $w(k) = 0$ 일 때, 정리 1의 네트워크 제어시스템은 식(32)의 네 가지 이산 상태와 식(33)의 사건 발생 확률을 갖는 비동기 시스템으로 표현할 수 있다.

$$x_i(k+1) = \Phi_s x_i(k), \quad s=1, 2, 3, 4 \quad (34)$$

이러한 비동기 시스템이 안정하기 위한 충분조건은 참고 문헌 [1],[6]으로부터, 아래와 같은 Lyapunov 함수가 존재하고

$$\beta_1 \cdot \|x_i(k)\|^2 \leq V\{x_i(k)\} \leq \beta_2 \cdot \|x_i(k)\|^2 \quad (35)$$

여기서, $V: R^{n+p+2m+2k} \rightarrow R_+, \exists \beta_1, \beta_2 > 0$

식(36), (37)을 만족하는 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$ 가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} r_1 \log \alpha_1 + r_2 \log \alpha_2 \\ + (1-r_1) \log \alpha_3 + (1-r_2) \log \alpha_4 > \log a > 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$V\{x_i(k+1)\} - V\{x_i(k)\} \leq (\alpha_{s1}^{-2} \alpha_{s2}^{-2} - 1) V\{x_i(k)\} \quad (37)$$

먼저, 식(35)를 만족하는 Lyapunov 함수를 정의하자.

$$V\{x_i(k)\} = x_i(k)^T P x_i(k), \quad P > 0 \quad (38)$$

식(32), (34), (37), 그리고 식(38)로부터,

$$\begin{aligned} V\{x_i(k+1)\} - V\{x_i(k)\} &\leq (\alpha_{s1}^{-2} \alpha_{s2}^{-2} - 1) V\{x_i(k)\} \\ &\Leftrightarrow x_i(k)^T \{ \Phi_s^T P \Phi_s - P \} x_i(k) \\ &\leq x_i(k)^T (\alpha_{s1}^{-2} \alpha_{s2}^{-2} - 1) P x_i(k) \\ &\Leftrightarrow \Phi_s^T P \Phi_s \leq \alpha_{s1}^{-2} \alpha_{s2}^{-2} P \end{aligned} \quad (39)$$

식(39)에 식(32)의 관계를 적용하면 각각의 이산 상태에 대한 행렬 부등식을 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi_1^T P \Phi_1 &\leq \alpha_{11}^{-2} \alpha_{12}^{-2} P = \alpha_1^{-2} \alpha_2^{-2} P = \hat{\alpha}_1^{-2} P \\ (\because E_{11} &= E_1, E_{12} = E_2, \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 \alpha_2) \\ \Phi_2^T P \Phi_2 &\leq \alpha_{21}^{-2} \alpha_{22}^{-2} P = \alpha_3^{-2} \alpha_2^{-2} P = \hat{\alpha}_2^{-2} P \\ (\because E_{21} &= \bar{E}_1, E_{22} = E_2, \hat{\alpha}_2 = \alpha_3 \alpha_2) \\ \Phi_3^T P \Phi_3 &\leq \alpha_{31}^{-2} \alpha_{32}^{-2} P = \alpha_1^{-2} \alpha_4^{-2} P = \hat{\alpha}_3^{-2} P \\ (\because E_{31} &= E_1, E_{32} = \bar{E}_2, \hat{\alpha}_3 = \alpha_1 \alpha_4) \\ \Phi_4^T P \Phi_4 &\leq \alpha_{41}^{-2} \alpha_{42}^{-2} P = \alpha_3^{-2} \alpha_4^{-2} P = \hat{\alpha}_4^{-2} P \\ (\because E_{41} &= \bar{E}_1, E_{42} = \bar{E}_2, \hat{\alpha}_4 = \alpha_3 \alpha_4) \end{aligned} \quad (40)$$

마지막으로, 식(36)은 식(41)로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_1 \log \alpha_1 + r_2 \log \alpha_2 + (1-r_1) \log \alpha_3 + (1-r_2) \log \alpha_4 \\ = r_1 r_2 \cdot \log \alpha_1 \alpha_2 + (1-r_1) r_2 \cdot \log \alpha_3 \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ r_1(1-r_2) \cdot \log a_1 a_4 + (1-r_1)(1-r_2) \cdot \log a_3 a_4 \\
 &= \hat{r}_1 \log \hat{a}_1 + \hat{r}_2 \log \hat{a}_2 \\
 &+ \hat{r}_3 \log \hat{a}_3 + \hat{r}_4 \log \hat{a}_4 > \log a > 0 \quad (41)
 \end{aligned}$$

식(38), (40), 그리고 식(41)로부터 정리 3은 정리 1의 네트워크 제어시스템이 접근 안정하기 위한 충분조건이다. ■

정리 3을 이용하여 데이터 전송률에 따른 네트워크 제어시스템의 안정도를 판별하기 위해서는 각 이산 상태의 수렴 정도를 나타내는 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$ 와 Lyapunov 행렬 P 에 관한 쌍일차 행렬 부등식의 해를 구해야 한다. 그러나 이를 직접 풀기 위해서는 상당한 계산 시간이 소요되며, 플랜트나 제어기의 차수가 높아질수록 이러한 계산 시간이 더욱 증가되는 문제점이 있다. 따라서, 본 논문에서는 정리 4를 이용하여 네트워크 제어시스템의 안정도를 보장할 수 있는 전송률의 범위를 구한다.

정리 4 정리 2를 만족하는 네트워크 제어시스템에 대하여, 플랜트 A_p 가 불안정하고 센서 경로의 데이터 전송률과 액추에이터 경로의 데이터 전송률이 같다고 가정하자 ($r_1=r_2=r$). 이 때, 전체 네트워크 제어시스템은 모든

$$\frac{\log \lambda_{\max}^2(\Phi_4)}{\log \lambda_{\max}^2(\Phi_4) - \log \lambda_{\max}^2(\bar{\Phi})} < r \leq 1 \quad (42)$$

단, $|\lambda_{\max}(\Phi_4)| > 1$

에서 안정하다.

증명 먼저, A_p 가 안정하면 피드백 경로가 존재하지 않아도 전체 시스템이 안정하므로 모든 $0 < r_1, r_2 \leq 1$ 에서 네트워크 제어시스템은 안정하다. 또한, 동일한 프로토콜을 사용하는 네트워크 상에서 제어시스템을 구축할 경우, 센서 경로와 액추에이터 경로의 전송률은 서로 같다고 볼 수 있으므로 정리 4의 가정이 일반성을 잃지 않는다고 말할 수 있다. 이제 식(41)에 $r_1=r_2=r$ 을 대입하고 정리하면,

$$r \cdot \log \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_4} > -\log \hat{a}_4 \quad (43)$$

$r_1=r_2=1$ 일 때는 전체 시스템이 안정하고(정리 2 성립) $r_1=r_2=0$ 일 때는 Φ_4 가 불안정하다는 가정에 의해,

$$\begin{aligned}
 \log a_1 + \log a_2 &= \log \hat{a}_1 > 0 \\
 \log a_3 + \log a_4 &= \log \hat{a}_4 < 0 \quad (44)
 \end{aligned}$$

식(44)로부터 $\hat{a}_1 > \hat{a}_4$ 가 성립함을 알 수 있고 이 관계를 식(43)에 적용하면 아래와 같은 전송률의 범위를 구할 수 있다.

$$\frac{\log \hat{a}_4}{\log \hat{a}_4 - \log \hat{a}_1} = \frac{\log \beta_4}{\log \beta_4 - \log \beta_1} < r \leq 1 \quad (45)$$

여기서, $\beta_1 = \hat{a}_1^{-2}, \beta_4 = \hat{a}_4^{-2}$

β_1, β_4 의 범위는 식(29)로부터,

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &\geq \lambda_{\max}^2(\Phi_1) = \lambda_{\max}^2(\bar{\Phi}) \\
 (\because \lambda_{\max}^2(\Phi_1) &= \max[0, \lambda_{\max}^2(\bar{\Phi})] = \lambda_{\max}^2(\bar{\Phi})) \\
 \beta_4 &\geq \lambda_{\max}^2(\Phi_4) \quad (46)
 \end{aligned}$$

우리가 구하고자 하는 것은 안정도를 보장하는 전송률의 하한값이며(r_{\min}), 이는 식(45)의 좌변을 최소화하는 β_1, β_4 를 결정하는 문제와 같다. 그런데,

$$\begin{aligned}
 &\min_{\text{subject to } \beta_1, \beta_4} \left[\frac{\log \beta_4}{\log \beta_4 - \log \beta_1} \right] \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{1 + \frac{\max_{\text{subject to } \beta_1} \left[\log \frac{1}{\beta_1} \right]}{\min_{\text{subject to } \beta_4} [\log \beta_4]}} \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{1 + \frac{\log \frac{1}{\beta_{\min,1}}}{\log \beta_{\min,4}}} \quad (\because 0 < \beta_1 < 1, \beta_4 > 1) \quad (47)
 \end{aligned}$$

여기서, $\beta_{\min,1} = \min[\beta_1], \beta_{\min,4} = \min[\beta_4]$

의 관계가 성립하므로 β_1, β_4 가 모두 최소가 될 때 전송률 또한 하한값을 가지게 된다. 따라서, 아래와 같은 범위에 있는 모든 전송률 r 에 대하여 전체 네트워크 제어시스템은 안정하다.

$$\begin{aligned}
 &\frac{\log \beta_{\min,4}}{\log \beta_{\min,4} - \log \beta_{\min,1}} \\
 &= \frac{\log \lambda_{\max}^2(\Phi_4)}{\log \lambda_{\max}^2(\Phi_4) - \log \lambda_{\max}^2(\bar{\Phi})} < r \leq 1 \quad (48)
 \end{aligned}$$

4. 시뮬레이션

다음과 같은 플랜트를 고려하자[10, 식(2)].

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.139 & -0.128 & 0 \\ 376.990 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.201 & -0.476 & -27.418 \\ 0 & -5.310 & 19.670 & -50.000 \end{bmatrix} x_p(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.418 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.143 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_d(t) \quad (49)$$

여기서, $\xi_d(t)$: 플랜트 외란

이를 안정화하는 제어기는 식(50)과 같다[10, 식(3)].

$$\dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} -4.638 & -0.139 & -0.128 & 0 \\ 376.990 & 0 & 0 & 0 \\ 892.383 & -6.715 & -8.368 & -23.551 \\ 7.519 & -5.310 & 19.670 & -50.000 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 4.638 \\ -0.000 \\ -24.252 \\ -7.519 \end{bmatrix} u_c(t)$$

$$y_c(t) = \begin{bmatrix} -31.663 & 0.238 & 0.288 & -0.141 \end{bmatrix} x_c(t) \quad (50)$$

식(49), (50)을 대상으로 네트워크 제어시스템을 구성할 경우, 데이터 손실이 발생하지 않았을 때($r_1=r_2=1$) 각 경로의 시간 지연에 따른 전체 시스템의 안정도 변화를 분석하기 위해 정리 2를 적용하여 시뮬레이션 하였다.

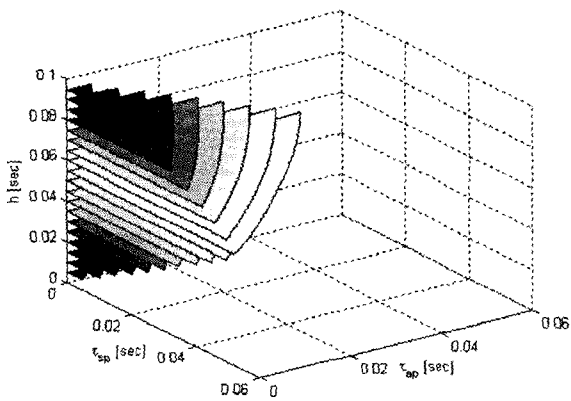


그림 6 시간 지연에 따른 네트워크 제어시스템의 안정 영역
Fig. 6 Stability regions of networked control system with time delay

그림 6은 네트워크 제어시스템의 샘플링 주기를 0.005 [sec]씩 증가시키면서 안정도가 보장되는 시간 지연 영역을 나타낸 것이다. 예를 들어, 샘플링 주기가 $h=0.06$ [sec] 일 경우 센서 경로의 최대 시간 지연은 $\tau_{sp}=0.0495$ [sec] ($\tau_{sp}=0$ [sec]), 액추에이터 경로의 최대 시간 지연은

$\tau_{ap}=0.0457$ [sec] ($\tau_{ap}=0$ [sec])임을 알 수 있다. 또한, 센서 경로의 시간 지연이 $\tau_{sp}=0.04$ [sec]일 때 안정도를 보장하는 액추에이터 경로의 최대 시간 지연은 $\tau_{ap}=0.011$ [sec], 반대로 액추에이터 경로의 시간 지연이 $\tau_{ap}=0.04$ [sec]일 때 안정도를 보장하는 센서 경로의 최대 시간 지연은 $\tau_{sp}=0.0078$ [sec]임을 시뮬레이션 결과로부터 결정할 수 있다.

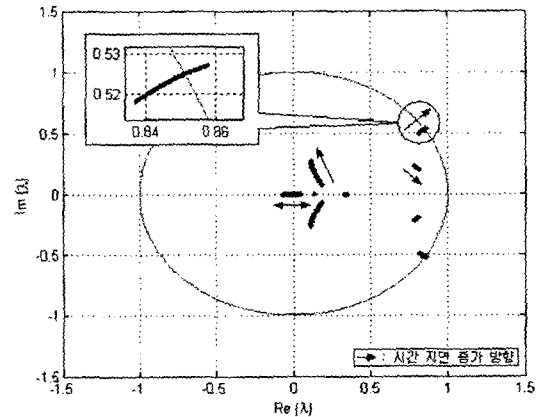


그림 7 시간 지연에 의한 네트워크 제어시스템의 극점 변화
Fig. 7 Pole variations in networked control system due to time delay

그림 7은 샘플링 주기가 $h=0.06$ [sec]일 때, 시간 지연을 0 [sec] $\leq \tau_{sp}, \tau_{ap} < 0.06$ [sec]까지 가변하면서 전체 시스템의 극점 변화를 나타낸 것이다. 시간 지연이 증가할수록 극점의 위치는 안정 영역인 단위원 안에서 멀어지고 있으므로 네트워크 제어시스템이 점점 더 불안정해짐을 확인할 수 있다. 또한, 극점이 단위원과 교차할 때의 시간 지연 값이 전체 시스템의 안정·불안정 여부를 결정하는 최대 시간 지연이 된다.

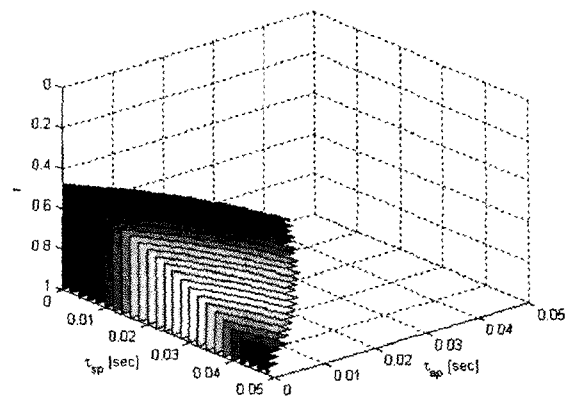


그림 8 시간 지연과 데이터 손실에 따른 네트워크 제어시스템의 안정 영역
Fig. 8 Stability regions of networked control system with time delay and data loss

샘플링 주기가 $h=0.06[sec]$ 일 때 네트워크 제어시스템의 안정도가 보장되는 데이터 전송률과 시간 지연의 범위는 정리 4를 적용하여 구하였으며, 그 결과는 그림 8과 같다. 데이터 손실이 발생하지 않은 경우(전송률 $r=1$), 안정도를 보장하는 시간 지연 영역은 그림 6의 샘플링 주기 $h=0.06[sec]$ 일 때와 같은 결과를 보이며 전송률이 낮아질수록 허용 가능한 시간 지연의 범위가 점점 작아짐을 확인할 수 있다. 만약 센서 경로의 시간 지연이 $\tau_{sp}=0.015[sec]$, 액추에이터 경로의 시간 지연이 $\tau_{ap}=0.01[sec]$ 라면, 안정도를 보장하는 전송률의 범위는 정리 4로부터 $0.69 < r \leq 1$ 로 계산된다.

그림 9는 위의 샘플링 주기와 시간 지연 하에서 플랜트에 의한 $\xi_a(t)=1[u]$ 을 $t \in [1.0, 1.1][sec]$ 동안 인가할 경우, 전송률에 따른 시스템의 출력을 비교한 결과이다(센서 경로와 액추에이터 경로에서 발생하는 데이터 전송과 손실은 모두 확률적으로 발생하기 때문에 시뮬레이션 상에서 이를 구현하기 위해 랜덤 함수를 이용하였다. 즉, 전송률이 0.75인 경우에는 현재의 출력이 전송될 확률을 0.75, 과거의 출력이 지속될 확률을 0.25로 만드는 방법을 사용하였다).

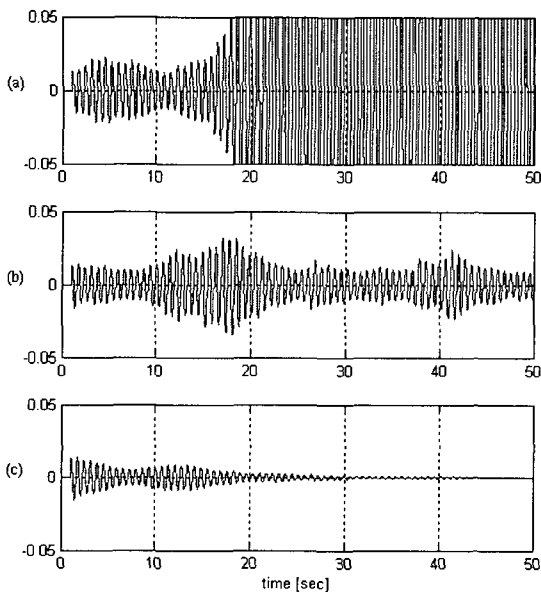


그림 9 전송률에 따른 네트워크 제어시스템의 출력 비교
(a) $r=0.65$, (b) $r=0.69$, (c) $r=0.75$

Fig. 9 Comparison of networked control system outputs with transmission rates (a) $r=0.65$, (b) $r=0.69$, (c) $r=0.75$

그림 9에서 (a)는 허용 전송률보다 낮은 $r=0.65$ 일 때의 출력 파형으로 전체 시스템이 불안정하며 (b)는 허용 전송률의 하한값 $r=0.69$ 일 때의 출력 파형으로 전체 시스템이 임계 안정하고 (c)는 허용 전송률의 범위에 속하는 $r=0.75$ 일 때의 출력 파형으로 전체 시스템이 안정함을 알 수 있다. 즉, 정리 4에서 구한 전송률의 하한값은 전체 네트워크

제어시스템이 안정하기 위한 최소 전송률과 같음을 확인할 수 있으며, 이로부터 정리 4가 비록 안정도를 보장하는 데이터 전송률의 범위를 구할 수 있는 충분조건이지만 시뮬레이션 결과를 살펴볼 때는 구해진 허용 전송률의 범위가 안정도를 결정하는 실제 범위와 같음을 확인할 수 있다.

이상의 시뮬레이션 결과로부터, 본 논문에서 제안된 정리들은 데이터 손실과 시간 지연에 따른 네트워크 제어시스템의 안정도 변화를 분석할 수 있는 효과적인 방법임을 알 수 있다.

5. 결 론

시간 지연과 데이터 손실은 네트워크를 사용하는 모든 분야에서 발생하는 기본적인 불확실 요소이며, 특히 네트워크를 이용하여 피드백 경로를 구성하는 네트워크 제어시스템에서는 이러한 불확실성에 의해 제어 성능 및 안정도가 크게 변화할 수 있다. 따라서, 네트워크 제어시스템의 신뢰성을 높이기 위해서는 위의 두 가지 불확실성을 모두 고려하여 전체 시스템의 안정도 변화를 분석하는 과정이 반드시 선행되어야 한다. 그러나 기존의 연구결과로는 시간 지연과 데이터 손실을 동시에 고려했을 때 전체 시스템의 안정도를 판별하고 그 변화를 분석하는 것이 불가능하였다. 본 논문에서는 시간 지연과 데이터 손실을 동시에 고려한 네트워크 제어시스템 모델을 유도하고 이로부터 전체 시스템의 안정도를 판별할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 또한, 네트워크 제어시스템의 샘플링 주기가 결정되었을 때 전체 시스템의 안정도를 유지할 수 있는 최대 시간 지연과 데이터 전송률의 범위를 구해낼 수 있음을 보였으며, 이를 시뮬레이션에 적용하여 분석한 결과 제안한 정리들의 타당성을 입증할 수 있었다. 본 논문에서 제안된 네트워크 제어시스템의 안정도 분석 방법은 향후 네트워크를 적용할 수 있는 다양한 제어시스템 응용 분야-원격 시스템, 대규모 시스템, 분산형 시스템, 공장·빌딩·택내 자동화 등-에 직접적으로 적용될 수 있으리라 기대된다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력 연구원(R-2003-B-412) 주관으로 수행된 과제임.

참 고 문 헌

- [1] "Special Section on Networks and Control," IEEE Control Sys. Mag., vol. 21, no. 1, pp. 22-99, Feb. 2001.
- [2] Gregory C. Walsh, Hong Ye, and Linda G. Bushnell, "Stability Analysis of Networked Control Systems," IEEE Trans. Control Sys. Tech., vol. 10, no. 3, pp. 438-446, May 2002.
- [3] Michael S. Branicky, Stephen M. Phillips, and Wei Zhang, "Stability of Networked Control Systems : Explicit Analysis of Delay," Proc. Amer. Control Conf., Chicago, IL, pp. 2352-2357, June 2000.

- [4] Feng-Li Lian, James Moyne, and Dawn Tilbury, "Network Design Consideration for Distributed Control Systems," *IEEE Trans. Control Sys. Tech.*, vol. 10, no. 2, pp. 297-307, Mar. 2002.
- [5] Feng-Li Lian, James Moyne, and Dawn Tilbury, "Modelling and optimal controller design of networked control systems with multiple delays," *Int. J. Control*, vol. 79, no. 6, pp. 591-606, June 2003.
- [6] Arash Hassibi, Stephen P. Boyd and Jonathan P. How, "Control of Asynchronous Dynamical Systems with Rate Constraints on Events," *Proc. 38th Conf. on Decision & Control*, Phoenix, AZ, pp. 1345-1351, Dec. 1999.
- [7] Alexandre Rabello and Amit Bhaya, "Stability of Asynchronous Dynamical Systems with Rate Constraints and Applications," *Proc. Amer. Control Conf.*, Anchorage, AK, pp. 1284-1289, May. 2002.
- [8] Yodyium Tipsuwan and Mo-Yuen Chow, "Control Methodologies in Networked Control Systems," *Control Engineering Practice*, vol. 11, Issue. 5, pp. 483-492, May 2003.
- [9] H. Ishii and B. A. Francis, *Limited Data Rate in Control Systems with Network*, Springer LNCIS vol. 275, 2002.
- [10] 정준홍, 최수영, 박기헌, "CAN을 이용한 발전계통의 제어 및 모니터링 기법 연구," *대한전기학회논문집*, vol. 52D, no. 5, May 2003.
- [11] A. Burns, "Scheduling Hard Real-time Systems:A Review," *Software Engineering Journal*, pp. 116-128, May 1991.
- [12] N. Audsley, A. Burns, M. Richardson, K. Tindell and A. J. Wellings, "Applying New Scheduling Theory to Static Priority Preemptive Scheduling," *Software Engineering Journal*, pp. 284-292, Sep. 1993.
- [13] Marco Di Natale, "Scheduling the CAN Bus with Earliest Deadline Techniques," *Proc. of IEEE Real-Time Sys. Symp.*, pp. 259-268, Nov. 2000.
- [14] R. Jurgen, "Coming from Detroit:Networks on Wheels," *IEEE Spectrum*, vol. 23, no. 6, pp. 53-59, 1986.
- [15] J. Hickey, "A Successful Fieldbus Trial," *Instrumentation and Control Systems*, vol. 67, no. 5, pp. 63-64, 1994.
- [16] K. Tindell, A. Burns and A. J. Wellings, "Calculating Controller Area Network (CAN) Message Response Times," *Control Engineering Practice*, Vol. 3, No. 8, pp.1163-1169, 1995.
- [17] Kiheon Park, "On the Equivalence Condition of Internal and External Stability of Linear Time-invariant Interconnected Systems," *KIEE*, vol. 9, no. 3, pp. 166-170, 1996.

저 자 소 개



정준홍 (丁俊弘)

1975년 1월 14일생. 1996년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년~현재 동 대학원 정보통신공학부 박사과정.
Tel : (031)290-7175, Fax : (031)290-7165
E-mail : nelcast@skku.edu



최수영 (崔壽榮)

1969년 9월 21일생. 1997년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1999년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터공학과 졸업(석사). 2003년 동 대학원 정보통신공학부 졸업(공학). 2003년~현재 삼성전자 스토리지 사업부 책임연구원.
Tel : (031)200-9134, Fax : (031)200-3536
E-mail : sooyoung.choi@samsung.com



박기헌 (朴基憲)

1955년 7월 5일 생. 1978년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년 Polytechnic Univ. 졸업(공학). 1990년~현재 성균관대학교 정보통신공학부 교수.
Tel : (031)290-7116, Fax : (031)290-7165
E-mail : khpark@yurim.skku.ac.kr