

◎ 논문

복사유체의 복사열전달 수치 적분에 관한 연구

한 조 영*

Investigation on Numerical Integration
for Radiation Heat Transfer in Radiating Fluid

Cho Young Han

Interaction between fluid flow and thermal radiation has received considerable attention due to its numerous applications in engineering field. In this case the thermofluid properties of radiating fluid vary with the variation of temperature field caused by absorption and emission of radiant heat. To analyze the radiation heat transfer in radiating fluid, the simultaneous solution of the radiative transfer equation (RTE) and the fluid dynamics equations is required. This means that the numerical procedure used for the RTE must be computationally efficient to permit its inclusion in the other submodels, and must be compatible with the other transport equations. The finite volume method (FVM) and the discrete ordinates method (DOM) are usually employed to simulate radiation problems in generalized coordinates. These two representative methods are examined and compared, especially in view of the numerical integration of the radiation intensity over solid angle. The FVM shows better accuracy than the DOM owing to less constraints of the selection of control angle.

Key Words: 복사유체(Radiating Fluid), 복사전달방정식(Radiative Transfer Equation), 유한체적복사해법(Finite Volume Method), 구분종좌법(Discrete Ordinates Method), 수치적분(Numerical Integration)

1. 서론

유체 유동과 열복사와의 연계 문제는 다양한 공학적 시스템에서의 열 및 물질전달 현상을 규명하기 위한 매우 중요한 주제이다. 이에 대한 다양한 공학적 응용분야로는 보일러 및 노(furnace) 내의 고온 내부유동, 태양열 장치, 원자로 내 유동, 로켓 엔진 내부유동 및 플룸(plume), 우주발사체 및 지구 재진

입체(reentry vehicle) 주위의 유동, 그리고 인공위성 추진시스템 추력기로부터 발생하는 플룸과 그로 인한 위성체 표면의 오염 현상 등을 들 수 있다. 그러므로 이 같은 다양한 공학적 시스템에서 작동하는 복사유체의 거동을 정확히 예측해 시스템을 효율적으로 설계하기 위해서는 지배적인 열전달 모드 중의 하나인 복사열전달의 정확한 예측이 필수적이다. 대부분의 시스템을 수치적으로 모델링시 복사열전달에 영향 받는 온도장, 압력장 및 화학종의 변화는 미지(unknown)이므로 복사전달방정식(radiative transfer equation, RTE)과 유체역학 방정식들을 동시에 연계해 해를 구해야만 한다. 이 말의 의미는 복사전달 모델이 타 수치 모델에의 적절한 삽입이 가능하도록 수치 계산적으로 효과적(effective)이어야 하며, 복사전달방정식의 수치해법도 다른 이동방정식(transport

* 2004년 3월 2일 접수

* 정회원, 한국항공우주연구원 다목적위성사업단
위성기술실 위성기초기술그룹

*E-mail : cyhan@kari.re.kr

equation)의 수치해법과 적합해야 한다는 것이다. 그러나 불행히도 복사전달방정식은 적분-미분방정식(integro-differential equation)인 본질적 특성을 지니고 있어, 대부분의 복사모델은 단순한 기하학적 형태에만 적용이 가능하며 일반좌표계의 사용이 요구되는 복잡한 형상에는 적용이 용이하지 않다.

최근 수 십년동안 복사전달방정식의 여러가지 이론 및 수치해석적 근사해법들이 제시되어 왔다. 근래에 관심이 가중되고 있는 방법의 하나가 일종의 다유속법인 구분중좌법(discrete ordinates method, DOM[1])으로 Han and Baek[2]이 수직연료 벽면의 복사에 의한 점화현상을 해석하기 위해 이 방법을 사용했다. 구분중좌법은 복사 방향을 유한한 개수의 중좌(ordinate)로 나눈 후 각 방향에 대해 복사 강도를 계산한다. 그리고 구적법(quadrature)에 의해 결정된 가중치(angular weight)를 도입하고 복사강도를 4π 의 입체각(solid angle)에 대해 수치적으로 적분하여 필요로 하는 복사전열량을 계산하는 방법이다. 이 방법은 개념이 비교적 단순하며 수치 계산적으로도 효율성이 높기에 많이 사용되어 왔으나 기하학적으로 복잡한 형상으로 인해 일반좌표계를 도입해야 하는 경우 유도식의 복잡성으로 인해 구분중좌법의 사용에는 극히 드물었다. 그러나 일반좌표계를 도입하는 경우에도 구분중좌법의 장점은 유지될 것으로 예측되며 Liu et al.[3]이 일반좌표계에서의 구분중좌법에 관한 식을 유도하고 그 적용성을 연구한 바 있다.

한편 다른 형태의 복사해법으로 Chui and Raithby[4] 및 Chai et al.[5]이 유한체적복사해법(finite volume method, FVM)을 제시하고 직교좌표계 및 비직교좌표계의 순수복사문제에 적용하여 해의 정확도를 검증했으며, Han and Baek[6]은 이 방법을 사용하여 두 수평원판 사이 환상유로(annulus channel)에서의 대류열전달 문제를 해석하여 유동해석과의 연계성을 검증한 바 있다. 이 유한체적복사해법은 구분중좌법과 많은 유사성을 지니고 있지만 구분중좌법과는 달리 복사방향을 유한한 개수의 제어각도(control angle)로 나누고, 가중치 대신 제어각도에 대해 복사전달방정식을 직접 수치적분하여 복사전열량을 구한다. 구분중좌법에 비해 유한체적복사해법은 식을 유도하고 사용하기에 다소 복잡한 점이 없지는 않으나, 제어각도를 선택함에 있어 제약이 없고 복사에 너지의 보존을 보증할 수 있다는 이점이 있다. 물론 비직교좌표계에도 큰 어려움 없이 적용 가능하다.

앞서 언급한 Liu et al.[3]의 연구에서 그들은 일

반좌표계를 사용하여 복잡한 형상에서의 순수 복사 열전달 문제를 해석했다. 그리고 구분중좌법과 유한체적복사해법을 사용해서 복사전열량을 구한 뒤 기준해(benchmark solution)와 비교해 검증함으로써 두 기법의 장단점을 검토했으며, 유한체적복사해법이 구분중좌법보다는 정밀도가 더 높다는 결론을 내렸다. 그러나 여기에서 유의해야 할 점은 유한체적복사해법을 적용시 균일 제어각도를 채택했다는 점이다. 구분중좌법은 그 방법의 특성상 구적법에 의해 유한한 중좌 방향이 결정되는 반면 유한체적복사해법은 제어각도를 선택함에 있어 제약이 없다. 일반적으로는 유한체적복사해법을 이용할 때 수치 해석상의 편의를 위해 균일 제어각도(uniform control angle)를 사용하고 있다. Liu et al.[3]도 역시 균일 제어각도를 사용했으며 이 전체 하에 구분중좌법에 대한 유한체적복사해법의 우월성을 주장하고 있다.

본 연구에서는 유한체적복사해법에서 균일 제어각도 선택의 적절성에 대한 고찰을 하고자 한다. 이론적으로는 비균일 제어각도를 선택하는 것도 가능하지만 대부분의 경우 해석상의 편의로 인해 균일 제어각도를 사용하고 있다. 그러나 특수한 경우의 해석에서는, 즉 예를 들어 태양광과 같은 평행광(collimated beam)에 의한 복사열전달 해석을 하는 경우는 평행광 방향의 제어각도를 가능한 한 작게 하고 나머지 제어각도를 크게 분할함으로써 계산의 효율화를 기할 수 있다. 그러므로 등분할된 방향이 아닌 중좌를 사용하는 구분중좌법의 경우에 비해서, 유한체적복사해법도 구분중좌법의 중좌 방향과 유사한 비균일 제어각도를 선택시 같은 정도의 정밀도를 가지는지를 검토하는 것은 매우 가치 있는 연구가 될 것이다. 따라서 본 논문에서는 우선 일반좌표계에서의 유한체적복사해법과 구분중좌법을 유도하여 복사 강도의 수치적분 차이점을 조명하고, 중좌의 개수 및 제어각도의 균일도에 대한 매개 변수 해석을 수행하여 향후 연구 수행시 두 방법 중 어느 기법을 사용하는 것이 더 적절한지에 대해 고찰하고자 한다.

2. 해 석

2.1 복사전달방정식

Fig. 1에 도시된 좌표계를 참조해 흡수, 방사 및 비등방 산란을 하는 회체 매질(gray medium)에서 임의의 복사 방향 단위 벡터 \hat{s} 에 대한 복사전달방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dI(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = -\beta(\vec{r}) I(\vec{r}, \hat{s}) + S(\vec{r}, \hat{s}) \quad (1)$$

$$\frac{dI^l}{ds} = -\beta_m^l I^l + S_m^l \quad (4)$$

$$\beta(\vec{r}) = \kappa(\vec{r}) + \sigma(\vec{r}) \quad (2)$$

$$\beta_m^l = \kappa + \sigma - \frac{\sigma}{4\pi} \bar{\Phi}^u w^l \quad (5)$$

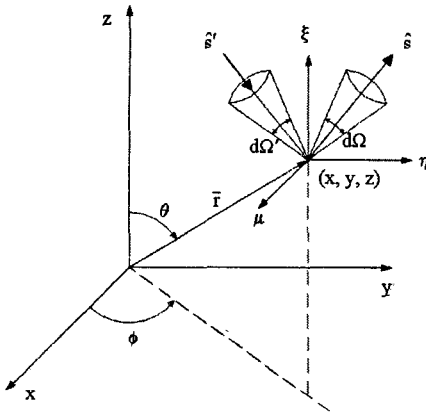
$$S(\vec{r}, \hat{s}) = \kappa(\vec{r}) I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\hat{s}', \hat{s}) I(\vec{r}, \hat{s}') d\Omega' \quad (3)$$

$$S_m^l = \kappa I_b + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{t=1, t \neq l}^L \bar{\Phi}^u I^t w^t \quad (6)$$

$$\bar{\Phi}^u = \frac{\Phi^u}{\frac{1}{4\pi} \sum_{t=1}^L \Phi^{tt} w^t} \quad (7)$$

(2)식에서 β 는 소멸계수(extinction coefficient)로 흡수계수 κ 와 산란계수 σ 의 합으로 나타나며 흡수(absorption)와 외향산란(out-scattering)에 의한 복사강도(intensity) I 의 변화를 나타낸다. (3)식의 S 는 생성항으로 방사(emission)와 내향산란(in-scattering)에 의한 복사강도 변화를 의미하며 I_b 는 흑체 복사강도(blackbody intensity)이다.

복사전열량 계산을 위해 필요한 입사(incident radiation) G , 복사열유속 q^R 및 복사열유속의 발산 $\nabla \cdot q^R$ 을 구하는 방법은 다음과 같다.



$$G(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega \quad (8)$$

$$q_i^R(\vec{r}) = \int I(\vec{r}, \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{n}_i) d\Omega \quad (9)$$

$$\nabla \cdot q^R = \kappa [4\pi I_b(\vec{r}) - G(\vec{r})] \quad (10)$$

복사에 대해 확산적으로 방사 및 반사하는 각 등온벽면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$I(\vec{r}_w, \hat{s}) = \epsilon_w I_b(\vec{r}_w) + \frac{1 - \epsilon_w}{\pi} \int_{\hat{s} \cdot \hat{n}_w < 0} I(\vec{r}_w, \hat{s}') |\hat{s}' \cdot \hat{n}_w| d\Omega' \quad (11)$$

ϵ 은 방사율(emissivity)이며 \hat{n} 은 단위수직벡터이다. 한편 계산의 편의를 위해 취하는 대칭면에서의 대칭조건은 다음과 같다.

$$I(\vec{r}_{sym}, \hat{s}) = I(\vec{r}_{sym}, \hat{s}') \text{ where } |\hat{s} \cdot \hat{n}_{sym}| = |\hat{s}' \cdot \hat{n}_{sym}| \quad (12)$$

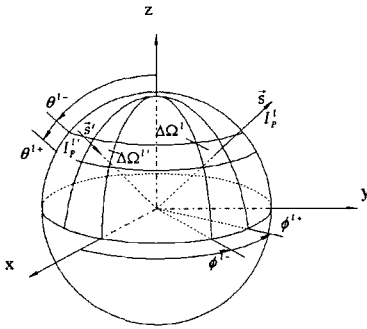
Fig. 1 Coordinate system for radiative transfer equation

또한 (3)식에서 Φ 는 산란위상함수(scattering phase function)이며, 상첨자 '는 유입되는 복사량(incoming radiation)을 의미한다. Ω 는 입체각(solid angle)이다.

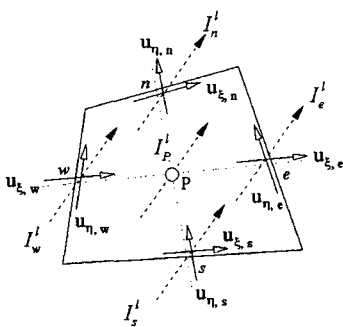
(1)식은 산란항의 계산 효율성을 위해 임의의 복사방향 l 에 대해 (4)식과 같이 선형화된다. β_m^l 과 S_m^l 은 각각 수정된 소멸계수와 생성항을 의미하며 $\bar{\Phi}^u$ 은 정규화된 산란함수이다. (6)과 (7)식에서의 w 는 적분항을 산술합산항으로 바꾸기 위해 도입된 적절한 가중함수를 나타낸다.

2.2 유한체적복사해법

이산화 방정식을 유도하기 위해 제어체적 ΔV 와 Fig. 2 (a)에 도시된 유한한 제어각도 $\Delta\Omega^i$ 내에서 복사강도가 일정하다고 가정한 후, (4)식에 유한체적복사해법[5]을 적용한다. 단 제어각도 내에서 복사강도 방향은 변한다는 가정을 두어 복사강도의 해석적인 적분을 수행한다. 참고로 후술할 구분중좌법에서는 복사강도의 방향과 크기가 미리 규정되어 제어각도 내에서 변하지 않는다.



(a) angular discretization used in study



(b) control volume and radiation direction

Fig. 2 Representation of control angle and spatial control volume

우선 (4)식을 (13)식과 같이 적분한 후 (14)식과 같이 좌측항의 체적적분을 면적분으로 변환시키면 (15) 식을 얻을 수 있고 최종적으로 (16)식이 도출된다.

$$\iint \frac{dI^i}{ds} dV d\Omega^i = \iint (-\beta I^i + S^i) dV d\Omega^i \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \iint I^i (\hat{s}^i \cdot \hat{n}) dA d\Omega^i \\ & = \iint (-\beta I^i + S^i) dV d\Omega^i \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 I_i^i \Delta A_i \frac{1}{\Delta\Omega^i} \int_{\Delta\Omega^i} (\hat{s}^i \cdot \hat{n}_i) d\Omega^i \\ & = (-\beta_m^i I^i + S_m^i) \Delta V \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^4 I_i^i \Delta A_i \bar{D}_{ci}^i = (-\beta_m^i I^i + S_m^i) \Delta V \quad (16)$$

위에서 ΔA 는 제어체적의 표면적이며 하첨자 i 는 제어표면의 위치(e, w, n, s)를 의미하고 (16)식의 각 항들은 다음과 같이 정의된다.

$$\beta_m^i = \beta - \frac{\sigma}{4\pi} \bar{\Phi}^u \Delta\Omega^i \quad (17)$$

$$S_m^i = \kappa I_b + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{l=1, l \neq i}^L I^l \bar{\Phi}^u \Delta\Omega^l \quad (18)$$

$$\bar{D}_{ci}^i = \frac{1}{\Delta\Omega^i} \int_{\Delta\Omega^i} (\hat{s}^i \cdot \hat{n}_i) d\Omega^i \quad (19)$$

(16)식의 좌변항은 제어체적의 경계면을 통한 복사에너지의 순유출량을 나타내고 우변항은 제어체적과 제어각도내에서 흡수, 방사 및 산란에 의한 복사에너지의 증가량을 나타낸다. 이 식에서 (19)식으로 정의된 방향가중치(directional weight)는 그 부호에 따라 제어면을 통한 복사에너지의 유출입을 나타내기 때문에 주의 깊은 계산이 요구된다. 이 방향가중치는 공간 및 각도 격자계가 정해지면 해석적인 방법으로 구할 수 있다.

격자점의 복사강도로부터 제어면에 있는 복사강도를 표현하기 위해서는 보간법이 필요하다. 본 연구에서는 Fig. 2 (b)에 도시되어 있는 격자점의 복사강도와 경계면의 복사강도를 연계시키기 위해 계단차분법(step scheme)[5]을 사용했다. 이 방법은 가장 간단하면서도 물리적으로 타당한 양의 복사강도(positive intensity)를 가지도록 할 수 있는 차분법으로서 방향가중치의 부호에 따라 (20)식과 같이 하류면에서의 복사강도는 상류 격자점의 값을 유지하도록 하는 것이다.

$$I_i^l \bar{D}_{ci}^l = I_p^l \max(\bar{D}_{ci}^l, 0) - I_i^l \max(-\bar{D}_{ci}^l, 0) \tag{20}$$

최종적으로 차분화된 식은 다음과 같다. 이 중 하첨자 I 는 제어체적의 중심값(E, W, N, S)를 나타내며, 하첨자 i 는 제어표면에서의 값(e, w, n, s)을 나타낸다.

$$a_p^l I_p^l = \sum_I a_i^l I_i^l + b^l \tag{21}$$

$$a_i^l = \max(-\Delta A_i \bar{D}_{ci}^l, 0) \tag{22}$$

$$a_p^l = \sum_i \max(\Delta A_i \bar{D}_{ci}^l, 0) + (\beta_m^l)_p \Delta V \tag{23}$$

$$b^l = (S_m^l)_p \Delta V \tag{24}$$

방향가중치를 사용해 나타낸 등은 확산 벽면에서의 경계 조건과 대칭면에서의 경계 조건은 (25) 및 (26)식과 같으며 입사량과 복사열유속은 (27)과 (28) 식으로 표현된다.

$$I_w^l = \epsilon_w I_{bw} + \frac{1 - \epsilon_w}{\pi} \sum_{\bar{D}_{cw}^l} I_w^l |\bar{D}_{cw}^l| d\Omega^l \tag{25}$$

$$I_w^l = I_w^l \text{ where } |\bar{D}_{cw}^l| = |\bar{D}_{cw}^l| \tag{26}$$

$$G(\vec{r}) = \sum_{l=1}^L I^l \Delta \Omega^l \tag{27}$$

$$q_i^R = \sum_{l=1}^L I^l \bar{D}_{ci}^l \Delta \Omega^l \tag{28}$$

일반적인 형상의 계산영역의 경우 제어각도의 경계면이 벽면에 일치하도록 하기가 어려울 뿐만 아니라 때로는 불가능하기도 하다. 만약 벽면이 제어각도의 중간에 놓여있는 경우 벽면에서의 복사강도를 묘사하기 위해 복사강도 간의 특별한 내삽(interpolation)이 필요하다. 그러나 이러한 방법은

해의 정밀도 증가를 일반적으로 보장해 주는 것은 아니며 계산시간을 상당히 증가시키는 단점이 존재한다. 이러한 문제의 해결책으로써 본 연구에서는 Chai et al.[5]이 제안한 방법을 채택하여 내부 제어각도와 같은 방법으로 복사강도의 벽면처리를 한다. 즉 방향가중치의 부호에 따라 벽면으로 들어오는 복사강도와 벽면을 떠나는 복사강도를 구분하여 복사강도의 벽면처리를 한다.

2.3 구분종좌법

구분종좌법은 Fig. 3에 도시된 것처럼 (29)식과 같이 입체각 4π를 적절한 구간으로 나누고 각 구간에서 복사강도가 일정한 가중치를 갖도록 가정하여 복사전달방정식을 일련의 상미분 방정식으로 근사하는 방법이다. 복사전달방정식의 적분항은 각 종좌에서의 가중합산으로 대체된다.

$$\int_{4\pi} I d\Omega = \sum_{l=1}^L I^l W^l \tag{29}$$

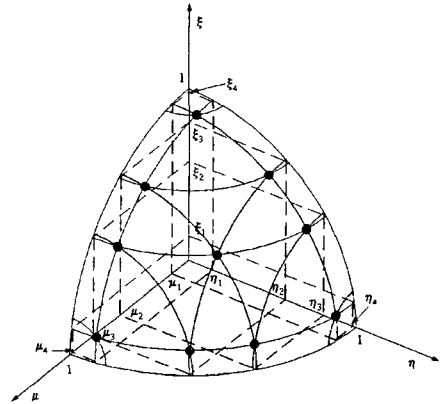


Fig. 3 Directions on an octant for S₈ quadrature set

임의의 종좌 방향은 다음의 식으로 표현된다.

$$\hat{s}^l = \sin\theta \cos\phi \hat{e}_x + \sin\theta \sin\phi \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z = \mu_x^l \hat{e}_x + \mu_y^l \hat{e}_y + \mu_z^l \hat{e}_z \tag{30}$$

여기에서 μ^l 는 l 종좌의 x, y, z 방향코사인(directional cosine)이며, Fig. 3과 비교해보면 μ_x^l = μ^l, μ_y^l = η^l 및 μ_z^l = ξ^l 이다. 이에 의거해 (4)식은 아래의 형태로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\mu_x^i \frac{\partial I^i}{\partial x} + \mu_y^i \frac{\partial I^i}{\partial y} = -\beta_m^i I^i + S_m^i \quad (31)$$

이 식을 일반좌표계 (ξ, η) 에 대해 완전보존형 (fully conservative form)으로 바꾸어 쓰기 위해 Giridharan et al.[7]의 변환식을 이용하면 좌변항은 다음의 형태가 된다.

$$(\hat{s} \cdot \nabla) I = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} [J(\hat{s} \cdot \xi_k) I] \quad (32)$$

위 식을 이용해 (31)식을 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [I^i J(\mu_x^i \xi_x + \mu_y^i \xi_y)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [I^i J(\mu_x^i \eta_x + \mu_y^i \eta_y)] \\ = J[-\beta_m^i I^i + S_m^i] \end{aligned} \quad (33)$$

여기에서 J 는 자코비안으로 다음과 같이 정의된다.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} \quad (34)$$

(33)식을 제어체적에 대해 이산화하면 (35)식과 같이 구성된다.

$$\sum_{i=1}^4 I_i^i \Delta A_i D_{ci}^i = J_p [-\beta_m^i I^i + S_m^i]_p \quad (35)$$

$$\begin{aligned} D_{ci}^i = \hat{n}_i \cdot \hat{s}^i = [\mu_x^i \xi_x + \mu_y^i \xi_y]_{e,w} \\ = [\mu_x^i \eta_x + \mu_y^i \eta_y]_{n,s} \end{aligned} \quad (36)$$

(16)식과 (35)식을 비교하면 J_p 는 좌표변환에서 도출된 값으로 ΔV 와 같으며, 단지 유한체적법의 방향 가중치 \bar{D}_{ci}^i 이 구분중좌법에서는 D_{ci}^i 로 대치되어 있음을 알 수 있다. 이 말의 의미는 유한체적복사해법 이든 구분중좌법이든 같은 프로그램 내에 단지 방향 가중치 항을 구하는 부프로그램만 바꾸어 줌으로써 쉽게 두 방법을 구현할 수 있다는 것이다. 물론 최종차분식을 구하기 위해서는 유한체적복사해법과 같이 계단차분법을 이용한다.

구분중좌법에서의 등온 확산 벽면 경계조건과 대칭면에서의 경계조건은 다음 두 식과 같다. 아래식

에서 W 는 각 종좌의 가중치(weight)이다.

$$I_w^i = \epsilon_w I_{Bw} + \frac{1 - \epsilon_w}{\pi} \sum_{D_{cw}^i < 0} I_w^i |D_{cw}^i| W^i \quad (37)$$

$$I^i = I^i \quad \text{where } |D_{cw}^i| = |D_{cw}^i| \quad (38)$$

2.4 수치 해석 절차

위에서 유도된 유한체적복사해법과 구분중좌법의 해는 반복계산을 통해 얻어진다. 반복계산 과정 중 전진 기법(marching procedure)이 일반적으로 사용된다. Fig. 4에 2차원 형상의 경우 4개의 전진 방향(marching direction)의 순서를 표시해 놓았다. 복사 전달방정식의 수렴 조건은 다음과 같다.

$$\max [|I_P^i - I_P^{i,old}| / I_P^i] \leq 10^{-6} \quad (39)$$

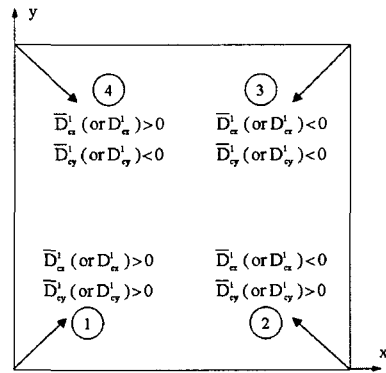


Fig. 4 Four different sweep directions

3. 결과 및 검토

유한체적복사해법에서 균일 및 비균일 제어각도를 사용시에 그 차이점들을 벽면 복사전열량의 파동 특성(wiggle)이라는 면에서 조명한다. 유한체적복사해법과 구분중좌법은 방법의 내재적 특성상 이 벽면 복사전열량의 파동특성을 피할 수 없다. 언급한 두 방법은 현재 가장 많이 사용되는 복사해석기법이기도 하며, 이러한 현상은 복사전열달의 수치 해석에 관여하는 연구자들 대부분이 주지하고 있는 사실이다. 그러므로 1차원 문제로 가정해도 무관한 문제이며 동시에 수치적 정해가 존재하는 문제를 채택해, 실제적으로는 벽면 복사전열량의 파동특성이 일어나

야 하지 않지만 수치기법의 특성상 발생하는 벽면 복사열량의 파동특성을 고찰한다. 또한 격자계 선택의 측면에서도 2차원 해석을 함으로써 일반좌표계에서 유도한 제반 차분식들을 2차원 비직교 격자계에 적용한다.

복사해석 수치해의 검증을 위해 Fig. 5에 도시된 반무한 동심원관의 경우에 대해서 본 연구의 순수 복사검증계산 결과와 기존의 결과들을 비교 및 검토했다. 내부와 외부의 반경은 각각 0.5m와 1m이다. 두 가지의 계산조건이 고려되었으며 두 경우 모두 기하학적 대칭면에 대칭조건을 부여해 계산은 반쪽 영역만 수행되었다.

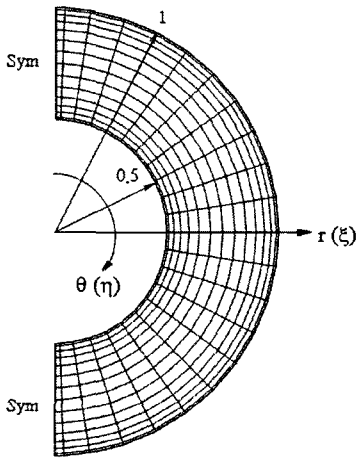


Fig. 5 Schematic of a given problem

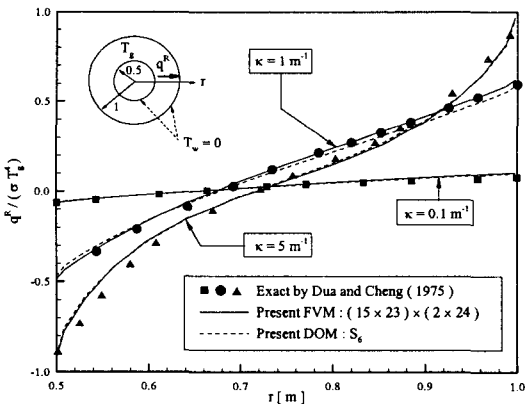


Fig. 6 Dimensionless radial heat flux for isothermal absorbing-emitting medium

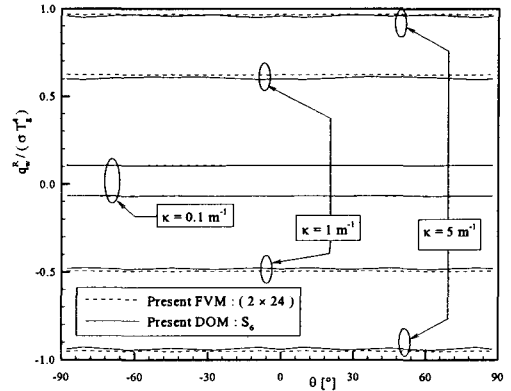


Fig. 7 Dimensionless circumferential heat flux for purely absorbing medium

처음 검증계산으로 균질의 흡수-방사 매질을 고려했다. 각 원통 벽면들은 흑체이며 온도는 0 K(cold)이다. 또한 내부 매질은 T_g 의 온도로 균일하게 유지되어 있다. $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}, 1 \text{ m}^{-1}$ 및 5 m^{-1} 의 세 경우의 흡수계수를 고려했으며 공간 및 각도 격자계는 각각 ξ 와 η 방향으로 15×23 개의 균일 제어체적과 θ 와 ϕ 방향으로 2×24 개의 균일 각도로 나누었다. 반면 구분중좌법의 경우는 같은 공간 격자계에 대해 S_6 종좌와 가중치[8]를 도입했다. 반경방향으로 무차원된 복사 열유속을 Dua and Cheng[9]의 기준해(benchmark solution)와 비교한 것을 Fig. 6에 도시했다. 본 연구의 계산치와 비교시 유한체적복사해법과 구분중좌법의 두 경우 모두 기준해와 매우 잘 일치하며 흡수계수가 증가할수록 내부 매질의 방사 강도가 증가하기 때문에 무차원된 복사 열유속 역시 증가한다. 벽면 방사율의 영향에 따른 복사열유속의 변화는 Fig. 7에 도시했다.

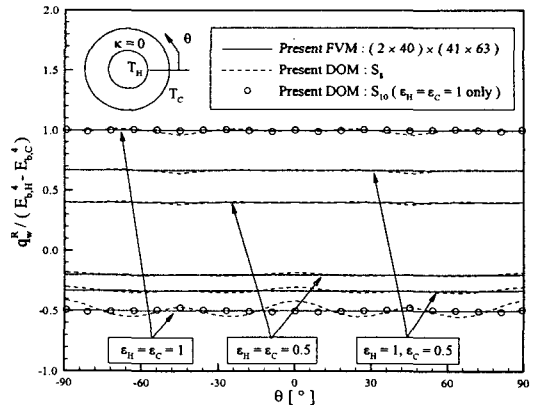


Fig. 8 Dimensionless circumferential heat flux for transparent medium

두번째 검증계산으로 동일한 형상에서 내부 원관은 T_H 의 고온으로 유지하고 외부 원관은 T_C 의 저온으로 균일하게 유지된다. 내부 매질은 산란하지 않는 투명매질로 가정하면 벽면으로의 복사전열량은 표면복사에 의해서만 지배된다. 이 경우 정해는 다음과 같다(Modest[8]). 여기에서 E_b 는 흑체방사능력(blackbody emissive power)이다.

$$q_H^R = \frac{(E_{b,H} - E_{b,C})}{\frac{1}{\epsilon_H} + \frac{A_H}{A_C} \left(\frac{1}{\epsilon_C} - 1 \right)} \quad (40)$$

$$q_C^R = -\frac{A_H}{A_C} q_H^R \quad (41)$$

공간 및 각도 격자계는 유한체적복사해법의 경우 각각 ξ 와 η 방향으로 41×63 개의 비균일 제어체적과 θ 와 ϕ 방향으로 2×40 개의 균일 제어각도로 나누었다. 반면 구분중좌법은 같은 공간 격자계에 대해 S_8 과 S_{10} 의 종좌와 가중치[8]를 도입했다. 유한체적복사해법과 구분중좌법으로 각각 계산된 무차원 벽면 복사전열량을 벽면 방사율을 매개변수로 하여 Fig. 8에 나타냈다. 구분중좌법 자체의 내재적 특성상 S_8 이하의 경우에 대해서는 무차원 벽면 복사전열량의 파동특성(wiggle)이 심하게 나타난다. 그러나 종좌의 개수를 S_{10} 정도로 증가시키면 그러한 경향은 무시할만하다. 따라서 같은 복사방향의 개수를 고려한다면, 균일 제어각도를 취하는 유한체적복사해법이 구분중좌법에 비해 유리하다고 할 수 있다.

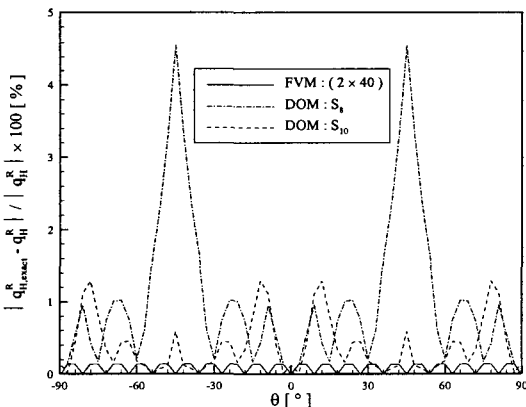


Fig. 9 Error in the hot wall heat flux with black walls

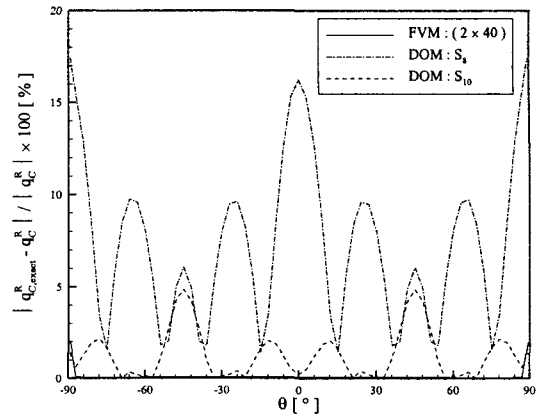


Fig. 10 Error in the cold wall heat flux with black walls

Fig. 9과 10에서는 고온 벽면과 저온 벽면에서 복사전열량의 오차를 두 방법에 대해 비교해서 도시해 놓았다. 복사계산방향의 개수가 유한체적복사해법과 같은 구분중좌법 S_8 의 오차와 비교하면 고온 벽면과 저온 벽면 모두에서 균일 제어각도를 이용한 유한체적복사해법의 오차가 훨씬 작음을 알 수 있다.

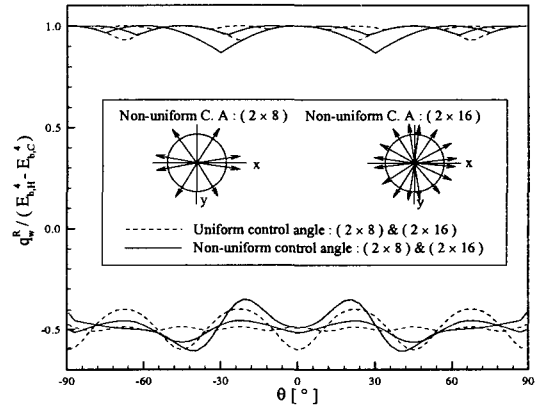


Fig. 11 Wiggle effect affected by the selections of control angle in the FVM

마지막으로 유한체적복사해법에서의 벽면 복사전열량의 파동특성을 시험하기 위해 θ 방향으로는 균일 제어각도를 취하고 ϕ 방향으로는 균일 및 비균일 제어각도를 취해 그 결과를 Fig. 11에 도시했다. 모든 계산조건은 Fig. 8의 경우와 같다. ϕ 방향으로 균

일 제어각도를 택할 경우 벽면 복사전열량의 파동특성은 벽면을 따라 거의 사인파(sine wave) 형태로 나타나고 복사계산 방향을 증가시키면 급격히 감소했다. 반면 ϕ 방향으로 비균일 제어각도를 택할 경우 벽면 복사전열량의 파동특성은 Fig. 8의 구분종좌법의 경우와 유사했으며 제어각도의 불균일이 심할수록 복사열유속은 벽면 위치에 따라 변동이 심해졌다. 따라서 유한체적복사해법의 경우 비균일 제어각도를 사용한다면 구분종좌법에 비해 그 정밀도가 더 낮다고 할 수는 없다.

4. 결론

일반좌표계에서의 유한체적복사해법과 구분종좌법을 유도하여 복사강도의 수치적분 차이점을 조명했다. 종좌의 갯수 및 제어각도의 균일도에 대한 매개 변수 해석을 행하여 향후 연구 수행시 두 방법 중 어느 기법을 사용하는 것이 더 적절한지에 대한 고찰을 수행했다.

임의 형상의 조건하에서는 벽면 복사전열량의 파동특성(wiggle)이 유한체적복사해법과 구분종좌법의 경우를 막론하고 복사 계산방향의 선택과 복사강도 수치적분의 차이에 직접적으로 밀접한 관련이 있음을 알 수 있으며 본 연구의 결과로 볼 때 임의의 형상의 경우 벽면 복사전열량의 파동특성을 되도록 줄이려면 균일 제어각도를 취하는 것이 유리하다고 사료된다. 이는 구분종좌법의 경우에는 구현 불가능한 일이므로 임의의 형상을 다루는 경우에는 균일 제어각도를 취하는 유한체적복사해법을 사용할 것을 추천한다.

그러나 계산의 효율화를 기하기 위해 비균일 제어각도를 취해야만 하는 경우 유한체적복사해법 역시 등분할된 방향이 아닌 종좌를 사용하는 구분종좌법과 마찬가지로 벽면 복사전열량의 파동특성이 나타나므로 어느 기법의 사용이 유리한지는 일반적으로 말할 수는 없다. 따라서 해석 대상의 특성을 고려한 물리적 직관이 필요함과 동시에, 본 연구에서 수행되었듯이 벽면 복사전열량의 파동특성을 되도록 줄일 수 있는 방향 선택에 대한 검증 계산이 필수적이다.

참고문헌

- [1] Carlson, B.G. and Lathrop, K.D., *Computing Methods in Reactor Physics*, Gordon & Granch, New York, (1968), p.165-266.
- [2] Han, C.Y. and Baek, S.W., "Radiative Ignition of Volatile Gases on a Vertical Fuel Plate," *Combust. Sci. and Tech.*, Vol.109, (1995), p.309-325.
- [3] Liu, J., Shang, H.M., Chen, Y.S. and Wang, T.S., "Prediction of Radiative Transfer in General Body-Fitted Coordinates," *Numer. Heat Transfer, Part B*, Vol.31, (1997), p.423-439.
- [4] Chui, E.H. and Raithby, G.D., "Computation of Radiant Heat Transfer on a Nonorthogonal Mesh Using Finite-Volume Method," *Numer. Heat Transfer, Part B*, Vol.23, (1993), p.269-288.
- [5] Chai, J.C., Lee, H.S. and Patankar, S.V., "Finite-Volume Method for Radiation Heat Transfer," *J. Thermophysics*, Vol.8, (1994), p.419-425.
- [6] Han, C.Y. and Baek, S.W., "Natural Convection Phenomena Affected by Radiation in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli," *Numer. Heat Transfer, Part A*, Vol.36-5, (1999), p.473-488.
- [7] Giridharan, M.G., Lowry, S. and Krishnan, A., "A Multi-block, BFC Radiation Model for Complex Geometries," *30th AIAA Thermophysics Conference*, San Diego, CA, (1995), AIAA-95-2020.
- [8] Modest, F.M., *Radiative Heat Transfer*, McGraw-Hill (1993).
- [9] Dua, S.S. and Cheng, P., "Multi-Dimensional Radiative Transfer in Non-isothermal Cylindrical Media with Non-isothermal Bounding Walls," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.18, (1975), p.245-259.