

# 잡음과 오류제거를 위한 웨이블릿기반 반복적 영상복원

## Iterative Image Restoration Based on Wavelets for De-Noiseing and De-Ringing

이 남 용\*

Nam-Yong Lee\*

### 요 약

본 논문에서는 반복적 영상복원과정에서 자주 등장하는 경계관련 오류와 물체관련 오류를 효과적으로 제거하기 위한 새로운 반복적 영상복원방법을 제안하고자 한다. 제안한 방법은 반복과정내부에 웨이블릿 축소법을 이용한 변형된 CGM(Conjugate Gradient Method)을 이용하였다. 제안한 방법은 CGM과 같은 빠른 복원과 함께 웨이블릿 축소법에 의한 적응적인 잡음제거와 오류제거를 동시에 제공한다. 효과적인 잡음제거와 오류제거를 동시에 얻기 위해 웨이블릿 축소는 위치에 따라 변하는 웨이블릿 축소규칙을 사용하였다. 기존의 반복적 영상복원 알고리즘인 LR(Lucy-Richardson), CGM과의 비교실험을 통해 제안한 방법이 LR에 비교해서는 전체적으로 향상된 복원과 물체관련오류가 거의 없다는 측면, 그리고 CGM과의 비교에서는 물체 및 경계 관련오류가 거의 없다는 측면에서 기존의 방법에 비해 우수하다는 것을 확인하였다.

### ABSTRACT

This paper presents a new iterative image restoration algorithm with removal of boundary/object-oriented ringing. The proposed method is based on CGM(Conjugate Gradient Method) iterations with inter-wavelet shrinkage. The proposed method provides a fast restoration as much as CGM, while having adaptive de-noising and de-ringing by using wavelet shrinkage. In order to have effective de-noising and de-ringing simultaneously, the proposed method uses a space-dependent shrinkage rule. The improved performance of the proposed method over more traditional iterative image restoration algorithms such as LR(Lucy-Richardson) and CGM in de-noising and de-ringing is shown through numerical experiments.

**Key words:** Wavelets, LR, CGM, De-Noiseing, Boundary-oriented ringing, Object-oriented ringing, De-Ringing

### I. 서 론

영상복원은 영상획득 및 처리시 주변환경과 관측장치 등에 의해서 변형되거나 오염된 영상으로부터 원래의 고유 영상을 복원하는 과정을 의미한다. 특히, 변형과정이 선형인 경우에 영상복원 문제는 수학적으로 행렬  $K$ 에 의해 변형된 데이터

$$(Kf)_d = \sum_b K_{d,b} f_b$$

로부터 원래의 벡터  $f$ 를 복원하는 문제로 표현된다. 본 논문에서는 변형과정이 공간 불변형으로 합성(convolution)에 의해 표현 가능한 경우만 다루고자 한다. 즉, 변형된 데이터에 대해

$$\begin{aligned} \sum_b K_{d,b} f_b &= (h*f)_d \\ &= \sum_{b_1, b_2} h_{d_1-b_1, d_2-b_2} f_{b_1, b_2}, \\ d &= (d_1, d_2), b = (b_1, b_2) \end{aligned}$$

이 되게 하는 시스템 필터  $h$ 가 존재하는 경우만 다루고자 한다. 여기서,  $b_i (i=1,2)$ 는  $d_i - M \leq b_i \leq d_i + M$ 을 만족한다. 또한, 본 논문에서는 시스템 필터  $h$ 가

\*인제대학교 정보기술공학부

접수 일자 : 2004. 8. 05      수정 완료 : 2004. 10. 18

논문 번호 : 2004-2-7

※본 연구는 2003년도 인제대학교 학술연구조성비의 보조에 의해 수행되었음.

$(2M+1) \times (2M+1)$  의 크기로 중앙 점을 중심으로 좌·우, 상·하 대칭이고  $h_d \geq 0$  인 경우만 다루고자 한다.

영상복원문제를 어렵게 하는 요소를 대략적으로 살펴보면 크게 다음 3가지를 들 수 있다:

1) 잡음에 오염된 관측영상 - 관측영상  $y_d$ 는 복원하고자하는 영상  $f$ 의 변형결과  $(h*f)_d$ 가 잡음에 오염되어 관측된 것이다. 이러한 관측영상의 잡음은 영상복원이 단순히 변형행렬  $K$ 의 역변환과정으로 만족하지 못하게 하는 원인이 되게 한다. 이 논문에서는 관측영상의 잡음에 대하여 서로 독립적인 정규분포

$$y_d \sim N((h*f)_d, \sigma^2)$$

와 포아송(Poisson) 분포

$$y_d \sim \text{Poisson}((h*f)_d)$$

를 따르는 경우를 각각 고려하였다. 첫 번째 정규잡음모델은 일반적인 영상복원문제에 널리 사용되어온 것이고 두 번째 포아송 모델은 PET, SPECT등의 핵의학 영상 촬영 기기, 천체망원경 등의 관측모델에 널리 사용되고 있다[1].

2) 영상의 경계부분과 윤각부분 근처에서 발생하는 오류(Boundary/Object-oriented ringing) - 합성에 의해 변형된 영상을 관측한 경우에, 영상의 바깥 경계부분(Boundary)은 영상의 내부부분과는 다르게 영상복원과정에서 필요한 정보가 불충분하거나 불필요한 정보와 함께 얻을 수밖에 없다. 가령, 시스템 필터  $h$ 가  $(2M+1) \times (2M+1)$ 의 크기이고 중앙 점을 중심으로 좌·우, 상·하 대칭인 경우에는 관측 영상의 바깥 경계부분에 폭의 크기가  $M$ 인 테두리는 관측 영상 밖의 미지의 부분의 정보를 포함하는 동시에 그 부분의 일부 정보는 그 영상바깥부분으로 빠져나가 있다. 일부 복원된 영상에 오류를 가져오게 하는 원인이 된다[2][3]. 이러한 오류를 경계관련 오류(Boundary-oriented ringing)이라고 명명하자. 한편, 영상 내에는 물체의 형체를 뚜렷이 구별하게 하는 윤각(Edge)이 존재하는데 대부분의 반복법은 이러한 영상내의 경계부분에서 오류를 나타낸다. 이러한 오류는 대부분의 반복법이 부드러운 부분에서는 상대적으로 빠르게 수렴하는 반면에 그렇지 못한 부분에서는 느리게 수렴하는데 원인이 있다. 이러한 오류는 물체의 형상에 대한 잔상이 반복적으로 나타나는 형태로 등장한다. 이러한 오류를 물체관련 오류(Object-oriented ringing)이라고 명명하자.

3) 부정확한 시스템 필터 추정 - 시스템 필터  $h$ 에 대한 추정이 부정확한 경우에는 이를 정확히 추정하는 것이 선행되어야 한다. 그리고 나서 추정된 시스템 필터  $h$ 를 이용하여 영상복원을 해야 하는데 이러한 과정을 눈먼 합성분리(Blind Deconvolution)이라 한다. 본 논문에서

이러한 문제는 생략하고자 한다. 즉, 시스템 필터  $h$ 에 대한 추정은 정확한 것으로 가정한다.

기존의 영상복원방법으로 널리 사용되어온 것으로 Wiener 필터링, Pseudo Inverse 필터링과 같은 직접법과 영상복원문제를 선형연립방정식 해법의 일환으로 보고 접근하는 반복법 등을 들 수 있다. 모든 직접적인 방법들은 관측된 영상이 순환합성(Circular Convolution)에 의해 얻어진 경우에, 이를 DFT를 이용하여 분해할 수 있다는 사실, 즉,

$$y_d = (h * f)_d \rightarrow Y_w = H_w F_w$$

에 기인하고 있다. 여기서  $Y, H, F$ 는 각각  $y, h, f$ 의 DFT 결과이며,  $*$ 로 표시된 순환합성은 주어진 영상  $f$ 가 주기적이라는 가정을 가지고 계산한 합성이다. 위의 사실에 의해 복원하고자 하는 영상  $f$ 는  $Y_w/H_w$ 에 대한 IDFT(Inverse DFT)를 적용하여 쉽게 구할 수 있을 것으로 예상되지만 관측영상이 잡음에 오염된 경우, 보통의  $H_w$ 가  $|w|$ 가 커지면서 0에 근접한다는 사실 때문에 좋은 복원영상을 결과를 기대할 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Wiener 필터링은 관측영상의 잡음이 정규분포를 따르는 경우에 MSE(Mean Square Error)를 최소화시키는 선형영상복원방법으로 관측된 영상에 Wiener 필터  $g$ 를 합성한다. 즉, Wiener 필터링에 의한 복원영상은

$$\tilde{f}_d = (g * y)_d,$$

$$g_{d_1, d_2} = \text{DFT}_2^{-1} \left( \frac{H_{w_1, w_2}^* S_{w_1, w_2}^{ff}}{|H_{w_1, w_2}|^2 S_{w_1, w_2}^{ff} + S_{w_1, w_2}^{zz}} \right)$$

에 구해진다. 여기서  $\text{DFT}_2$ 는 2차원 DFT(Fast Fourier Transform)를,  $H_{w_1, w_2} = \text{DFT}_2(h_{d_1, d_2})$ ,  $z$ 는 정규잡음을,  $S_{w_1, w_2}^{ff}$ ,  $S_{w_1, w_2}^{zz}$ 는 각각  $f$ 와  $z$ 의 Power Spectrum을 의미한다. Wiener 필터링은 관측된 영상에 필터  $g$ 를 합성하여 영상을 복원하기 때문에 그 처리가 속도가 빠르다는 장점이 있으나, 필터  $g$ 를 구하는데 필요한 원래 영상  $f$ 의  $S_{w_1, w_2}^{ff}$ 를 관측된 영상  $y$ 에서 추정해야 하고 잡음  $z$ 가 정규분포가 아닌 경우에는  $S_{w_1, w_2}^{zz}$ 를 구하는데 문제가 있다. 또한, 관측영상은 순환합성에 의해 얻어지는 것이 아니고 합성에 의해 얻어진 것으로 이에 따른 오류도 고려해야 하는 단점이 있다. 일반적으로 Wiener 필터링은 영상의 변형정도가 심한 경우에는 단순 잡음제거 이외의 복원효과를 기대하기 어렵다.

반복적 영상복원은 영상복원의 문제를 선형연립방정식 또는 최적화문제를 변환한 후에 그것의 해를 반복적 형태로 접근해 가는 방법을 통칭한다. 대표적인 반복적 영상복원 방법의 예로 LR[4],[5]과 CGM[6]을 들 수 있다. 최적화를 이용한 영상복원의 예로, 다음과 같은 정칙 최소화(Regularized Minimization) 문제를 고려해 보자.

$$\hat{f} = \arg \min_{\phi} \{ \|y - K\phi\|^2 + \lambda \|\phi\|^2 \} \quad (1)$$

여기서  $\arg$ 는 우측의 최적화를 달성하는 대상을 의미한다. 간단한 계산에 의해 식 (1)의 해는

$$K'y = (K'K + \lambda I)\hat{f} \quad (2)$$

을 만족해야함을 알 수 있다. 이러한  $\hat{f}$ 를 구하는 반복법은 여러 가지가 있는데 그 중에서 가장 대표적인 방법의 하나로 CGM을 들 수 있다. 비록, CGM에 의한 영상복원은 Wiener 필터링에 비해 그 속도는 느리나 비교적 적은 반복횟수를 이용하여 상대적으로 좋은 영상복원을 이룰 수 있는 장점이 있다. 그러나, CGM은 관측모델에 대한 통계적 가정을 효과적으로 이용하기가 어렵다는 점과 경계문제가 발생한다는 단점이 있다. 한편, LR방법은 CGM에 비해 복원과정에서 경계문제는 크게 영향을 주지 않으나 느린 수렴에 의한 낮은 복원력이 문제가 된다. 그러한 현상은 영상내의 윤곽 근처에서 흔히 발생한다.

본 논문에서 제안하고자 하는 영상복원 방법은 경계 관련 오류(Boundary-oriented ringing)와 물체관련 오류(Object-oriented ringing)를 최소화시키면서, 동시에 잡음 제거와 영상복원을 효과적으로 수행하는 반복법이다. 여기서, 반복법(Iterative method)을 제안하는 이유는 영상의 변형정도가 심한 경우에는 실질적인 영상복원에 직접법(Direct method)으로는 한계가 있기 때문이다. 본 논문에서는 잡음제거(De-Noiseing)와 오류제거(De-Ringing)을 얻기 위해서 웨이블릿 축소법(Wavelet shrinkage)을 이용한 변형된 CGM을 제안하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 영상복원에서 발생하는 경계관련 오류와 물체관련 오류에 다루었다. 3장에서는 웨이블릿 축소법을 이용한 새로운 영상복원 방법을 제안하였다. 4장은 제안된 방법의 성능을 LR과 CGM 방법과 비교 실험한 결과를 다루고 있다. 끝으로, 5장은 결론과 향후 연구방향을 제시하였다.

## II. 반복적 영상복원에서의 오류

이 장에서는 CGM과 LR을 중심으로 반복적 영상복원 방법에서 흔히 등장하는 경계관련 오류와 물체관련 오류에 대해서 알아보도록 하자. 이 장에서는, 오류의 실체를 시각적으로 분명히 보이기 위해 1-D 신호를 이용하였다.

CGM 방법은 선형연립방정식에 대한 반복적 해법이다. 특히, 선형연립방정식의 해법을 식 (1)와 같은 정칙최소화 문제로 접근하는 경우에 다음과 형태의 반복법을 갖는다.

$$\text{초기값: } d^0 = -g^0 = b - Qf^0$$

$$\text{반복과정: } f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n$$

$$\alpha_n = -\frac{\langle g^n, d^n \rangle}{\langle d^n, Qd^n \rangle}$$

$$d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n$$

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, Qd^n \rangle}{\langle d^n, Qd^n \rangle}$$

여기서  $Q = K'K + \lambda I$ ,  $b = K'y$ ,  $g^n = Qf^n - b$ 이다. 이 CGM 방법은 식 (1)의 정규 최소화 문제의 해법뿐만 아니라  $b = Qf$ 의 해법도 제공한다. 이 CGM 방법의 수렴여부는  $Q$ 가 양정치행렬(positive definite matrix)이냐에 달려 있다.

앞에서 언급한 바와 같이 경계관련 오류는 합성에 의해 변형된 영상을 관측한 경우에는 영상의 경계부분은 영상의 내부부분과는 다르게 영상복원과정에서 불충분하거나, 불필요한 정보와 함께 얻을 수 밖에 없기 때문에 발생한다. 경계관련 오류에 대한 구체적인 설명을 위해 1차원 신호에 대한 합성분해(Deconvolution)에 대해 살펴 보도록 하자.

길이가  $2M+1$  이고 중앙 점을 중심으로 좌·우 대칭인  $p = (p_{-M}, \dots, p_0, \dots, p_M)$ 와  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ 의 합성

$$v_n = (p * u)_n = \sum_m p_{n-m} u_m$$

은 첨자  $n$ 의 범위에 따라 다음 3가지 형태로 분류할 수 있다

1) V - 합성(Valid Convolution): 제로패딩에 의한 인위적인 경계 없이 계산되어진 것으로, 대부분의 영상복원문제에 해당하는 합성분해모델은 이에 해당한다. 이 경우에 첨자  $n$ 은 다음의 범위를 갖는다.

$$M \leq n \leq N - M - 1$$

2) F - 합성(Full Convolution): 제로패딩에 의한 인위적인 경계를 첨가하여 계산한 것으로 첨자  $n$ 은 다음의 범위를 갖는다.

$$-M \leq n \leq N + M - 1$$

3) S - 합성(Same Convolution): F - 합성에 의해 얻어진 것에서  $u$ 의 같은 크기의 중간부분이다. 이 경우에 첨자  $n$ 은 다음의 범위를 갖는다.

$$0 \leq n \leq N - 1$$

여기서 위의 3 가지 경우 모두 첨자  $m$ 의 범위는

$$\max(n - M, 0) \leq m \leq \min(n + M, N - 1)$$

이다.

앞에서 거론한 3가지 합성을 변환의 관점에서 보면

$$\begin{aligned} P_V: R^N &\rightarrow R^{N-2M}, & P_V(u) &= p * u \quad (V\text{-합성}) \\ P_F: R^N &\rightarrow R^{N+2M}, & P_F(u) &= p * u \quad (F\text{-합성}) \\ P_S: R^N &\rightarrow R^N, & P_S(u) &= p * u \quad (S\text{-합성}) \end{aligned}$$

이 된다. 이 논문에서 이용할 사실은

$$(P_V)' = \bar{P}_F, \quad (P_F)' = \bar{P}_V, \quad (P_S)' = \bar{P}_S$$

이 성립한다는 것이다. 여기서,  $\bar{P}$ 는 주어진 필터  $p$ 를 역순으로 하여 얻은 합성에 해당하는 변환이다. 이러한 사실을 2차원으로 확대 적용해 보면 2차원 필터  $h$ 의 크기가  $(2M+1) \times (2M+1)$  이고 중앙 점을 중심으로 좌·우, 상·하 대칭인 경우에는

$$(K_V)' = K_F, \quad (K_F)' = K_V, \quad (K_S)' = K_S$$

이 성립한다. 여기서,  $K_V, K_F, K_S$ 는 각각  $h$ 의 V-합성, F-합성, S-합성에 의한 변환을 의미한다.

경계문제는 합성에 의해 얻어진 관측신호로부터 원신호를 반복적으로 복원하는 과정에서 흔히 발생한다. 이를 실험적으로 살펴보기 위해 길이가 11인 평균 필터  $p = (\frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{11})$ 와 그림 1의 신호  $u$ 와 V-합성에 의해 신호  $v$ 로 변형한 후에 CGM 반복법을 이용하여 계산하는 시뮬레이션을 시행하였다. 즉, 해결하고자 하는 문제는

$$v = p * u \quad (\text{V-합성})$$

인데, 이것에 대해

$$b = Qu, \quad Q = P_F P_V + \lambda I, \quad b = p * v \quad (\text{F-합성})$$

의 형태로 CGM을 적용하였다.

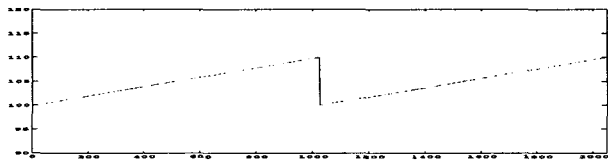


그림 1. 원신호  
Fig. 1. Original Signal

그림 1은 원신호  $u_n, n=0, 1, \dots, 2047$ 이다. 원신호  $u$ 를  $p$ 와 V-합성하여 얻은 신호로부터 정칙계수  $\lambda=0.0$ 를 이용한 CGM의 복원결과를 그림 2는 보여주고 있다. 그림 2에서 알 수 있듯이 CGM에 의한 복원은 신호의 양끝 경계관련 오류가 발생하여 반복횟수가 증가함에 따라 증가하였다가 서서히 감소한다. 또한, 경계관련 오류는 점점 내부로 전파되며, 많은 반복횟수를 이용한 경우에도 경계관련 오류는 쉽게 사라지지 않고 있다.

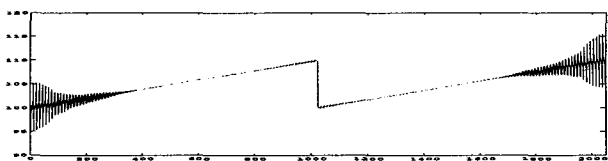


그림 2-a. CGM 결과(정칙계수 = 0.0, 반복횟수 = 100)  
Fig. 2-a. CGM(Regularization = 0.0, Iteration Number = 100)

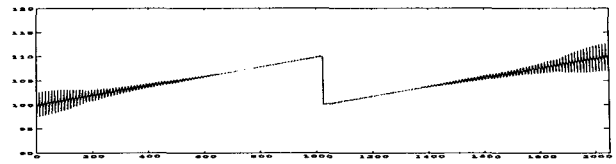


그림 2-b. CGM 결과(정칙계수 = 0.0, 반복횟수 = 200)  
Fig. 2-b. CGM(Regularization = 0.0, Iteration Number = 200)

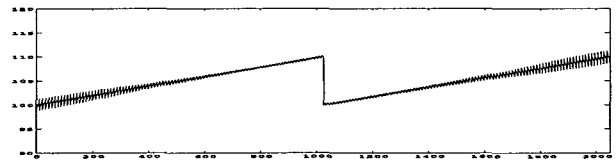


그림 2-c. CGM 결과(정칙계수 = 0.0, 반복횟수 = 400)  
Fig. 2-c. CGM(Regularization = 0.0, Iteration Number = 400)

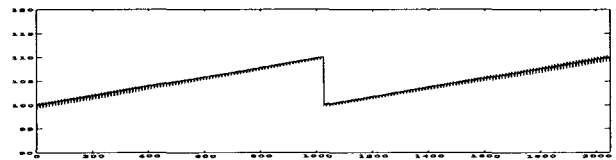


그림 2-d. CGM 결과(정칙계수 = 0.0, 반복횟수 = 800)  
Fig. 2-d. CGM(Regularization = 0.0, Iteration Number = 800)

한편, 비록 그 정도는 양끝 경계부분과 비교해서는 그 정도가 심하지 않아 그림 2를 통해 육안으로 확인하기는 곤란하지만 정중앙 부분의 불연속점 근처에서도 오류가 발생하고 있다. 이렇게 불연속점 근처에서의 오류는 정도의 차이는 있지만 모든 합성분해과정에서 발생하는 것으로 합성분해과정 자체가 부드러운 부분에 비해 불연속점 근처에서 더 어렵다는 일반적인 현상을 나타내고 있다(이는 영상복원의 경우 물체관련 오류에 해당한다). 사실, 양끝 경계부분도 일종의 불연속점에 해당된다. 그러나 내부의 불연속점 근처에 비해 양끝 경계에서의 불연속점 근처는 합성분해과정에 필요한 정보가 불충분하거나 또는 불필요한 정보와 섞여있어 분해하기 힘들기 때문에 보다 큰 오류를 발생시킨다.

그림 3의 결과는  $\lambda=0.01$ 를 그리고 CGM 반복횟수를 800으로 하여 얻은 결과이다. 그림 2-d)의 결과와 비교해 볼 때 내부로 전파되는 경계부분에서의 오류를 상당히 줄였다는 것을 알 수 있다. 일반적으로, 큰 정칙화 계수  $\lambda > 0$ 를 사용하면 경계문제는 상당히 완화시킬 수 있다. 그러나, 이는 경계부분에서 오류를 단지 내부로 전파를 막았다는 것이지 완전히 제거한 것은 아니며, 또한 복원의 정확성을 떨어트리는 효과를 가져오는 단점이 있다. 이는 불연속점 근방을 확대하여 보여주고 있는 그림 5를 통해 확인할 수 있다.

보다 구체적으로 경계문제의 원인을 살펴보기 위해 합성에 의해 변형된 신호  $v_n$ (논의를 편리하게 하기 위해  $n$ 의 범위를  $5 \leq n \leq 2042$ 라하고, 원신호  $u_m$ 에서  $m$ 의 범위는  $0 \leq m \leq 2047$ 라 하자)에서 원신호  $u$ 를 구하는

문제를 고려해보자. 만약, 원신호  $u_n$ 을  $n=0, 1, \dots, 2047$ 에 대해 구하고자 한다면, 양끝 경계부분의  $u_0, u_1, \dots, u_9$ 과  $u_{2038}, u_{2039}, \dots, u_{2047}$ 의 복원은 그들에 관한 정보가  $v_5, v_6, \dots, v_{2042}$ 안에 모두 들어있는 것이 아니므로 오류가 발생하게 된다. 정작 문제는 그 오류가 CGM 반복법이 진행되는 동안 내부로 전파된다는 사실이다. CGM 반복법은 현재의 추정에서 최적의 방향으로 새로운 추정을 행하는 반복법이다. 즉, 새로운 추정으로의 전개는 현재 추정을 국소적으로 이용하는 것이 아니라 전체적인 진행 방향을 결정한다. 이러한 상황에서는 한곳의 오류가 다른 곳으로 전파될 가능성이 높아지게 된다. 또한, 합성자체가 신호를 퍼지게 하는 성질을 가지므로 오류의 전파를 강하게 하고 있다.

경계관련 오류는 구하고자 하는 신호  $u$ 를 경계에서 충분히 떨어트린다고 해결되지는 않는다. 가령, 원신호  $u_n$ 을  $n=10, 11, \dots, 2037$ 에서 구하고자 하는 경우에는 해당  $u_n$ 의 모든 정보는  $v_5, v_6, \dots, v_{2042}$ 안에 모두 들어가게 된다. 그러나, 필요하지 않은 양끝 경계부분의  $u_0, u_1, \dots, u_9$ 과  $u_{2038}, u_{2039}, \dots, u_{2047}$ 의 정보도 섞여 있어 결국 경계근처에서 오류가 발생하게 된다. 구하고자 하는 신호  $u$ 를 더욱 내부로 국한시킨다고 하더라도 비슷한 이유로 경계문제는 발생하게 된다. 또한, 경계부분을 가우스 커널과의 합성들을 통해 부드럽게 하는 등의 선처리 과정도 CGM 반복법에서의 경계문제를 완화시키지는 않는다. 참고로, F-합성에 의해 변형된 신호로부터 원신호를 구하는 경우에는 경계문제가 발생하지 않는다. 그러나, 이러한 경우는 보통의 영상복원의 문제에는 해당되지 않는다.

합성분해에서 Wiener 필터링과 같은 직접법들은 경계관련 오류가 큰 문제가 되지 않는다. 그 이유는 직접법은 단 한 번의 처리과정을 통해 얻어지므로 경계부분의 오류가 내부로 전파되어 가지 않기 때문이다. 참고로 경계부분을 가우스 커널과의 합성들을 통해 부드럽게 하는 등의 선처리 과정은 직접법에서 경계문제를 크게 완화시킨다. 그러나, 이 방법도 CGM에는 별 효과가 없다.

변환  $P_S$ (S-합성에 의한 변환, 영상복원의 경우  $K_S$ )가 대칭이라는 사실을 이용하여 약간의 경계처리를 한 후  $Q = P_S$ (또는  $K_S$ )의 형태로 CGM을 적용한 실험을 해보았다. 이 경우에는  $Q = P_F P_V$ (영상복원의 경우  $K_F K_V$ )의 경우에 비해 계산속도도 빠르고 수치계산의 정확도를 결정하는 조건수(condition number)도 작다는 일등한 장점에도 불구하고  $P_S$ (또는  $K_S$ )가 대부분의 필터에 대해 양정치가 되지 못하기 때문에  $Q = P_S$ (또는  $K_S$ )의 형태로 CGM을 이용하여 영상을 복원하는 것은 사실상 불가능하였다.

한편, LR 방법은 천문관측영상복원, 의료영상재구성

(의료영상분야에서는 이 방법을 흔히, EM(Expectation - Maximization)[7]이라고 명명한다)등에서 널리 사용되는 방법으로 다음과 형태의 반복법이다.

$$\text{초기값: } f_b^0 = 1$$

$$\text{반복과정: } f_b^{n+1} = f_b^n \sum_d \frac{y_d}{\mu_d^n} K_{d,b} / \sum_e K_{e,b}$$

$$\mu_d^n = \sum_b K_{d,b} f_b^n$$

그림 4는 LR 반복계수를 200으로 하여 얻은 결과이다. 그림 4의 결과에서 알 수 있듯이 양끝 경계관련 오류는 전무하다. 그러나, 정중앙 부분의 불연속점 근처에서의 오류는 반복횟수의 증가와 함께 감소하지만 정칙계수  $\lambda=0.0$ 을 사용한 CGM에 의한 결과에 비해 상대적으로 큰 것을 알 수 있다.

그림 5는 정중앙 부분의 불연속점 근방에서의 확대한 결과이다. 이를 통해, 분명히 알 수 있는 것은 정칙계수 = 0.0을 이용한 CGM이 양수의 정칙계수를 사용한 CGM과 LR에 비해 불연속점 근처에서는 더 좋은 결과를 제공함을 알 수 있다. 불연속점 근처에서의 오류는 영상복원의 경우 물체관련 오류에 해당하는 것으로 LR에 비해 정칙계수 = 0.0을 이용한 CGM이 물체관련 오류를 적게 가질 것임을 예상할 수 있다.

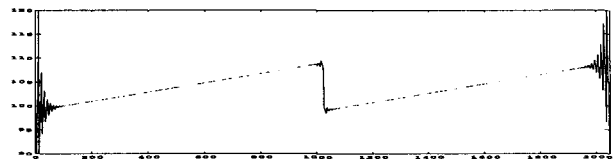


그림 3. CGM 결과(정칙계수 = 0.01, 반복횟수 = 200)  
Fig. 3. CGM(Regularization = 0.01, Iteration Number = 200)

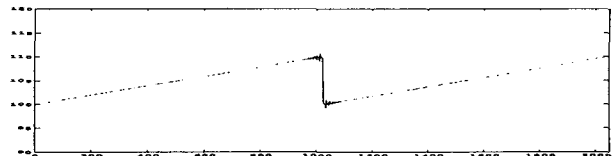


그림 4. LR 결과(반복횟수 = 200)  
Fig. 4. LR(Iteration Number = 200)

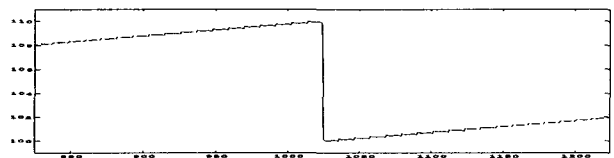


그림 5-a. CGM 불연속점 부근(정칙계수 = 0.0, 반복횟수 = 200)  
Fig. 5-a. CGM near discontinuity(Reg.= 0.0, Iter. Num = 200)

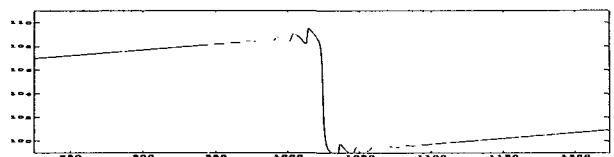


그림 5-b. CGM 불연속점 부근(정칙계수 = 0.01, 반복횟수 = 200)  
Fig. 5-b. CGM near discontinuity(Reg.= 0.01, Iter. Num = 200)

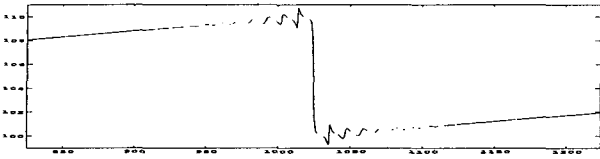


그림 5-c. LR 불연속점 부근(반복횟수 = 200)  
Fig. 5-c. LR near discontinuity(iteration Number = 200)

### III. 웨이블릿 축소법을 이용한 반복적 영상복원

이 장은 이 논문에서 제안하고자 하는 방법에 대한 설명을 담고 있다. 제안하고자 하는 방법은 정칙계수 0.0을 사용한 CGM 반복사이클에 웨이블릿 축소법(Wavelet Shrinkage)을 이용하여 오류제거(De-Ringing)와 잡음제거[8]-[10](De-Noising)을 동시에 얻는다. 본 논문에서는 CGM 반복사이클에 웨이블릿 축소법을 이용한 WSCGM을 제안한다. 여기서 오류는 앞에서 언급한 바와 같이 경계관련 오류와 물체관련 오류를 의미하는데, CGM의 경우 물체관련 오류에 비해서 경계관련 오류의 크기가 훨씬 더 크다. 이를 적절히 제거하기 위해서는 경계부분에서 큰 축소계수를 갖고 영상내부에서는 적은 축소계수를 이용하는 웨이블릿 축소법을 제안하고자 한다.

본 논문의 WSCGM은 웨이블릿 축소법을 합성에 의해 변형된 영상으로부터 잡음제거(관측영상에 변형과 관계없이 내재된 잡음 + CGM 반복과정에서 발생하는 잡음)와 영상복원과정에서 발생하는 경계관련 오류를 제거하는데 사용하였다. 이러한 측면에서 직접적으로 관측된 영상으로부터 잡음제거[8],[9]와 의료영상관측시스템에 의해 변형된 데이터를 직접 복원하는 과정에서의 잡음제거[10]를 위해 웨이블릿 축소법을 이용한 것과 WSCGM과의 차이가 있다.

구체적으로 제안된 영상복원 알고리즘은 다음의 절차를 통해 현재의 복원 영상  $f^n$ 에서 다음의 단계를 거쳐 새로운 복원 영상  $f^{n+1}$ 로 업데이트한다:

$$f^n \rightarrow w^{n+1} \rightarrow \tilde{w}^{n+1} \rightarrow f^{n+1}$$

$$w^{n+1} = W(f^n + a_n d^n), \quad W: 2D \text{ 웨이블릿 변환}$$

$$\tilde{w}_b^{n+1} = S_v(w_b^{n+1}), \quad S_v(x) = \text{sign}(x)(|x| - v)_+$$

$$f^{n+1} = W^{-1} \tilde{w}^{n+1}, \quad W^{-1}: 2D \text{ 웨이블릿 역변환}$$

웨이블릿 변환  $W$ 는 주어진 영상에 대해 효율적인 영상표현방법을 제공한다[11]. 특히, 영상  $f$ 에 대한 웨이블릿 변환  $w = Wf$ 의 특징은 부드러운 부분에 속하는 웨이블릿 계수  $w_b, b \in \Lambda_S$  (smooth part, 원영상  $f$ 에 대한 근사적 정보를 제공)와 미세 부분에 속하는 웨이블릿 계수  $w_b, b \in \Lambda_D$  (detail part, 영상의 평평한 부분에 대응하는  $w_b$ 는 0에 가까운 값을 갖고 강간 경계부분에 대응

하는  $w_b$ 는 상대적으로 큰 절대값을 갖는다)로 구별되는 정보를 제공한다(여기서  $\Lambda_S$ 와  $\Lambda_D$ 는 각각 웨이블릿 변환의 부드러운 부분과 미세 부분에 해당하는 인덱스 집합을 의미한다). 또한, 미세 부분에 속하는 2차원 웨이블릿 계수는 수평, 수직, 대각 방향성을 가진다. 그것에 해당하는 인덱스 집합을  $\Lambda_D^h, \Lambda_D^v, \Lambda_D^d$ 로 표기한다.

CGM 과정에서 발생하는 경계관련 오류는 필터  $h$ 의 크기와 성질에 따라 경계부분의 정해진 위치에서 발생하고 반복횟수 증가함에 따라 오류는 영상내부로 확대되어 간다. 이러한 경계관련 오류를 반복법 과정 내에서 제거하기 위해서는 경계부근에서는 큰 웨이블릿 축소계수를 사용하는 것이 타당할 것이다. 또한 경계관련 오류는 관측영상의 잡음강도와는 상관없이 발생하는 것이 특징이다. 한편, 영상내부에서 발생하는 물체관련 오류는 독립적인 강한 에지근처에서 주로 발생하며 그 강도는 경계관련 오류에 비해 상대적으로 적다. 텍스처 구조를 갖는 부분에서는 에지성분이 비교적 강하더라도 독립적으로 존재하지 않기 때문에 오류의 영향이 크지 않다.

이러한 사실을 고려하여 위치에 따라 다른 웨이블릿 축소량을 이용할 것을 제안한다. 이 논문에서는 CGM 반복법 내에서 사용할 웨이블릿 축소량을

$$v = v(b) = r_b \sqrt{2 \log N^2} \sigma_n \quad (3)$$

$$\sigma_n = \sqrt{2} \text{median}_{b \in \Lambda_D} (|w_b^n|)$$

으로 결정하였다. 여기서,  $r_b$ 는 웨이블릿 계수  $w_b$ 의 위치에 따라 변화하는 스케일 변수이고,  $N^2$ 은 영상의 픽셀 개수이다. 이러한 결정은 Donoho와 Johnstone이 정규분포를 따르는 잡음제거에 사용한 방법[8]과 CGM에 의한 영상복원에서는 경계관련 오류가 물체관련 오류에 비해서 훨씬 더 크다는 실험적 사실에 동기부여를 얻었다. 구체적으로, 미세부분 웨이블릿 계수  $w_b$ 가 공간영역에서의 위치  $n = (n_1, n_2)$ 인 경우에

$$b \in \Lambda_D^h \rightarrow r_b = 1 + C \left[ 0.5 - 0.5 \cos \left( \frac{(2n_1 - N)\pi}{2N} \right) \right]$$

$$b \in \Lambda_D^v \rightarrow r_b = 1 + C \left[ 0.5 - 0.5 \cos \left( \frac{(2n_2 - N)\pi}{2N} \right) \right]$$

$$b \in \Lambda_D^d \rightarrow r_b = 1 + C \left[ 0.5 - 0.5 \cos \left( \frac{(2n_1 - N)\pi}{2N} \right) \right] \times \left[ 0.5 - 0.5 \cos \left( \frac{(2n_2 - N)\pi}{2N} \right) \right]$$

으로 결정하였다. 여기서,  $C$ 는 전체적인 웨이블릿 축소량을 결정하는 상수로 본 연구에서는 실험적으로  $C=5.0$ 으로 하였다. 위에서 거론한 스케일 변수  $r_b$ 는 영상의 중앙부분에 비해 경계부분에 더 큰 웨이블릿 축

소량을 사용하게 한다.

그림 6은 2장에서 시행한 1-D 신호에 대한 실험을 제안된 방법으로 재연한 결과이다. 그림 6-a와 그림 2, 그림 3과 비교해 보면, 경계관련 오류는 WSCGM에서는 제거된 것으로 보인다. 또한 그림 6-b와 그림 5-a, 5-b, 5-c를 비교해 보면, WSCGM은 정칙계수를 0.0으로한 CGM과 유사한 복원력을 불연속점 근방에서도 보임을 알 수 있다. 이르 종합하면, WSCGM은 경계부근에서는 LR 방법과 같이 경계관련 오류가 발생하지 않으며 불연속점 근방에서의 물체관련 오류도 전무한 것을 알 수 있다.

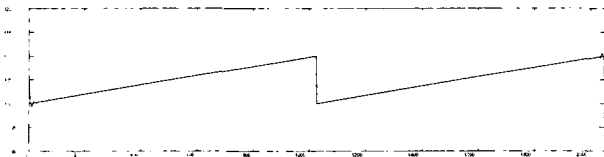


그림 6-a. WSCGM 결과(반복횟수 = 200)  
Fig. 6-a. WSCGM(Iteration Number = 200)

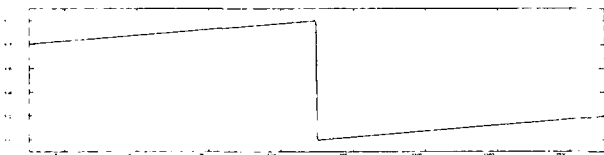


그림 6-b. WSCGM 불연속점 부근(반복횟수 = 200)  
Fig. 6-b. WSCGM near discontinuity(Iteration Number = 200)

이 장을 마치기 전에 경계관련 오류를 완화시키는 방법의 일환으로 경계처리를 통한 방법에 대해 거론하고자 한다. 가장 많이 사용되는 방법으로 관측영상의 경계부분을 인위적으로 부드럽게 하거나 경계부분의 일정 부분을 경계면을 기준으로 대칭적으로 반복(이를 mirroring이라 하자)하는 것을 들 수 있다. 그러나, 이는 관측영상에 대한 수학적 모델이

$$y = Kf \rightarrow \tilde{y} = BKf$$

으로 변화시킨 것으로 이에 해당하는 CGM의 결과는 그림 7-f에서 볼 수 있듯이 경계관련 오류가 여전히 심각한 상태이다. 여기서  $B$ 는 해당경계처리를 의미한다. 또한, CGM의 중간영상들(inter-images)의 경계부분에서 밝은 부분과 어두운 부분이 반복되는 현상을 고려하여 이용하여 중간영상들에 대해 경계부분의 일부를 접기-평균화-퍼기과정(이를 fold-average-mirroring이라 하자. 이는 구체적으로 크기가  $(2M+1) \times (2M+1)$ 인 좌, 우, 상, 하 대칭인 필터에 의해서 흐려진 영상을 복원하는 경우에, CGM의 중간영상에 대해 경계부분을 폭  $M$ 만큼 접는다. 이 때, 접힌 부분에 의해 덮혀진 부분의 픽셀과 접힌 부분의 픽셀의 평균으로 두 픽셀의 값을 바꾼 후에 다시 접힌 부분을 펴는 것이다)을 통해 경계관련 오류를 제거하는 방법이 있다. 그러나, 그 경우에는 그림 7-g에서 확인할 수 있듯이 복원력이 현저히 떨어지는 단점이 발생하였다.

#### IV. 실험결과 및 고찰

제안된 영상복원 방법 WSCGM의 우수성을 실험적으로 증명하기 위해  $512 \times 512$  크기의 Lenna 영상에 대해 CGM, Wiener 필터링과의 비교실험을 하였다. 실험을 위해 평균 필터  $h$ 를 실험대상 영상에 V-합성을 적용하여 영상을 변형시켜 흐트러진 관측영상을 생성하였다. 평균 필터는 초점을 맞추지 못한 상태에서 찍은 사진영상과 같이 영상을 흐리게 하는 효과가 있다. 그러한 이유로 평균 필터는 초점이탈(Out-of-Focus) 필터라고 불리기도 한다. 다음은

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

는 크기가  $3 \times 3$ 인 평균 필터이다. 실험에는 그 크기가  $11 \times 11$ 인 평균 필터를 사용하였다. 비교대상으로는 정칙계수를 0.0으로한 CGM과 LR을 선택하였고, 제안된 방법 WSCGM에서 사용한 웨이블릿은 조각 5차 다항식 모양의 이중 직교 웨이블릿이고 그 분해의 깊이는 3으로 하였다[11].

그림 7-a는 Lenna 영상을, 그림 7-b는  $11 \times 11$ 인 초점이탈 필터에 의해 흐려진 영상, 그리고, 그림 7-c, 7-d, 7-e, 7-f, 7-g는 각각 CGM, LR, WSCGM, CGM + mirroring, CGM + fold-average-mirroring에 의한 결과를 보여주고 있다. 이 실험에서 사용된 반복횟수는 방법에 상관없이 40으로 하였다. CGM에 의한 영상복원결과(그림 7-c)는 LR의 결과(그림 7-d)에 비해 더 또렷한 영상복원을 제공하는 장점에도 불구하고 경계관련 오류와 모자근처에서 물결모양으로 나타나는 물체오류를 고려할 때 LR보다 더 우수한 결과를 제공한다고 할 수 없다. 반면에, WSCGM에 의한 복원영상(그림 7-e)은 경계관련 오류와 물체관련 오류가 거의 제거된 상태로 CGM과 비교될 만큼 또렷한 영상복원을 제공하는 것을 알 수 있다. 그림 7-f와 그림 7-g는 CGM에 경계처리를 함께 이용한 것으로 3장에서 거론하였듯이 좋은 결과를 얻을 수 없었다.

그림 7의 실험에서는 관측과정에서의 잡음은 고려하지 않고 오직 변형에 대한 각 알고리즘의 복원효과만을 비교하였다. 시각적인 측면에서 WSCGM은 LR의 물체관련 오류와 CGM의 경계관련 오류를 효과적으로 제거하였다. 이것이 가능했던 이유는 위치에 따라 다르게 설정한 웨이블릿 축소량에 있는 것으로 추측된다. 즉, 경계근처에서 크게 설정된 웨이블릿 축소량은 경계관련 오류가 영상내부로 진행되는 것을 차단하였고 영상내부에서의 웨이블릿 계수의 크기에 비례하여 상대적으로 적게 설정된 웨이블릿 계수는 영상내부에서 적응적인 잡음제거를 가능하게 하였다.

표 1은 본 논문에서 제안한 방법 WSCGM과 LR의 RMS 결과이다. 여기서, RMS는

$$RMS = \frac{\sum_b |f_b - \hat{f}_b|^2}{\sum_b |f_b|^2}$$

로 정의되었다. 여기서,  $f$ 와  $\hat{f}$ 는 각각 원영상과 복원영상을 의미한다. 그림 7의 결과에서 경계관련 오류가 적고 어느 정도의 복원력을 가지는 WSCGM과 LR을 비교대상으로 선택하였다. 이 두 방법에 대해 잡음에 대한 복원효과를 살펴보기 위해 크기가  $11 \times 11$ 인 평균필터에 흐트러진 영상에 정규잡음 또는 포아송잡음에 의해 오염된 영상을 생성한 후에 영상복원을 시도하였다.

표 1의 결과는 잡음이 정규분포 또는 포아송분포에 상관없이 WSCGM이 LR보다 우수한 결과를 제공함을 보여주고 있다. LR의 반복횟수를 영상에 따라 약간의 차이가 있기는 하지만 표 1에서 다룬 잡음모델에 대해서는 반복횟수 10회 근처에서 가장 적은 RMS를 얻었다. 이러한 이유에서 LR의 반복횟수는 10으로 하였다. 한편, LR의 반복루프의 계산량은 WSCGM의 그것에 비해 약 1/2 정도밖에 안되므로 비교의 공정성을 위해 WSCGM의 반복횟수는 5로 하였다. 실제로, WSCGM 실험에서 대부분의 영상에 대해 가장 작은 RMS는 반복횟수를 4로 한 경우에 얻어졌고, 반복횟수를 5로 하였을 때와의 결과차이는 극히 미미했다. 변형 외에도 잡음에 오염된 영상을 복원하는 경우에는 반복횟수를 너무 크게 하면 반복과정에서 발생하는 계산과 관련된 오차가 영상복원의 어렵게 한다. 그러므로, 효과적 중단규칙(Stopping Rule)이 필요한데, 본 논문에서는 생략하였다.



그림 7-a. 원영상  
Fig. 7-a. Original Image



그림 7-b. 흐트러진 영상  
Fig. 7-b. Blurred Image



그림 7-c. CGM  
Fig. 7-c. CGM



그림 7-d. LR  
Fig. 7-d. LR





그림 7-e. WSCGM  
Fig. 7-e. WSCGM



그림 7-f. CGM + mirroring  
Fig. 7-f. CGM + mirroring



그림 7-g. CGM + fold-average-mirroring  
Fig. 7-g. CGM + fold-average-mirroring

표 1-a. LR의 RMS 결과(반복횟수 = 10)  
Table 1-a. RMS by LR(Iteration Number = 10)

잡음	정규잡음 $\sigma = 10.0$	포아송분포
Bridge	2.5512	2.5662
Boat	1.2653	1.2926
Woman	0.9507	0.9935
Lenna	1.0311	1.0558
Peppers	0.8128	0.8346
Lax	5.6316	5.5889

표 1-b. WSCGM의 RMS 결과(반복횟수 = 5)  
Table 1-b. RMS by WSCGM(Iteration Number = 5)

잡음	정규잡음 $\sigma = 10.0$	포아송분포
Bridge	2.4507	2.4823
Boat	1.1751	1.2198
Woman	0.8992	0.9645
Lenna	1.0003	1.0354
Peppers	0.7598	0.7973
Lax	5.6070	5.5557

표 1의 객관적 결과와 그림 7의 주관적 결과를 종합해 보면 이 논문에서 제안된 WSCGM이 기존의 영상복원(CGM, LR)에 비해 더 우수한 결과를 제공함을 확인할 수 있었다. 즉, WSCGM은 경계 및 물체관련 오류가 거의 없으면서도 LR에 비해 우수한 복원력과 잡음제거를 제공하는 영상복원방법임을 알 수 있었다.

## V. 결 론

본 논문에서는 웨이블릿 축소법을 이용하여 CGM 반복과정에서 발생하는 잡음과 오류(Ringing)를 효과적으로 제거하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 복원영상에 대한 실험결과를 통해 LR과 CGM에 비해 잡음제거와 경계복원에 효과적임을 확인하였다.

제안된 방법에서 잡음강도 계수  $\sigma_n$ 은  $w_n^2$ 이 정규분포를 따른다고 가정하고 추정된 것이다. 반복법의 중간결과들이 변환행렬에 따라 통계적으로 어떤 분포를 따르는지는 잘 알려져 있지 않다. 그러나, 중간결과에 대한 실험적 분석에 의하면 정규분포를 따른다고 보기에는 너무 광범위한 편차를 가지고 분포되어 있고 각 픽셀간의 상관관계가 상당히 큼을 알 수 있었다. 반복법의 중간단계에 대한 심도 있는 연구를 통해 보다 향상된 반복적 영상복원 방법에 대한 연구가 이루어지기를 제안한다. 또한, 반복법인 관계로 언제 반복을 중단해야 하는가 하는 문제가 있다. 본 논문에서의 실험들은 그 반복횟수가 비교적 작은 경우(10회 미만)에 대해서만 시행되었다. 그러한 경우에는 중단규칙이 별 의미가 없으나, 최적의 반복횟수가 큰 경우에는 효과적인 중단규칙이 필요하다. 이러한 부분에 대한 연구가 이루어지기를 제안한다.

참 고 문 헌

- [1] A. Rosenfeld and A. Kak, "Digital Picture Processing 1", Academic Press, 1982.
- [2] J.W. Woods, J. Biemond, and A.M. Tekalp, "Boundary value problem in image restoration", pp. 18.11.1-18.11.4, *ICASSP*, March, 1985.
- [3] M.K. Ng, R.H. Chan, and W.C. Tang, "A fast algorithm for deblurring models Neuman boundary conditions", *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol. 21(3), pp. 851-866, 1999.
- [4] L.B. Lucy, "An iterative techniques for the rectification of obserevd distribution", *Astron. J.*, Vol. 79, pp. 745-754, 1974.
- [5] W.H. Richardson, "Bayesian-based iterative method of image restoration", *J. Opt. Soc. Amer.*, Vol. 62, pp. 55-59, 1972.
- [6] D. Luenberger, "Linear and nonlinear programming", Addison Wesley, 1984.
- [7] L.A. Shepp and Y. vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography", *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol. 1, pp. 113-122, 1982.
- [8] D. Donoho and I. Johnstone: 'Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage', *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 2, pp. 101-126, 1995.
- [9] A. Chambolle, R. DeVore, N.-Y. Lee, and B. Lucier, "Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal through Wavelet Shrinkage", *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 7(3), pp. 319-335, 1998.
- [10] N.-Y. Lee and B. Lucier, "Wavelet Methods for Inverting the Radon Transform with Noisy Data", *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 10(1), pp. 79-94, 2001.
- [11] I. Daubechies: 'Ten Lectures on Wavelets', *SIAM*, Philadelphia, 1992.



이 남 용(Nam-Yong Lee)  
1990년 2월: 서울대 수학과 졸업  
1997년 12월: Purdue University(Ph.D.)  
2002년 9월-현재: 인제대학교컴퓨터  
응용과학부 전임강사

---