

Design of a Static Output Feedback Stabilization Controller by Solving a Rank-constrained LMI Problem

金 碩 柱<sup>†</sup> · 權 淳 萬<sup>\*</sup> · 金 春 經<sup>\*\*</sup> · 文 永 鉉<sup>\*\*\*</sup>

(Seogj-Joo Kim · Soonman Kwon · Chung-Kyung Kim · Young-Hyun Moon)

**Abstract** - This paper presents an iterative linear matrix inequality (LMI) approach to the design of a static output feedback (SOF) stabilization controller. A linear penalty function is incorporated into the objective function for the non-convex rank constraint so that minimizing the penalized objective function subject to LMIs amounts to a convex optimization problem. Hence, the overall procedure results in solving a series of semidefinite programs (SDPs). With an increasing sequence of the penalty parameter, the solution of the penalized optimization problem moves towards the feasible region of the original non-convex problem. The proposed algorithm is, therefore, convergent. Extensive numerical experiments are performed to illustrate the proposed algorithm.

**Key Words** : Linear Matrix Inequality(LMI), Static Output Feedback(SOF), Rank Condition, Penalty Method

1. 서 론

정적출력궤환(Static Output Feedback: SOF) 안정화 제어기 설계는 아직도 연구할 것이 많은 난제에 속한다[1]. 이것은 SOF 문제가 단순하지만 수학적 표현방법에 따라 볼록(convex) 또는 비볼록(non-convex) 문제가 되기 때문이다.

SOF 문제를 볼록화(convexification)하는 방법은 Mesbahi에 의해서 최근에 제안되었다[2]. Mesbahi가 제안한 알고리즘은 다항식 시간으로 해를 구할 수 있는 방법이지만 SOF 안정화 제어기 설계에만 적용할 수 있고  $H_2$  또는  $H_\infty$  제어에는 적용할 수 없다. 반면에 비볼록으로 정식화되는 SOF 문제는 BMI(Bilinear Matrix Inequality) 또는 계수조건(rank condition)이 있는 LMI로 표현된다. BMI로 표현되는 SOF 문제는 NP-Hard인 단점이 있지만 이를 일반화시켜 풀 수 있다면 최적 제어나 다목적 제어 등에 응용할 수 있으며 본 논문도 계수조건이 있는 LMI 문제로 표현되는 SOF 문제의 해법에 관한 것이다.

계수조건이 있는 비볼록 LMI 또는 BMI 문제를 푸는 방법으로 Goh 등[3]은 한정과 분기(branch-and-bound)에 의해 전역적으로 해를 탐색하는 방법을 제안하였다. 전역적 방법은 시간이 많이 걸리기 때문에 여러 가지 지역적 방법이 제안되었고, 대표적인 것이 좌표강하법(coordinate decent method)과 선형화법(linearization method)이다. 좌표강하법

은 비선형 계수조건으로 결합되어 있는 LMI 변수중 한쪽 변수를 고정하고 나머지 한쪽을 구하는 과정을 교대로 반복하는 방법이다[4-7].

Ghaoui 등[8]은 선형화에 기초한 지역적 방법인 CCL(Cone Complementarity Linearization) 법을 제안하였고 CCL 법은 기존의 지역적 방법 중 수치적인 계산 성능이 가장 좋은 것으로 평가되었다[9]. 또한 Cao 등[10]은 반복 LMI에 의한 SOF 제어기 설계 알고리즘을 제안하였고 최근에 Fazel 등[11] 로그-행렬식을 이용하여 계수조건을 가지는 일반적인 행렬의 LMI 문제에 관하여 연구하였다.

본 논문에서는 CCL 법과 같이 간단하게 구현이 가능한 반복 알고리즘을 제안하고자 한다. 이를 위하여 먼저 비볼록 계수조건을 선형 페널티 함수를 이용하여 목적함수로 나타내는 방법을 제시한다. 그리고 이 목적함수를 최적화시키는 해를 구하고 페널티 함수를 갱신하는 방법을 반복함으로써 비볼록 LMI 문제의 해를 얻는 알고리즘을 제시하고자 한다.

먼저 2장에서는 계수조건이 있는 LMI로 표현되는 SOF 안정화 제어기 문제에 관해서 서술한다. 3장에서는 페널티 함수를 이용하여 계수조건이 있는 LMI 문제를 푸는 방법에 대해서 설명하고 알고리즘의 특성에 관해서 서술한다. 수치 해석 사례는 4장에서 CCL 법과 비교하면서 서술한다.

본 논문에서 사용하는 주요 표기법은 다음과 같다.  $\mathbb{R}^n$ 은  $n \times n$  단위행렬을 나타내지만 때로  $n$ 은 생략되기도 한다.  $A^T$ 는 행렬  $A$ 의 전치행렬을 나타내고  $\text{tr}(A)$ 와  $\text{rank}(A)$ 는 각각 행렬  $A$ 의 대각합(trace)과 계수(rank)를 나타낸다. 또한  $\|A\|_F$ 는 행렬  $A$ 의 Frobenius 놈(norm)을 의미한다.  $A > 0$ (또는  $A \geq 0$ )은 행렬  $A$ 가 대칭이고 양한정(positive definite)(또는 양반한정:positive semidefinite)이라는 것을 표시한다.

<sup>†</sup> 교신저자, 正會員 : 韓國電氣研究院 先任研究員  
E-mail : sjkim@keri.re.kr  
<sup>\*</sup> 正會員 : 韓國電氣研究院 責任研究員 · 工博  
<sup>\*\*</sup> 正會員 : 韓國電氣研究院 先任研究員  
<sup>\*\*\*</sup> 正會員 : 延世大 工大 電氣工學部 教授 · 工博  
接受日字 : 2004年 7月 9日  
最終完了 : 2004年 9月 4日

$A^\perp$ 는  $A$ 의 직교여행렬(orthogonal complement matrix)을 나타낸다. 즉,  $A^\perp A = 0$ ,  $A^\perp A^{\perp T} > 0$  이다.

### 2. 정적출력 안정화 제어기

다음과 같은 연속 선형 시불변 시스템에 대해서 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

여기서  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ 는 각각 시스템의 상태 벡터, 입력벡터 및 출력벡터이고 행렬 ( $A, B, C$ )는 주어지는 시스템 데이터이다. 이때 SOF 안정화 제어기 설계 문제는  $u = Ky$ 의 제어기로 시스템 (1)의 폐루프 시스템

$$\dot{x} = (A + BKC)x \tag{2}$$

을 안정화시키는 상수이득  $K$ 를 구하는 것으로 정의된다.

잘 알려진 바와 같이 SOF 안정화 제어기 설계 문제는 LMI로 표현하면 다음 LMI와

$$C^{T\perp} (PA + A^T P) C^{T\perp T} < 0 \tag{3}$$

$$B^\perp (AQ + QA^T) B^{\perp T} < 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5}$$

추가적인 계수조건을

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P & I \\ I & Q \end{pmatrix} = n \tag{6}$$

만족하는 대칭행렬  $P, Q$ 를 구하는 것으로 귀결된다. LMI (3), (4), (5)와 계수조건 (6)을 만족하는  $P, Q$ 가 얻어지면 제어이득  $K$ 는 수치적인 방법이나 해석적인 방법으로 쉽게 구할 수 있다. 식 (6)은  $PQ = I$ 인 대수제약 조건과 동가이며 식 (6)의 비선형 조건 때문에 식 (3), (4), (5), (6)으로 표현되는 SOF 안정화 제어기 설계는 비블록 NP-Hard 문제가 된다. 축소차수  $H_2$  또는  $H_\infty$  최적제어 문제의 경우도 LMI를 이용하여 표시하면 LMI (5)와 계수조건 (6)이 포함되기 때문에 계수조건이 있는 SOF 문제를 일반화시켜 풀 수 있으면 강인제어, 다목적제어 등 다른 제어기 설계 문제에도 적용할 수 있다.

만약 제어기의 차수가  $k$  ( $k < n$ )인 축소차수 안정화 제어를 설계한다면 시스템 첨가(system augmentation) 기법 [8]을 이용하여 축소차수 안정화 제어기 문제를 SOF 문제로 변환할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u \\ u &= C_c x_c + D_c u \end{aligned} \tag{7}$$

와 같이  $x_c \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 를 상태로 가지는 축소차수 제어를 설계한다고 하자. 이때 구하고자 하는 제어기 변수를

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \tag{8}$$

로 놓고 새로운 시스템 행렬 ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ )를

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

로 정의하면  $k$ 차 출력제한 제어기 설계문제가 ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ )를 시스템 행렬로 가지고 식 (8)의  $K$ 와 같은 제어이득을 가지는 SOF 안정화 제어기 설계 문제로 변환된다.

### 3. 페널티 함수를 이용한 LMI 문제 해법

SOF 안정화 제어기 설계 문제를 일반화하여 계수조건이 있는 LMI 문제로 표현하면 다음과 같이 가능해(feasible solution)를 찾는 문제로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{find} && x \\ &\text{subject to} && X(x) \geq 0, L(x) > 0 \\ &&& \text{rank} (X(x)) \leq r \end{aligned} \tag{10}$$

여기서  $x$ 는 구하고자 하는 변수(decision vector)이고  $X(x), L(x)$ 는  $x$ 에 관한 아핀(affine) 함수이다. 또한  $r$ 은  $X$ 의 전계수(full rank)보다 작다고 가정한다.

다음에 식 (10)의 계수조건이 있는 LMI 문제가 페널티 함수를 이용하면 계수조건이 없는 LMI 최적화 문제로 변환되는 것에 대해서 알아본다.

#### 3.1 페널티 방법을 이용한 LMI 문제의 정식화

어떤  $n \times n$  양반한정 행렬의 계수가  $r$ 이라고 하면 그 행렬의 고유치 중  $n - r$ 개는 영이 되어야 한다. 따라서 어떤 양반한정 행렬의  $n - r$ 개의 고유치의 합이 영이 되면 그 행렬의 계수는  $r$ 이하가 된다.

먼저 다음과 같은 대칭행렬의 고유치 합에 관한 정리를 생각해 보기로 하자.

**[보조정리 1]** [12, p. 191] 대칭행렬  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의  $n$ 개의 고유치가 다음과 같다고 하자.

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_n$$

이때  $X$ 의 고유치  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 의 합은 다음과 같은 상계(upper bound)를 가진다.

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \text{tr}(V^T X V) \tag{11}$$

여기서  $V^T V = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 이다. 또한 식 (11)의 등호는 행렬  $V$ 가  $X$ 의  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  고유치에 해당하는 고유벡터로 구성된 경우에 성립한다.

보조정리 1로부터 문제 (10)의 해는 부등식 (11)의 우변이 영이 되면 구해진다는 것을 알 수 있고 이것은 다음 보조정리 2로부터도 증명된다.

**[보조정리 2]** 정규직교열(orthonormal column)을 가지는 행렬  $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ 에 대해서 어떤 양반한정 행렬  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 가 다음을

$$\text{tr}(V^T X V) = 0 \tag{12}$$

만족한다고 하면  $X$ 의 계수는

$$\text{rank}(X) \leq r$$

이다.

식 (12)에서 보면 행렬  $X$ 의 계수가  $r$ 보다 크면 대각합은 항상 영보다 크며  $X$ 의 계수가  $r$ 보다 작거나 같을 때만 영이 된다. 따라서 식 (12)의 대각합을 페널티 함수로 이용할 수 있다.

이제 문제 (10)에서 페널티 함수를 고려한 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi(x; \mu, V) = \text{tr}(X) + \mu p(x; V) \quad (13)$$

여기서  $\mu$ 는 페널티 변수이고 페널티 함수  $p(x; V)$ 는

$$p(x; V) = \text{tr}(V^T X V) \quad (14)$$

이다. 또한  $\text{tr}(X)$ 는  $X$ 의 고유치의 합이므로 다른 고유치에 대한 상대적인 하중(weight)을 주는 의미로 추가된다.

식 (13)에서 페널티 변수를 변화시키면서  $p(x; V) = 0$ 이 되는  $x$ 를 구하면 원하는 해가 얻어진다. 따라서 계수조건이 있는 문제 (10)은 다음과 같이 계수조건이 없고 페널티 함수가 포함된 목적함수의 최적화 문제로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \varphi(x; \mu, V) \\ &\text{subject to} \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\Omega = \{x : X(x) \geq 0, L(x) > 0\}$$

이다.

식 (15)에서 다음과 같이  $V_0$ 가 주어지고  $\mu$ 가 고정된 경우를 생각해 보자.

$$x_k = \min \{\varphi(x; \mu, V_{k-1}) : x \in \Omega\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

여기서  $V_k$ 는  $x_k$ 로부터 고유치 분해를 이용하면 계산할 수 있다. 이때 식 (16)의 해는 다음과 같은 수렴특성을 가진다.

**[보조정리 3]** 양의 실수  $\mu$ 와 행렬  $V_0$ 가 주어졌다고 가정하고 식 (16)의 해를 순차적으로 구하면  $\{x_k\}$ 는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\varphi(x_{k+1}; \mu, V_k) \leq \varphi(x_k; \mu, V_{k-1}) \quad (17)$$

$$p(x_{k+1}; V_{k+1}) \leq p(x_{k+1}; V_k) \leq p(x_{k+1}; V_{k-1}) \quad (18)$$

**[증명]** 최적조건과 식 (11)로부터 다음의 부등식이 성립하고

$$\varphi(x_{k+1}; \mu, V_k) \leq \varphi(x_k; \mu, V_k) \leq \varphi(x_k; \mu, V_{k-1}),$$

$$\varphi(x_k; \mu, V_{k-1}) \leq \varphi(x_{k+1}; \mu, V_{k-1})$$

이 부등식으로부터 식 (17)과 (18)이 성립한다. □

보조정리 3은 목적함수  $\varphi(x_k; \mu, V_{k-1})$ 가 고정된  $\mu$ 에 대해서 반드시 수렴한다는 것을 나타내고 있다. 이것은 블록 프로그램의 특성상  $V_k$ 가 수렴함을 의미하고 따라서  $x_k$ 도 수렴함을 의미한다.

만약 어떤  $\mu$ 에 대해서 페널티 함수  $p(x; V)$ 의 값이 충분히 작아지지 않는다면  $\mu$ 를 증가시켜 식 (15)의 해를 구한다. 그때 얻어진 해는 다음의 보조정리에 의해서 좀 더 가능영역에 근접하게 된다.

**[보조정리 4]**  $(\bar{x}_k, \bar{V}_k)$ 를  $(\mu_k, V_0)$ 에 대한 식 (15)의 수렴

값이라고 하고  $(\bar{x}_{k+1}, \bar{V}_{k+1})$ 를  $(\mu_{k+1}, \bar{V}_k)$ 에 대한 수렴값이라고 할 때  $\mu_{k+1} > \mu_k$  라 하면 다음과 같은 페널티 부등식이 성립한다.

$$\varphi(\bar{x}_{k+1}; \mu_{k+1}, \bar{V}_k) \geq \varphi(\bar{x}_k; \mu_k, \bar{V}_k) \quad (19)$$

$$p(\bar{x}_{k+1}; \bar{V}_{k+1}) \leq p(\bar{x}_k; \bar{V}_k) \quad (20)$$

**[증명]** 보조정리 3과 일반적인 페널티 방법[13]을 응용하면 쉽게 증명할 수 있다. □

보조정리 3과 4를 다른 방법으로 설명하기 위해서 식 (13)의 목적함수를 다음과 같이 쓰자.

$$\varphi(x; \mu, V) = \sum_{i=1}^n \lambda_i + \mu \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \quad (21)$$

그러면 보조정리 3은 어떤  $\mu$ 에 대해서  $X$ 의 고유치가 수렴함을 의미하고 보조정리 4는  $\mu$ 를 증가시키면  $X$ 의  $(n-r)$ 개의 고유치 합은 작아지고  $r$ 개의 고유치 합은 커짐을 의미한다.

따라서 페널티 변수를 증가시키면서 페널티화된 목적함수를 최소화시키는 해가 구해진다는 것을 알 수 있고 또 반복 계산과정 중에 얻어지는 해는 항상 페널티 함수값을 감소시키는 방향으로 구해진다는 것을 알 수 있다.

또한 식 (14)에서 페널티 함수가 선형이고 페널티 함수값이  $x \in \Omega$ 에서 항상 영보다 크기 때문에 식 (14)의 페널티 함수가  $x \in \Omega$ 에서 완전 페널티함수(exact penalty function)가 된다는 것을 알 수 있다.

따라서  $p(x_{k+1}; V_k) = 0$ 을 만족하는 유한의  $\mu$ 가 존재하게 된다.

### 3.2 페널티 함수를 이용한 알고리즘

페널티 함수를 이용하여 비블록 LMI 문제의 해를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

**[알고리즘 1]** 페널티 함수를 이용한 비블록 LMI 문제의 해법 (Penalty Function Method : PFM)

(단계 1) 초기화. 페널티 변수  $\mu = 0$ 으로 놓고 다음의 LMI 최적화 문제의 해를 구한 후

$$x_0 = \min_x \{\text{tr}(X) : x \in \Omega\}$$

$$x_k = x_0, \mu_k = \mu_0, \alpha \in (0, 1), \tau > 1 \text{ 로 놓는다.}$$

(단계 2) 행렬  $V$  계산.  $X(x_k)$ 로부터 고유치 분해를 이용하여  $V_k$  행렬을 구한다.

(단계 3) 블록 최적화 수행. 다음 LMI 최적화 문제를 풀어  $x_{k+1}$ 을 구한다.

$$x_{k+1} = \min_x \{\text{tr}(X) + \mu_k p(x; V_k) : x \in \Omega\}$$

(단계 4) 가능해 여부 시험 (feasibility test). 만약  $p(x_{k+1}; V_k) < \epsilon$  이면 주어진 계수조건을 만족하는 해를 얻었으므로 프로그램을 종료한다.

(단계 5) 페널티 변수 갱신. 만약  $x_{k+1}$ 이 가능해가 아니

고  $p(x_{k+1}; V_k) > \alpha p(x_k; V_{k-1})$  이면 페널티 변수를  $\mu_{k+1} = \tau \mu_k$  로 증가시킨다.

(단계 6) 다음 스텝 수행.  $k = k + 1$  로 놓고 단계 2 로 간다.

PFM은 알고리즘에서 알 수 있듯이 고유치 분해 부분을 제외하면 CCL 법과 거의 비슷하다. 하지만 조정 변수인 페널티 변수에 의해서 CCL 법보다 우수한 성능을 가지게 되며 이는 시물레이션을 통하여도 알 수 있다.

4. 시물레이션

본 논문에서 제안하고 있는 페널티 함수법의 효용성을 입증하기 위하여 시물레이션을 수행하였다. LMI 최적화 문제는 SeDuMi 패키지를 이용하여 풀었으며 SeDuMi 사용자 인터페이스로는 YALMIP를 사용하였다[14,15]. 또한 수렴 조건  $\epsilon = 10^{-3}$  으로 하였다.

계산 결과는 CCL 법과 비교하였으며 여러 가지 경우에 대해 성능을 비교하였다.

예제 1 (무작위 발생 플랜트). PFM의 수치적 성능을 시험하기 위하여 무작위로 발생시킨 시스템에 대하여 SOF 안정화 제어를 설계하였다. 시스템 차수  $n \in [3, 8]$ 에 대해서 Oliveira 와 Geromel[9]이 제시한 방법으로 개루프 불안정한 시스템을 1500개씩 선정하여 제어를 설계하고 CCL 법과 비교하였으며 결과를 표 1에 나타냈다.

표 1 무작위로 발생시킨 플랜트에 대한 계산 결과  
Table 1 Results for randomly generated plants

시스템 차수	샘플 수	평균 반복횟수		수렴 실패 횟수	
		PFM	CCL	PFM	CCL
3	1500	1.134	1.130	0	0
4	1500	1.500	1.376	0	3
5	1500	1.735	1.670	0	2
6	1500	2.204	1.948	0	2
7	1500	2.749	2.300	0	1
8	1500	3.438	2.648	0	1

표 1에서 알 수 있는 바와 같이 PFM이 CCL 법보다 평균적으로 약간 많은 반복횟수가 필요하였지만 PFM은 항상 해를 찾는데 성공하였다.

한 예로서 4차 시스템에서 CCL 법이 해를 얻는데 실패한 경우를 보기로 한다. 발생된 시스템 행렬은 다음과 같다

$$A = \begin{bmatrix} 0.3388 & -0.6434 & 0.7413 & -0.8001 \\ 1.0335 & 0.1708 & 0.8120 & 0.4932 \\ -1.4048 & 1.3448 & -0.1428 & 1.2376 \\ -1.0306 & 1.9363 & -0.0999 & 1.2960 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2782 & 0.2171 & 0.6307 & -0.5485 \\ 0.2296 & 0.3553 & 0.5213 & -0.6160 \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.3458 & -2.3779 & -0.3257 & 1.5677 \\ 0.9749 & -1.0923 & -2.0122 & 0.2333 \end{bmatrix}$$

이 시스템은 다음과 같은

$$\{2.3182, -0.5884, -0.0335 \pm j 0.9475\}$$

고유치를 가지는 불안정한 시스템이다. 이 시스템에 대해 PFM과 CCL 법을 적용한 결과를 그림 1에 나타냈다. 이때 성능비교를 위한 척도는  $PQ - I$  의 Frobenius 놈으로 하였으며 PFM으로 계산한 이득  $K$  는 다음과 같았다.

$$K = \begin{bmatrix} 78.296 & -84.486 \\ 38.798 & -40.784 \end{bmatrix}$$

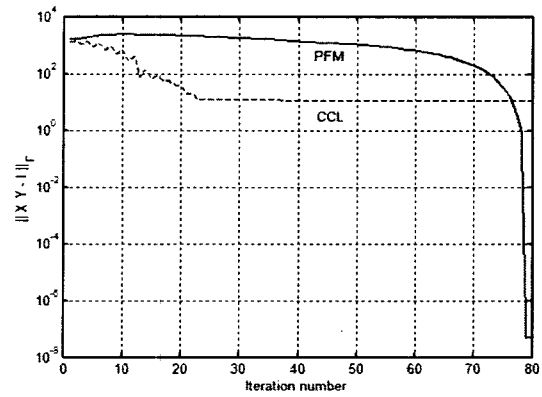


그림 1 CCL 법과 PFM의 시스템 (21)에 대한 성능비교  
Fig. 1 Performance comparison of the PFM and the CCL method for system (22)

그림 1에서 보면 CCL 법은 초기에 빠르게 Frobenius 놈을 빠르게 감소시키고 있지만 어느 정도 지나면 더 이상 진전이 없는 것을 알 수 있다. 하지만 PFM 은 수렴속도는 느리지만 확실하게 해를 찾는 것을 알 수 있다. 그림 2 는 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다.

예제 2 [16]. 수치적으로 풀기 어렵다고 알려진 플랜트에 PFM 을 적용시켜 보기로 한다. 다음과 같은 시스템 행렬을 가지는 플랜트를 고려해 보자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \eta \\ -(1 + \eta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

이 시스템을 안정화시키는 제어이득의 범위는

$$K \in [-(1 + \eta)^2, -1]$$

이며  $\eta$  가 작아지면서 대부분의 알고리즘이 해를 찾는데 실패하는 것으로 알려져 있다.  $\eta = 10^{-5}$  인 시스템에 PFM 을 다음의 계산변수를 사용하여

$$\mu_0 = 10^7, \alpha = 0.95, \tau = 1.2$$

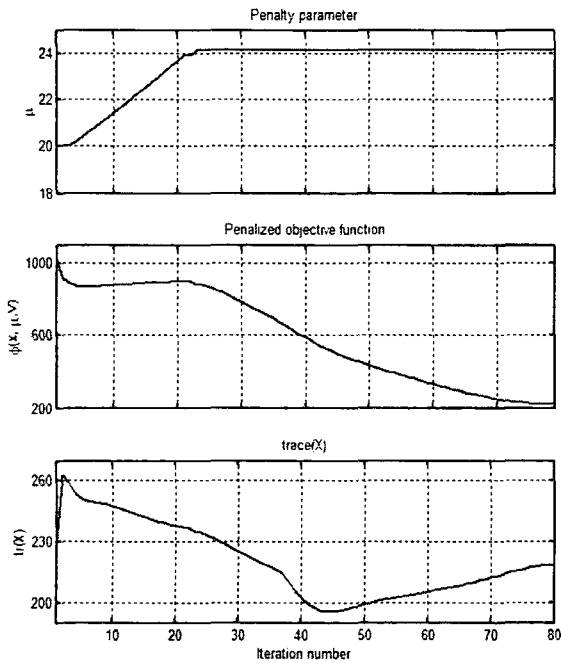


그림 2 시스템 (21)에 대한 PFM의 계산 특성.  
 Fig. 2 Computational behavior of the PFM for system (21).

적용한 결과  $K = -1$ 인 해를 얻었다. 이때 수치계산의 안정성을 위해  $\mu$ 는  $10^{12}$ 로 제한하였고 얻어진 행렬  $P, Q$ 는 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 223.85 & -223.84 \\ -223.84 & 223.85 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 223.85 & 223.84 \\ 223.84 & 223.85 \end{bmatrix}$$

그림 3은 예제 2의 시스템에 대하여 CCL법과 PFM을 비교한 결과이다. 이때 CCL 법은 250회 반복계산 후에도 수렴하지 못했다. 그림 4는 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다.

이상의 여러 결과에서 PFM은 CCL 법과 같은 1차 형식이지만 좋은 수렴특성을 가지고 있다는 것을 알 수 있었다.

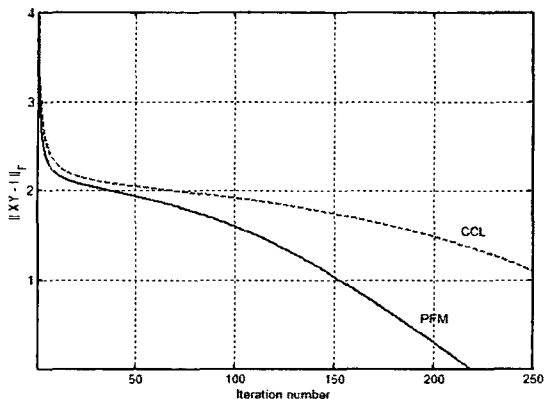


그림 3 예제 2에 대한 CCL 법과 PFM의 계산 성능비교.  
 Fig. 3 Performance comparison of the PFM and the CCL method for example 2.

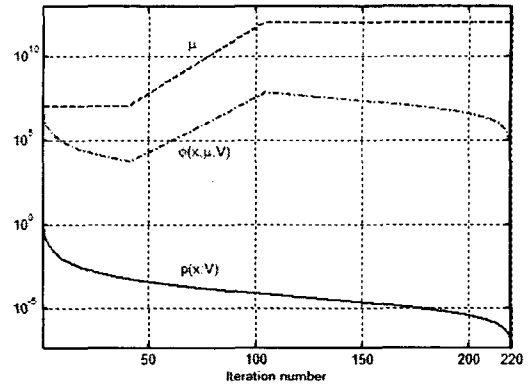


그림 4 예제 2에 대한 PFM의 계산 특성.  
 Fig. 4 Computational behavior of the PFM for example 2.

### 5. 결 론

본 논문에서는 선형행렬부등식을 이용한 정적출력 제환제어기 설계에 페널티 함수를 이용한 방법을 제안하였다. 제시된 방법은 비블록 계수조건을 페널티화된 목적함수에 포함시켜 LMI 최적화 문제로 변환하여 해를 구하는 방법이다. 페널티 변수를 증가시키면서 순차적인 LMI 문제의 해를 구하면 그 해는 항상 계수조건을 만족시키려는 방향으로 구해진다는 것을 알 수 있었다.

제시된 방법을 여러 경우에 적용시킨 결과 충분히 효용성이 입증되었으며 또한 다른 제어문제에 적용할 수 있는 가능성을 보였다.

### 참 고 문 헌

- [1] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis, "Static output feedback - a survey", *Automatica*, Vol. 33, No. 1, pp. 125-137, 1997.
- [2] M. Mesbahi, "A semi-definite programming solution of the least order dynamic output feedback synthesis problem", In Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 1851-1856, 1999.
- [3] K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos, "A global optimization approach for the BMI problem", In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 2009-2114, 1994.
- [4] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "LMI numerical solution for output feedback stabilization", In Proc. of the American Control Conference, pp. 40-44, 1994.
- [5] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design", *International Journal of Control*, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272, 1995.
- [6] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Low order control design for LMI problems using alternating projection methods", *Automatica*, Vol. 32, No. 8, pp.

1117-1125, 1996.

[7] T. Iwasaki, "The dual iteration for fixed order control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 4, pp.783-788, 1999.

[8] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, 1171-1176, 1997.

[9] M. C. de Oliveira and J. C. Geromel, "Numerical comparison of output feedback design methods", In Proc. of the American Control Conference, pp. 72-76, 1997.

[10] Y. Y. Cao, L. James and Y. X. Sun, "Static output feedback stabilization: ILMI approach", Automatica, Vol. 34, No. 12, pp. 1641-1645, 1998.

[11] M. Fazel H. Hindi and S. Boyd, "Log-det heuristic for matrix rank minimization with application to Hankel and euclidean distance matrices", In Proc. of the American Control Conference, pp. 2156-2162, 2003.

[12] R. A. Horn and C. R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge University Press, 1986.

[13] D. G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, 1982.

[14] J. F. Sturm, "Using SEDUMI 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones", Available from <http://fewcal.kub.nl/~sturm>.

[15] J. Lofberg, "YALMIP 3", Available from <http://control.ee.ethz.ch/~joloef>.

[16] D. Noll, M. Toriki and P. Apkarian, "Partially augmented Lagrangian method for matrix inequalities constraints", Preprint, Available from <http://www-ext.cert.fr/dcsd/cdin/apkarian>.

## 저 자 소 개



### 김 석 주(金碩柱)

1984년 연세대학교 전기공학과 졸업(학사). 1986년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년~현재 한국전기연구원 계측제어그룹

Tel : 055-280-1472, Fax : 055-280-1476

E-mail : sjkim@keri.re.kr



### 권 순 만(權淳萬)

1982년 부산대 전기공학과 졸업(학사). 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999년 Washington University 졸업(박사). 1984년~현재 한국전기연구원 계측제어그룹 그룹장

Tel : 055-280-1441, Fax : 055-280-1476

E-mail : smkwon@keri.re.kr



### 김 춘 경(金春經)

1985년 연세대학교 전기공학과 졸업(학사). 1987년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1989년~현재 한국전기연구원 계측제어그룹

Tel : 055-280-1446, Fax : 055-280-1476

E-mail : cckim@keri.re.kr



### 문 영 현(文永鉉)

1952년 3월 11일생. 1975년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1978년 동 대학교 전기공학과 대학원 졸업(석사). 1983년 오레곤주립대 대학원 졸업(공학박). 현재 연세대학교 전기전자공학부 교수.

Tel : 02-2123-2771

E-mail : moon@yonsei.ac.kr