

◎ 논문

비정렬 격자계에서 강건하고 효율적인 LU-SGS 기법 개발: Part I - 내재적 연산자

김 주 성^{*1}, 권 오 준^{*2}

Robust and Efficient LU-SGS Scheme on Unstructured Meshes: Part I - Implicit Operator

Joo Sung Kim and Oh Joon Kwon

A study has been made for the investigation of the robustness and convergence of various implicit operators of the LU-SGS scheme using linear stability analysis. It is shown that the behavior of the implicit operator is not determined by its own characteristics, but is determined relatively depending on the dissipative property of the explicit operator. It is also shown that, as the dissipation level of the implicit operator increases, the robustness of the scheme increases, but the convergence rate can be deteriorated due to the excessive dissipation. The numerical results demonstrate that the dissipation level of the implicit operator needs to be higher than that of the explicit operator for computing stiff problems.

Key Words: LU-SGS 기법, 선형 안정성 해석(Linear Stability Analysis), 소산(Dissipation), 내재적 연산자(Implicit Operator), 비정렬 격자(Unstructured Mesh)

1. 서 론

일반적으로 효율성은 수렴된 해를 얻는데 필요한 계산 시간과 기억 용량 요구량 등으로 평가할 수 있다. 또한 강건한 해석 기법은 주어진 특정한 문제 뿐만 아니라 여러 가지 경우에 대해서 신뢰성 있고, 적정 수준 한도 내에서 해석이 가능한 기법을 말한다. 이러한 강건성은 특히 복잡한 형상에 대한 해석을 수행하고자 하는 비정렬 격자 유동 해석 기법에서는 더욱 중요하게 된다. 해석 기법의 효율성과 강건성을 증대시키기 위한 연구는 여러 가지 영역에서 많이 진행되어 왔다. 예로 낮은 마하수 영역의 해석을 위한 저마하수 예조건화(preconditioning) 기법, 점성 지배 영역에 대한 예조건화 기법[1], 높은 종횡비의 조밀한

격자를 위한 semi-coarsening 다중 격자 기법 등을 들 수 있다. 이와 더불어 효율적이고 강건한 내재적 연산자(implicit operator)에 대한 연구도 진행되어 왔다.

정확한 뉴턴 방법(exact Newton's method)의 가장 큰 장점은 해의 근처에서 이차 수렴성(quadratic convergence)을 얻을 수 있다는 점이다. 하지만 해석 프로그램의 복잡성을 피하면서 효율성을 증대시키기 위해 많은 CFD 프로그램에서 사용되고 있는 고차 정확도 외재적 연산자와 저차 정확도 내재적 연산자를 사용하는 defect correction 방법에서는 직접 해법을 사용하더라도 이차 수렴성을 얻을 수 없다. 따라서 defect correction 기법에서는 수렴성과 강건성을 고려하여 매 시간 단계에서 선형 방정식은 근사 해법을 사용하여 적절한 정확도로 구해지게 된다. 또한 defect correction 기법을 구성하는데 있어서 외재적 연산자와 같은 기법으로 내재적 연산자를 구성해야 하는 제약 조건은 없다. 이와 더불어 외재적 연산자

* 2004년 5월 4일 접수

*1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원

*2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 교수

와 같은 기법으로부터 구해진 내재적 연산자를 사용하는 기법이 항상 높은 수렴성과 강건성을 갖을 것이라고 예측할 수도 없다. 따라서 defect correction 기법에서는 가장 좋은 강건성과 수렴성을 얻을 수 있는 최적의 내재적 연산자를 찾는 것은 매우 의미있는 작업이 된다.

Gauss-Seidel 기법과 같은 근사 해법에 대해서 수렴된 해를 얻기 위해서는 선형 방정식의 대각우세(diagonal dominance) 성질이 만족되어야 한다. 중심차분법에 대한 선형 방정식은 매우 작은 시간 간격에 대해서만 대각 우세 성질을 유지할 수 있으며, Gauss-Seidel 기법은 매우 낮은 수렴성을 보인다. 하지만 이러한 중심 차분법에 대해서도 내재적 인공소산항(implicit artificial dissipation) [2]을 첨가하여 시간 간격의 크기에 상관없이 대각 우세 성질을 유지할 수 있는 내재적 연산자를 구성할 수 있다[3].

풍상차분 기법에 대한 선형 방정식은 중심 차분법의 경우와는 달리 특별한 내재적 인공소산항의 첨가 없이도 항상 대각 우세를 유지한다. Liou와 van Leer[4]는 Steger와 Warming의 FVS(flux vector splitting), van Leer의 FVS, Roe의 FDS(flux difference splitting) 기법에 대해서 준일차원 노즐유동에 대한 해석을 통해서 내재적 연산자의 수렴성 및 강건성에 관한 연구를 수행하였다. 해석 결과는 유동 조건이나 격자의 밀집도에 따라 많은 변화를 보이며, 대체적으로 FVS 기법이 FDS 기법보다 강건한 것으로 보여지고 있다. Amaladas와 Kamath[5] 또한 이차원 익형에 대한 해석을 통해서 FDS 기법보다 FVS 기법이 더욱 강건한 것을 보이고 있다. 하지만 근사적인 Roe의 내재적 연산자 또한 유동 조건이나 격자 밀집도의 정도에 따라서 가장 효율적일 수 있는 기법이 될 수 있음을 보였다. Wright 등[6]은 잔류항과 같은 기법의 내재적 연산자를 사용할 경우 참고 문헌 [3]에서 제안된 내재적 연산자 보다 약 2배 정도 빠른 수렴성을 얻을 수 있음을 보였다.

현재까지의 내재적 연산자에 관한 연구는 수치적인 경험을 통해서 수행되어져 왔으며, 해석에 사용된 유동 조건이나 격자 형상 또는 밀집도에 따라서 상당히 상반되는 결과를 도출하기도 하였다. 예로 참고

문헌 [5]에서 천음속 유동에서 가장 좋은 수렴성을 보이는 근사 Roe 내재적 연산자는 초음속 유동에 대해서는 불안정성을 보인다. 이러한 경향에 의해서 지속적으로 수렴성이 좋으며 강건한 내재적 연산자를 선택하는데는 많은 어려움이 존재한다.

본 연구에서는 선형 안정성 해석(linear stability analysis) 방법을 사용하여 LU-SGS(lower-upper symmetric Gauss-Seidel) 기법에 적용된 여러 가지 내재적 연산자의 수렴성 및 강건성에 관한 연구를 해석적으로 수행하고자 한다. 특히 내재적 연산자의 불안정성의 원인과 이러한 불안정성의 제거에 관하여 논하고자 한다. 또한 유동해의 강직성(stiffness)에 따른 이러한 불안정성의 거동을 체계적으로 수행하고자 한다. 이러한 해석 결과를 검증하기 위해 범프 유동에 대한 광범위한 해석을 수행하였다.

2. 지배방정식 및 내재적 시간적분법

지배방정식으로는 이상기체 압축성 오일러(Euler) 방정식이 사용되었으며, 이는 경계면 $\partial\Omega$ 를 갖는 제어체적 Ω 에 대해서 다음과 같이 보존적인 형태(conservative form)로 쓰여질 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial\Omega} f(Q) dl = 0 \tag{1}$$

여기서 Q 는 보존 변수, $f(Q)$ 는 비점성 플럭스(flux)를 각각 나타낸다. 자세한 식은 참고 문헌 [7]에서 볼 수 있다. 식 (1)은 격자점 중심 유한 체적법(node-based finite-volume method)을 사용하여 차분화되며, 각각의 격자점에서의 제어체적은 median dual을 사용하여 구성된다. 차분화된 식에 대해서 시간에 대한 일차 정확도 오일러 후방차분법을 사용하면 결과적인 비선형 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta t_i} V_i + R_i(Q^{n+1}) = 0 \tag{2}$$

여기서 Δt_i 는 시간간격, $\Delta Q_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n$, $R_i(Q^{n+1})$ 는 잔류항을 나타낸다. 식 (2)에서 $R_i(Q^{n+1})$ 을 Q^n 단계에 대해서 테일러 전개 방법을 사용하여 시간 선형화하면 다음과 같다.

$$\left[\frac{V_i}{\Delta t_i} I + J(Q^n) \right] \Delta Q = -R(Q^n) \quad (3)$$

여기서 왼쪽항은 내재항, 오른쪽항은 외재항을 나타낸다. 또한 $J(Q^n)$ 은 플럭스 자코비안을 나타낸다. 위식은 시간 간격 Δt_i 의 값이 무한대로 접근해 감에 따라 비선형 방정식, $R(Q) = 0$ 의 해를 구하는 정확한 뉴턴 방법을 나타내게 되며, 결과적인 선형 방정식에 대한 정확한 해를 구하면 이차수렴성을 얻을 수 있게 된다. 전형적인 defect correction 방법에서는 고차 정확도의 잔류항(본 연구에서는 2차 정확도), $R_{high}(Q)$ 와 저차 정확도의 잔류항, $R_{low}(Q)$ 를 미분하여 얻을 수 있는 저차 정확도의 플럭스 자코비안, $J_{low}(Q)$ 를 식 (3)에 적용한다. Defect correction 기법에서 defect는 $R_{high}(Q) - R_{low}(Q)$ 이며, 궁극적으로 $R_{high}(Q)$ 의 값이 0으로 수렴하게 만드는 defect correction 방법은 다음과 같다.

$$\left[\frac{V_i}{\Delta t_i} I + J_{low}(Q^n) \right] \Delta Q = -R_{high}(Q^n) \quad (4)$$

위 식에서 왼편 항과 오른편 항의 불일치에 의해 선형방정식을 정확하게 계산하여도 정확한 뉴턴 방법의 가장 큰 장점인 이차수렴성을 얻을 수 없다. 본 연구에서 식 (4)는 forward sweep과 backward sweep을 번갈아 수행하는 LU-SGS 방법으로 계산된다.

3. 비점성 플럭스의 소산 특성

본 연구에서는 내재적 연산자로 Roe[8], van Leer[9], Jameson과 Tukul의[3] 기법에 대해서 고찰한다. 내재적 연산자에 대한 자세한 표현은 part II[10]

에서 다룬다. Roe 기법에 대해서는 근사 선형화 방법과 유한 차분법을 사용한 정확한 선형화 방법이 논의된다. Jameson과 Turkel의 내재적 연산자는 HLL 계열로 표현될 수 있는 Rusanov 플럭스로[11] 표현될 수 있다. 본 장에서는 이러한 플럭스 식에 대한 소산 특성(dissipative property)에 관해서 논의한다.

수치적인 플럭스 $F(Q_L, Q_R)$ 을 구하는 가장 간단한 근사 방법은 Q_L 과 Q_R 에 상응하는 플럭스를 산술 평균하는, $F(Q_L, Q_R) = 0.5[f(Q_L) + f(Q_R)]$ 이다. 하지만 이 방법은 odd-even decoupling 현상과 충격파와 같은 강한 비선형 불연속면에서 원하지 않는 진동을 유발한다. 이러한 현상들을 제어하기 위해 인공소산항(artificial dissipation)이 사용되고 있으며, 스칼라 이차-차분(second-difference) 인공소산항을 사용한 플럭스 식은 다음과 같다.

$$F(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} [f(Q_L) + f(Q_R)] - \epsilon |\lambda| (Q_R - Q_L) \quad (5)$$

여기서 ϵ 는 이차-차분 인공소산항의 크기를 조절하기 위한 사용자 조절 상수이다. ϵ 의 값이 증가하면 소산 레벨은 증가하며, 반대로 ϵ 의 값이 작아지면 소산 레벨은 감소한다. 또한 λ 는 플럭스 자코비안 행렬 $A = \partial f(Q) / \partial Q$ 의 spectral radius를 나타낸다. 중심 차분 기법에서 λ 는 $(Q_L + Q_R)/2$ 의 값이 전형적으로 사용되어 계산된다.

본 연구에서 논하고자 하는 풍상 차분 기법들 또한 식 (5)처럼 중심차분에 인공소산항이 더해진 형태로 표현될 수 있으며, 여러 가지 풍상 차분 기법들은 이러한 인공소산항의 형태가 다른 식으로 표현된다 [11]:

$$F(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} [f(Q_L) + f(Q_R)] - AD \quad (6)$$

여기서 Roe, van Leer, Rusanov 기법에 대한 각각의 인공소산항, AD 는 다음과 같이 표현된다.

$$Roe : |\bar{A}|(Q_R - Q_L)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Van Leer} &: \int_{Q_L}^{Q_R} |B(Q)| dQ \\
 \text{Rusanov} &: |\lambda|(Q_R - Q_L)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

여기서 $|A| = |A(Q)|$ 이며, Q 는 Roe-average된 값을 나타낸다. Van Leer의 기법에서 $|B| = dF^+(Q)/dQ - dF^-(Q)/dQ$ 이며, F^+ 와 F^- 는 van Leer가 제안한 forward와 backward 플럭스를 나타낸다. Rusanov 기법은 Roe의 기법과 수식은 매우 비슷하나, 단지 인공소산항의 $Q_R - Q_L$ 의 계수가 스칼라 값인 $|\lambda|$ 로 표현된 부분이 다르다. 이러한 λ 는 여러 가지 방법으로 계산될 수 있다. 단순하게 Q_L 과 Q_R 의 산술 평균 값을 사용하여 계산될 수도 있으며, $\lambda = \max[\lambda_L, \lambda_R]$ 의 방법을 사용할 수도 있다.

식 (7)의 여러 가지 풍상 차분 기법들에 대한 인공소산항의 형태에서, Roe와 Rusanov 기법은 중심 차분법과 비교하여 단지 인공소산항의 계수만 다르게 표현되는 것을 볼 수 있으며, van Leer의 기법에 대해서도 비슷한 형태를 보인다. 특히 Rusanov 기법은 스칼라 인공소산항을 사용하는 중심 차분법과 비교하여 단지 사용자 조절 상수 ϵ 의 유무만이 다를 뿐이다.

시간항이 포함된 오일러 방정식은 쌍곡선(hyperbolic) 형태의 편미분 방정식이며, 이차원 오일러 방정식에 대한 리만 문제의 해는 충격파(shock wave), 팽창파(rarefaction wave), 전단파(shear wave), 접촉 불연속면(contact discontinuity)의 네가지의 웨이브로 구성된다. 여기서 충격파와 팽창파는 비선형 파동이며, 전단파와 접촉 불연속면은 선형 파동이다. NS 방정식에 존재하는 경계층의 해석을 위해서는 선형 파동에 대한 해상도가 매우 중요하다. 하지만 본 연구에서 다루고자 하는 오일러 방정식에 대해서는 선형 파동에 대한 해상도 보다는 충격파와 같은 비선형 파동에 대한 해상도가 훨씬 중요하다.

Fig. 1은 참고 문헌 [12]의 검증 경우 5에 해당하는 Riemann 문제에 대한 여러 가지 기법의 밀도 해를 보이고 있다. 오일러 방정식의 해석에서 중요한 충격파 주위에서 Roe의 기법이 가장 소산이 적은 것을 볼 수 있다. 또한 van Leer의 FVS 기법은 Rusanov 기법 보다는 소산이 작은 것을 볼 수 있다.

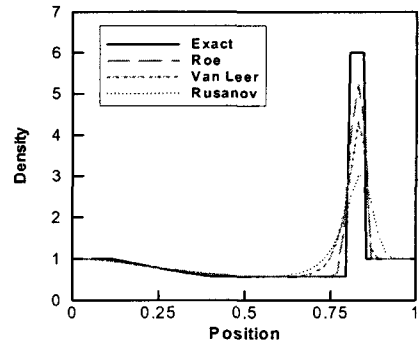


Fig. 1 Density contours for test case 5 in Ref. [12].

이러한 Rusanov 기법의 Roe와 van Leer 기법보다 높은 소산은 중심 차분기법에서 스칼라-인공소산항이 행렬-인공소산항 보다 소산이 더욱 큰 것과 상응한다.

4. 내재적 연산자 해석

본 장에서는 내재적 연산자와 외재적 연산자의 소산 특성에 따른 수렴성 및 강건성에 관한 해석을 수행한다. 일차원에 대한 스칼라 대류 모형 방정식을 생각하여 보자.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0
 \tag{8}$$

여기서 $f = au$ 이다. a 는 웨이브 속도를 나타내며, $a > 0$ 인 스칼라 상수의 값이 사용되었다. 식 (8)을 오일러 방정식과 같은 유한 체적법을 적용하여 차분화 하면, 격자 인덱스 i 에 대한 잔류항, $R_i(u)$,는 다음과 같이 표현된다.

$$R_i(u) = [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}] / \Delta x_i
 \tag{9}$$

여기서 F 는 수치플럭스를 나타내며, 풍상차분법이나 중심차분법 등으로 계산될 수 있다. 또한 3장에서 볼 수 있듯이 모든 기법은 중심차분항에 인공소산항이 더해진 형식으로 쓰여질 수 있다. 일차정확도 풍상차분법이 사용되어 차분화된 잔류항은 다음과 같다[2].

$$R_i^{1st}(u) = \left[\delta(au_i) - \frac{1}{2}(\Delta \nabla)(|a|u_i) \right] / \Delta x_i \quad (10)$$

여기서 δ 는 전형적인 중심차분 연산자이며, $\delta = (E^{+1} - E^{-1})/2$ 이다. 또한 $\Delta = (E^{+1} - I)$ 이며, $\nabla = (I - E^{-1})$ 이다. 이동 연산자(shift operator) E^j 에 대해서, $E^{+j}u_i = u_{i+j}$ 이다. 식 (10)에서 오른쪽의 첫 번째 항은 중심차분항에 해당되며, 두 번째 항은 인공소산항에 해당된다. 식 (10)은 이차-차분 인공소산항을 사용하는 중심차분기법과 일치한다. 이차정확도 upwind-biased 기법에 대해서는 다음과 같이 표현된다.

$$R_i^{2nd}(u) = \left[\bar{\delta}(au_i) + \frac{1}{8}(\Delta \nabla)^2(|a|u_i) \right] / \Delta x_i \quad (11)$$

여기서 $\bar{\delta}$ 는 일차정확도 기법에 대한 중심 차분 연산자 δ 와 정확도는 같으나 수식은 다르다:

$$\bar{\delta} = \frac{(-E^{+2} + 6E^{+1} - 6E^{-1} + E^{-2})}{8} \quad (12)$$

풍상 차분기법은 중심 차분항에 인공소산항이 더해진 형태로 표현되며, 여러 가지 풍상 차분기법은 인공소산항의 부분만이 다르게 표현된다. 따라서 각 기법의 소산의 크기는 인공소산항에 따라서 달라지게 된다. 하지만 3장에서 언급된 여러 가지 풍상 차분기법은 선형 방정식에 대해서는 같게 표현되며, 본 연구에서는 중심차분기법의 인공소산항의 크기를 조절하기 위해 사용되는 사용자 조절 상수를 사용하여 여러 가지 풍상 차분 기법의 소산의 크기에 따른 내재적 및 외재적 연산자의 거동을 살펴본다. 잔류항과 내재항에 모두 일차정확도 풍상차분기법을 사용하면, 식 (8)은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} & \left[1 + \sigma\delta - \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_i(\Delta \nabla) \right] (u^{n+1} - u^n) \\ & = \sigma \left[\delta - \frac{1}{2}\varepsilon_e(\Delta \nabla) \right] u^n \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\sigma = |a|(\Delta t / \Delta x)$ 이며, 스칼라 방정식에 대한 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 수를 나타낸다. ε_i 는 내재항 인공소산항 계수(implicit artificial

dissipation coefficient)를 나타내며, ε_e 는 외재항 인공소산항 계수(explicit artificial dissipation coefficient)를 나타낸다. 또한 모든 인공소산항 계수는 양수의 값만을 갖는다. 중심차분기법의 거동을 바탕으로 하면, $\varepsilon_i = \varepsilon_e$ 이면 외재항과 내재항에 같은 소산 레벨을 갖는 기법이 사용된 것으로 생각할 수 있다. 또한 $\varepsilon_i \geq \varepsilon_e$ 이면 내재항에 더욱 소산이 큰 기법이 사용된 것이며, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_e$ 이면 반대이다.

식 (13)의 수렴성 및 안정성에 대한 해석을 위해 폰 노이만 안정성 해석 방법을 사용한다[13]. u_i^n 은 푸리에 전개를 사용하여 $u_i^n = E^n e^{i\phi_x}$ 로 가정되며, 이 식을 차분화된 식 (13)에 대입하면 $G = E^{n+1}/E^n$ 으로 정의되는 amplification factor를 얻는다. 이 식에서 E^n 은 n 시간 단계에서의 에러의 크기(error amplitude)를 나타낸다. 또한 ϕ_x 는 공간주파수(spatial frequency)이며, $-\pi \leq \phi_x \leq \pi$ 의 범위를 갖는다. G 의 절대값은 차분화된 식의 안정성 및 수렴성 특성을 나타낸다.

내재적 방법은 외재적 방법에 비해 매우 큰 시간 간격의 사용으로 인해 높은 수렴성을 얻는다. 사용된 내재적 방법이 높은 시간 간격을 허용하지 못하면 내재적 방법의 효율성은 외재적 방법에 비해 급격히 반감된다. 따라서 높은 시간 간격에서의 내재적 기법의 수렴성 및 안정성은 매우 중요하며, 본 연구에서도 높은 시간 간격에서의 LU-SGS 기법의 거동에 대해 주로 논의한다.

먼저 일차원에 대한 직접 해법(direct inversion scheme)의 거동에 대해 논한다. 여기서 내재적 연산자는 항상 일차정확도 기법이 사용된다. 잔류항에 대해서 일차정확도 풍상차분 기법과 이차정확도 upwind-biased 기법에 대한 각각의 amplification factor는 다음과 같다.

1st order upwind scheme:

$$G^{1st} = \frac{1 - \alpha(\varepsilon_i - \varepsilon_e)\mu_x}{(1 - \sigma\varepsilon_i\mu_x) + \alpha\lambda_x I} \quad (14)$$

2nd order upwind biased scheme:

$$G^{2nd} = \frac{(1 - \sigma \epsilon_i \mu_x - 0.5 \sigma \epsilon_e \mu_x^2) + (\alpha \lambda_x + 0.5 \sigma \lambda_x (\mu_x - 2)) I}{(1 - \sigma \epsilon_i \mu_x) + \alpha \lambda_x I} \quad (15)$$

여기서 $\mu_x = \cos \phi_x - 1$, $\lambda_x = \sin \phi_x$ 이다.

두 기법에 대한 수렴성과 안정성의 거동을 쉽게 알아보기 위해 $\phi_x = \pi$ 에서의 거동을 살펴본다. 일차정확도 기법에 대해서는 $G^{1st} = (1 + 2\sigma(\epsilon_i - \epsilon_e)) / (1 + 2\sigma\epsilon_i)$ 이다. 이에 대해 내재적 기법에서 중요한 높은 σ 에 대해서, 안정 조건인 $|G| \leq 1$ 을 만족하기 위해서는 $\epsilon_i \geq 0.5\epsilon_e$ 이어야 한다. 즉 내재적 연산자의 소산이 외재적 연산자의 소산 보다 어느 정도 이상 커야 안정적인 것을 알 수 있다. 또한 $\epsilon_i = \epsilon_e$ 일 때, $\sigma \rightarrow \infty$ 에 따라 $|G| \approx 0$ 이 되어 선형 해석상 가장 좋은 감쇄율을 보인다. 또한 이 경우 식 (14)에서 볼 수 있듯이, $\phi_x = \pi$ 에서의 amplification factor 뿐만 아니라 모든 공간 주파수에 대해서 amplification factor가 0으로 접근하며, 따라서 궁극적으로 정확한 뉴턴 방법의 특징인 이차수렴성을 얻을 수 있게된다. 이는 내재적 연산자와 외재적 연산자가 같은 소산을 갖는, 즉 같은 기법(consistent scheme)을 사용하여 연산자들을 구성할 때, 선형 해석상 가장 좋은 감쇄율을 얻을 수 있음을 보인다.

이차정확도 기법에 대해서는 $\phi_x = \pi$ 에서 $G^{2nd} = (1 + 2\sigma(\epsilon_i - \epsilon_e)) / (1 + 2\sigma\epsilon_i)$ 으로 일차정확도 기법의 값과 같으며, 안정성을 위해 $\epsilon_i \geq 0.5\epsilon_e$ 의 조건을 만족하여야 하며, $\epsilon_i = \epsilon_e$ 일 때 가장 좋은 감쇄율을 보인다. $\epsilon_i = \epsilon_e$ 일 때, $\sigma \rightarrow \infty$ 에 따라 $\phi_x = \pi$ 에서의 amplification factor는 0으로 수렴하지만, 다른 주파수에 대해서는 유한한 값을 갖는다. 따라서 매우 높은 시간 간격을 사용하여도, 일차정확도 기법에서처럼 정확한 뉴턴 방법의 특징인 이차수렴성을 얻을 수 없는 것을 알 수 있다. 또한 $\epsilon_i > \epsilon_e$ 이면, $\epsilon_i = \epsilon_e$ 인 경우보다 감쇄율은 낮지만, 항상 안정적(unconditionally stable)이다. Fig. 2는 이차정확도 기법에 대해서 여러 가지 ϵ_i 와 ϵ_e 의 크기 비에 따른 amplification

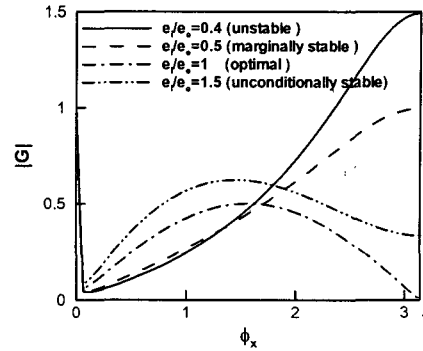


Fig. 2 Magnitude of the amplification factor for the scalar equation with implicit and explicit artificial dissipations.

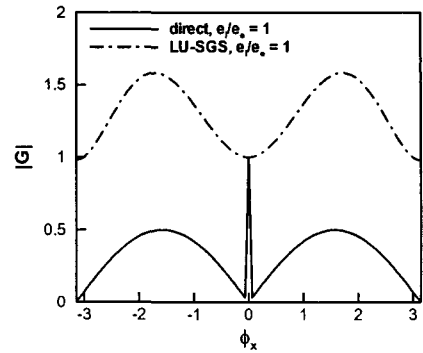
factor를 나타내고 있다. 여기서 ϵ_i/ϵ_e 의 크기를 변화시키기 위해 $\epsilon_e = 1$ 로 고정한 채 ϵ_i 의 값이 변화되었다. 특별한 언급이 없는한 모든 안정성 해석 결과에서 ϵ_i/ϵ_e 의 크기는 이러한 방법으로 변화된다. 또한 CFL 수는 매우 큰 값인 10^7 의 값이 사용되었다. 그림의 대칭성에 의해서 amplification factor의 크기는 $0 \leq \phi_x \leq \pi$ 에 대해서만 보이고 있다. 앞의 해석에서와 같이, 내재적 연산자와 외재적 연산자의 소산이 같을 때 가장 좋은 감쇄율을 보인다. 또한 $\epsilon_i < 0.5\epsilon_e$ 이면, 가장 높은 주파수에서부터 $|G| > 1$ 인 영역이 존재하는 것을 볼 수 있다. 또한 $\epsilon_i > \epsilon_e$ 인 경우에 대해서는 $\epsilon_i = \epsilon_e$ 인 경우보다 감쇄율은 낮지만, 안정한 것을 볼 수 있다. 일차원 대류방정식에 대한 ϵ_i 와 ϵ_e 의 관계는 다음의 이차원 방정식에 대해서도 정확히 일치한다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

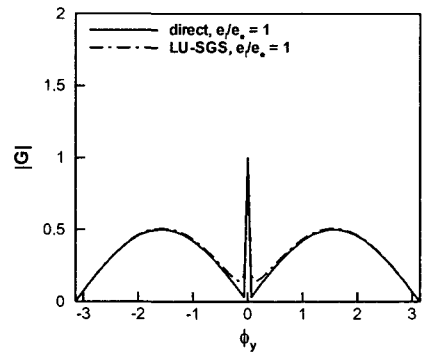
여기서 f 는 일차원에서와 같으며, $g = bu$ 이다. 또한 a 와 b 의 부호는 반대이며, $a > 0$ 이며, $b < 0$ 인 값이 사용되었다. 두 개의 웨이브 속도의 부호가 같으면 스위프의 방향에 따라 Gauss-Seidel 방법은 직접해법과 같게 될 수 있으므로 피하였다. 이차원에 대해서 차분화된 식은 일차원 식에 존재하는 독립 변수인 σ 와 더불어 격자 종횡비, $AR = \Delta x/\Delta y$ 와 유동각, $\theta = -b/a$ 의 세 개의 변수에 의해 지배된다.

모든 해석에서는 $AR=1$ 이 사용되었다. 참고 문헌 [14]를 참조하면, $\theta \gg 1$ 이면 직접해법이나 LU-SGS 기법 모두 x방향에 대한 웨이브의 감쇄율이 y방향에 대한 웨이브의 감쇄율 보다 훨씬 나빠지게 된다. 따라서 모든 웨이브에 대한 전체적인 감쇄율은 가장 안좋은 경우인 x방향에 대한 감쇄율이 지배하게 된다. 또한 $\theta \ll 1$ 이면 반대가 된다. 오일러 방정식에 대한 거동은 $\theta \ll 1$ 인 경우의 스칼라 방정식의 거동과는 많이 다르며, 단지 $\theta \gg 1$ 인 경우와 흡사하다. 따라서 본 연구에서는 스칼라 방정식의 해석에서 $\theta \gg 1$ 인 경우만을 고려하며, 이를 위해 모든 해석에서 $\theta=10^2$ 이 사용되었다. 일차원 해석에 대해서는 일차정확도 풍상차분기법이 사용된 내재적 연산자에 대해서 직접 해법과 Gauss-Seidel 해법이 정확하게 일치된다. 따라서 본 연구에서는 LU-SGS 기법의 거동을 파악하기 위해 이차원 방정식에 대해서 논의한다.

직접해법에서는 내재적 연산자의 소산이 외재적 연산자의 소산 보다 클 때는 항상 안정적이지만, 반대로 작을 때는 불안정성을 야기할 수 있다. 직접 해법에 대해서 최적의 수렴성과 안정성을 얻기 위해서는 내재적 연산자와 외재적 연산자의 소산의 크기가 같아야 하며, 이 경우 모든 시간 간격에 대해서 항상 안정적 이다. 하지만 LU-SGS 기법에 대해서는 이러한 일치하는 소산을 갖는 연산자에 대해서 최적의 수렴성 뿐만 아니라 안정성을 제공하지도 않는다. Fig. 3은 이차정확도 잔류항에 대한 $\sigma=10^7$ 에서의 amplification factor를 보이고 있다. Fig. 3(a)는 $\phi_y=0$ 인 순수한 x방향의 공간주파수에 대한 amplification factor를, Fig. 3(b)는 $\phi_x=0$ 인 순수한 y방향의 공간주파수에 대한 amplification factor를 각각 보이고 있다. 직접해법에 대해서는 매우 높은 시간간격이 사용되어 일차원 해석에서 본 것처럼 가장 높은 공간주파수인 $\phi_x=\pm\pi$ 와 $\phi_y=\pm\pi$ 모두에서 $|G|\approx 0$ 인 것을 볼 수 있다. 또한 모든 주파수에 대해서 $|G|<1$ 이므로 안정하다. 하지만 LU-SGS 기법은 x방향 공간 주파수의 대부분의 영역에 대해서 $|G|>1$ 이며, 따라서 매우 높은 불안정성을 보이고 있다.



(a) Purely x-directional spatial frequency



(b) Purely y-directional spatial frequency

Fig. 3 Comparison of the magnitude of amplification factor between direct inversion and LU-SGS schemes.

Fig. 4는 여러 가지 ϵ_i/ϵ_e 의 값에 대해서 CFL 수의 함수로 amplification factor의 절대값의 최대값 ($\max(|G|)$)을 표현한 그림이다. 가장 낮은 공간주파수인 $\phi_x=\phi_y=0$ 에서의 amplification factor의 값이 항상 1이기 때문에, 안정한 상태에서의 amplification factor의 최대값은 1로 표현된다. 직접해법에서 marginally stable인 $\epsilon_i/\epsilon_e=0.5$ 에 대해서는 $\sigma=1$ 에서부터, 직접해법에서 최적의 수렴성을 보이는 $\epsilon_i/\epsilon_e=1$ 인 경우에 대해서는 $\sigma=10$ 에서부터 $|G|$ 의 값이 1보다 큰 영역이 존재하며, 따라서 이 이상의 σ 에서는 불안정할 가능성이 있다. 하지만 내재항의 소산이 외재항의 값보다 크면 이러한 불안정성은 완화된다. 그림의 $\epsilon_i/\epsilon_e=1.5$ 인 경우에 대해서는 $\sigma=10^7$ 까지 $|G|>1$ 인 부분은 존재하지 않는다.

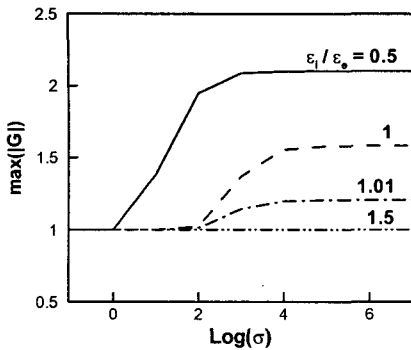


Fig. 4 Maximum of amplification factor for various ϵ_i/ϵ_e as a function of σ .

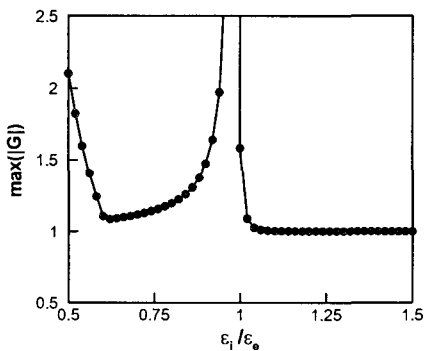
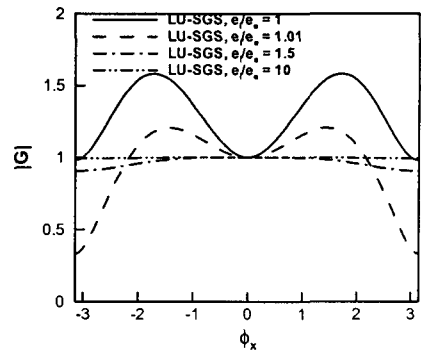


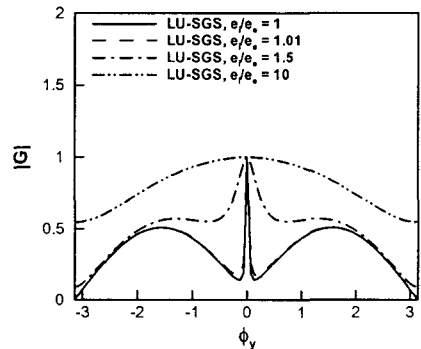
Fig. 5 Maximum of amplification factor as a function of ϵ_i/ϵ_e .

Fig. 5는 ϵ_i/ϵ_e 의 값에 따른 amplification factor의 최대값을 보이고 있다. 여기서 σ 는 10^7 의 값이 사용되었다. $\epsilon_i/\epsilon_e < 1$ 인 경우에 대해서는, 항상 $|G| > 1$ 인 영역이 존재하며, 특정한 값에 대해서는 매우 높은 amplification factor의 최대값(Fig. 5의 경우에는 약 200)을 가진다. 따라서 LU-SGS 기법에 대해서 외재적 연산자보다 작은 소산 레벨을 갖는 내재적 연산자의 사용은 매우 심각한 수렴성 및 안정성 제약이 존재할 수 있음을 알 수 있다. 직접 해법에서 최적의 수렴성을 보이는 $\epsilon_i/\epsilon_e = 1$ 인 경우에 대해서도 불안정성을 보이며, 높은 시간 간격에서 LU-SGS 기법을 안정적으로 사용하기 위해서는 $\epsilon_i/\epsilon_e > 1$ 이어야 한다.

Fig. 6은 $\sigma = 10^7$ 에서 여러 가지 ϵ_i/ϵ_e 의 값에 따른 amplification factor의 절대값을 보이고 있



(a) Purely x-directional spatial frequency



(b) Purely y-directional spatial frequency

Fig. 6 Comparison of the magnitude of amplification factor according to the magnitude of ϵ_i/ϵ_e .

다. ϵ_i/ϵ_e 의 값이 증가함에 따라 amplification factor의 절대값은 공간 주파수에 대해서 평균화되는 경향을 보인다. 따라서 ϵ_i/ϵ_e 의 값이 증가함에 따라 LU-SGS 기법은 더 높은 시간 간격에서도 안정하게 되며, $\epsilon_i/\epsilon_e \rightarrow \infty$ 이면 모든 시간 간격에 대해서 항상 안정적(unconditionally stable)이게 된다. 하지만 $\epsilon_i/\epsilon_e \rightarrow \infty$ 이면 모든 공간 주파수에 대한 amplification factor의 값이 1로 접근하여 매우 낮은 수렴성을 보이게 된다. 따라서 안정성을 유지하면서 높은 수렴성을 얻을 수 있는 적절한 ϵ_i/ϵ_e 의 값이 존재하게 된다. 하지만 이러한 값은 유동의 강직성의 정도에 따라서 매우 다르게 되므로, 해석하고자 하는 유동의 특성에 따라 달라지게 된다.

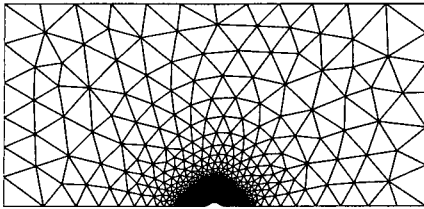


Fig. 7 Triangular grid for a 20% thickness bump flow.

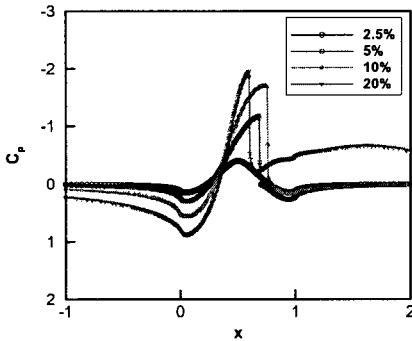


Fig. 8 Pressure coefficient distributions for 2.5, 5, 10, and 20% bump flows.

5. 계산 결과

해석으로부터 얻은 결과를 검증하기 위해 여러 가지 두께를 갖는 범프 유동에 대해서 체계적인 해석을 수행하였다. 내재적 연산자로 Roe의 정확한 선형화 방법과 근사 선형화 방법, van Leer 방법, Jameson과 Turkel의 방법이 검증되었으며, 각각은 EX, AP, VL, JT로 표기되었다. 또한 외재적 연산자로는 Roe와 van Leer의 기법이 검증되었다. Jameson과 Turkel의 내재적 연산자로부터 얻을 수 있는 Rusanov 기법은 너무 심한 소산 특성으로 인하여 제외되었다. 모든 경우에 대해서 내재적 연산자의 공간정확도는 일차정확도이며, 외재적 연산자에 대해서는 이차정확도 upwind biased 기법이 사용되었다. 또한 LU-SGS 기법의 내부반복계산(subiteration)의 수는 10으로 하였다. 이 값은 모든 경우에 대해서 최적은 아니지만 많은 비정렬 격자계에서 전형적으로 널리 사용되는 값이다. 모든 계산에서 초기 조건으로 자유류의 값이 사용되었다. 또한 계산초기의 수렴성을 위해 잔류치의 값이 3개의 크기 만큼 감소할때까지 일차정확도로 계산되며, 이 값을 초기조건으로 하여 이차정확도로

재시작 하는 방법이 사용되었다.

범프의 형상은 $y=t\sin^2(\pi x)$ 로 기술되며, $0 \leq x \leq 1$ 에 위치된다. 여기서 t 는 범프의 두께를 나타내며, 길이대 높이의 비율로 표기된다. 전체 계산 영역의 길이는 20, 높이는 10이며, 범프는 아랫면의 중간에 놓여져 있다. 경계조건은 범프가 존재하는 아랫면은 벽면 미끄럼 경계조건이 적용되었으며, 나머지 세 면에 대해서는 특성 경계조건이 적용되었다. 계산에 사용된 마하수는 0.8이며, 격자는 advancing front 방법으로 생성된 등방성 삼각형 격자가 사용되었다. Fig. 7은 20% 두께를 갖는 범프에 대한 전형적인 격자 형상을 보이고 있다. 이 경우에 대해서 격자는 6,359개의 격자점과 12,328개의 격자, 18,686개의 격자면으로 구성되었으며, 범프 표면에는 215개의 격자점이 분포되어 있다. 다른 두께를 갖는 격자에 대해서도 격자 형상 및 격자수는 거의 비슷하게 생성하였다.

본 연구에서는 유동 해의 강직성에 따른 내재적 연산자의 거동을 파악하기 위해 유동 마하수를 고정한 채 범프의 두께를 증가시키는 방법을 사용하였다. 범프의 두께가 증가함에 따라 유동해의 구배는 심해지게 된다. Fig. 8은 Roe 기법과 이차정확도 upwind biased 기법을 사용하여 계산된 2.5, 5, 10, 20% 두께의 범프 주위에서의 압력 분포를 보이고 있다. 2.5% 범프에서는 충격파가 발생되지 않고, 매우 작은 압력 구배가 범프 주위에 존재한다. 하지만 범프 두께가 증가함에 따라 범프 윗면에서 충격파가 발생되며, 이러한 충격파의 강도는 두께가 증가함에 따라 강해짐을 볼 수 있다. 또한 20% 두께에 대해서는 충격파 후에 와류(vorticity)가 생성되어, 상대적으로 낮은 압력이 유지되는 것을 볼 수 있다. 따라서 범프의 두께가 증가함에 따라 유동의 강직성은 점차로 증가하게 됨을 볼 수 있다.

선형 해석에서 높은 CFL 수를 사용하기 위해서는 내재적 연산자의 소산 레벨이 외재적 연산자 보다 커야 함을 보였다. 또한 내재적 연산자가 외재적 연산자 보다 낮은 레벨이나 같은 레벨의 소산을 갖을 때는 상당히 낮은 CFL 수에서부터 불안정성을 내포함을 보였다. Table 1에서는 외재적 연산자로 Roe 기법이 사용된 경우에 대해서 내재적 연산자에 따른 허용 최대 CFL 수와 연속방정식의 잔류치를 10개의 크기

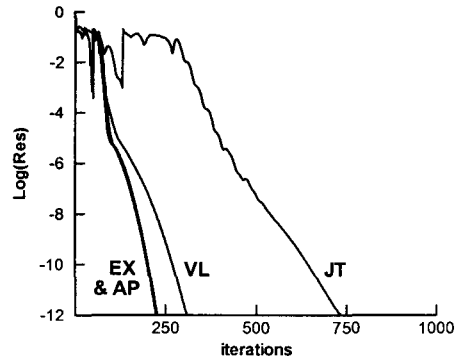
Table 1 Allowable maximum CFL number and time steps required to achieve 10th order residual reduction for various implicit operators with Roe explicit operator.

| implicit operator | | bump thickness | | | |
|-------------------|-------|----------------|--------|-----------------|--------|
| | | 2.5% | 5% | 10% | 20% |
| EX | CFL | 10^7 | 10^7 | 5×10^1 | * |
| | steps | 280 | 200 | 1760 | failed |
| AP | CFL | 10^7 | 10^7 | 5×10^1 | * |
| | steps | 280 | 210 | 1770 | failed |
| VL | CFL | 10^7 | 10^7 | 3×10^3 | 10^2 |
| | steps | 340 | 270 | 310 | 1720 |
| JT | CFL | 10^7 | 10^7 | 10^7 | 10^7 |
| | steps | 2700 | 640 | 630 | 3660 |

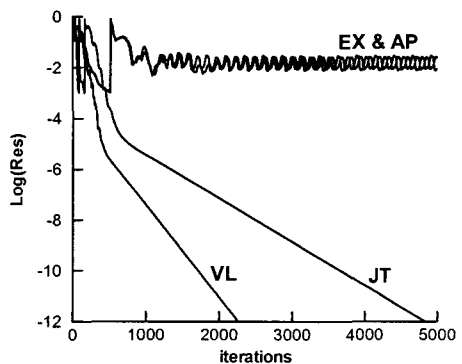
* indicates that the procedure did not yield a converged solution at any value of CFL number.

만큼 감소시키는데 필요한 반복 계산 회수를 보이고 있다. 여기서 허용 최대 CFL 수 이상의 값이 사용되면 잔류치가 매우 높은 값에서 진동 또는 발산을 하게 된다. CFL 수의 최대값으로는 10^7 까지만 수행하였다.

강직성이 낮은 작은 두께의 범프에 대해서는 모든 내재적 연산자에 대해서 매우 높은 CFL 수에 대해서도 안정하다. 낮은 강직도를 갖는 유동에 대해서 EX와 AP 내재적 연산자가 높은 안정성을 갖는 이유는 선형해석에서 예측한 것처럼 높은 CFL 수에서 불안정성이 존재하지만 이러한 불안정성이 낮은 강직도에 의해 전체 기법의 불안정성으로는 진화되지 못하기 때문인 것으로 판단된다. 하지만 유동의 강직성이 증가함에 따라 선형 해석에서 예측한 것처럼 외재적 연산자와 소산 레벨이 같은 EX와 AP의 내재적 연산자는 급격히 허용 최대 CFL 수가 감소하게 된다. 이에 반해 외재적 연산자 보다 높은 소산 레벨을 갖는 VL과 JT 내재적 연산자는 훨씬 큰 허용 CFL 수를 갖는다. 특히 JT 내재적 연산자는 매우 큰 소산에 의해서 유동의 강직성의 증가에 거의 영향을 받지 않고 항상 매우 높은 CFL 수에서도 안정한 것을 볼 수 있다. 하지만 선형 해석에서 보았듯이 잔류항보다 소산이 크면 안정성은 증가하지만, 모든 공간주파수에 대한 amplification factor의 값이 1로 수렴하여 가기 때문에 매우 낮은 수렴성을 보일 수 있다.



(a) 5% thickness



(b) 20% thickness

Fig. 9 Convergence histories for various implicit operators with Roe explicit operator.

Fig. 9의 (a)와 (b)는 Table 1에 포함된 5%와 20% 범프 두께에 대해서 내재적 연산자에 따른 수렴성을 각각 보이고 있다. 각각의 결과에서는 가장 좋은 수렴성을 얻을 수 있는 CFL 수가 사용되었다. 이 값은 허용 최대 CFL 수와는 다르지만, 매우 근접한 값에서 항상 최대 수렴성을 보인다. 5% 범프 두께에 대한 Fig. 9(a)에서 볼 수 있듯이, 범프의 두께가 작은 낮은 강직성을 갖는 유동에 대해서는 외재적 연산자와 소산 레벨이 같은 EX와 AP의 내재적 연산자에 대해서도 좋은 수렴성을 보인다. 이는 낮은 강직성을 갖는 유동에 대해서는 모든 내재적 연산자에 대해서 높은 CFL 수를 사용할 수 있기 때문이다. 또한 JT 내재적 연산자에 대해서는 다른 연산자에 비해 매우 낮은 수렴성을 보이는데, 이는 외재적 연산자보다 과도한 소산 레벨에 의해 안정성은 증가하였으나 수렴성이 저하된 경우로 판단할 수 있다. 강직성이 증가함

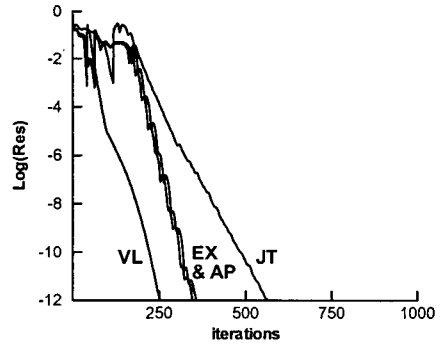
Table 2 Allowable maximum CFL number and time steps required to achieve 10th order residual reduction for various implicit operators with van Leer explicit operator.

| implicit operator | | bump thickness | | | |
|-------------------|-------|----------------|--------|--------|--------|
| | | 2.5% | 5% | 10% | 20% |
| EX | CFL | 10^2 | 10^2 | 10^1 | * |
| | steps | 330 | 310 | 1750 | failed |
| AP | CFL | 10^2 | 10^2 | 10^1 | * |
| | steps | 350 | 320 | 1800 | failed |
| VL | CFL | 10^7 | 10^7 | 10^3 | 10^1 |
| | steps | 230 | 220 | 220 | 4920 |
| JT | CFL | 10^7 | 10^7 | 10^7 | 10^7 |
| | steps | 2550 | 500 | 460 | 1050 |

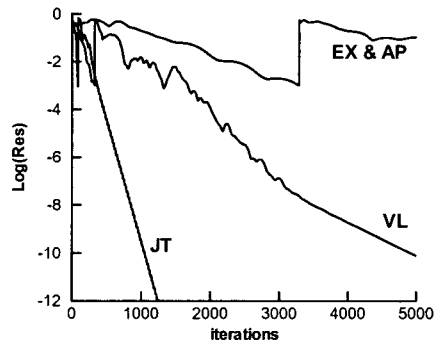
* indicates that the procedure did not yield a converged solution at any value of CFL number.

에 따라 20% 범프 두께에 대한 Fig. 9(b)에서 볼 수 있듯이, EX와 AP의 내재적 연산자의 수렴성은 급격히 저하된다. 특히 20% 범프에 대해서는 1 보다 작은 CFL수의 값에서도 발산하며, 이는 외재적 기법 (explicit scheme) 보다 더욱 심한 CFL 수 제약 조건이다. 하지만 내재적 연산자의 소산 레벨이 외재적 연산자의 소산 레벨 보다 높은 VL과 JT 내재적 연산자에 대해서는 높은 강직성을 갖는 유동에 대해서 EX와 AP의 내재적 연산자보다 훨씬 좋은 수렴성을 보인다. 이는 VL과 JT 연산자에 대해서는 높은 CFL 수를 불안정성 없이 사용할 수 있기 때문이다. 또한 VL 내재적 연산자는 모든 경우에 대해서 JT 연산자 보다 2배 정도 이상의 좋은 수렴성을 보이고 있다. 하지만 최적의 수렴성을 얻기 위해서는 유동의 강직성에 따라 CFL 수를 적절히 조절해야 하는 단점을 갖고 있다. 이는 VL 내재적 연산자가 EX와 AP 내재적 연산자 보다는 안정하지만 JT 내재적 연산자 보다는 불안정하다는 것을 의미한다.

Table 2에서는 외재적 연산자로 van Leer의 FVS 기법을 사용한 경우에 대해서 허용 최대 CFL 수와 연속방정식의 잔류치를 10개의 크기 만큼 감소시키는 데 필요한 반복 계산 회수를 보이고 있다. 선형 해석에서 보인 것처럼 외재적 연산자 보다 낮은 소산 레벨을 갖는 EX와 AP 내재적 연산자는 강직성이 높은 유동 뿐만 아니라 낮은 유동에 대해서도 불안정성이



(a) 5% thickness



(b) 20% thickness

Fig. 10 Convergence histories for various implicit operators with van Leer explicit operator.

강하여, VL과 JT 내재적 연산자에 비해 매우 낮은 허용 최대 CFL 수를 갖는다. VL 내재적 연산자의 거동은 외재적 연산자로 Roe 기법을 사용하는 EX와 AP의 내재적 연산자의 거동과 매우 흡사하다. 강직도가 낮은 유동에 대해서는 안정적이지만 강직도가 증가함에 급격하게 허용 최대 CFL 수가 감소하게 된다. 따라서 선형 해석에서 보인 것처럼 내재적 연산자의 거동은 외재적 연산자의 소산 레벨에 따라서 상대적으로 결정되는 것을 알 수 있다. JT 내재적 연산자에 대해서는 외재적 연산자 보다 큰 소산 레벨에 의해서 유동의 강직성의 증가에 거의 영향을 받지 않고 항상 매우 높은 CFL 수에서도 안정한 것을 볼 수 있다.

Fig. 10의 (a)와 (b)는 Table 2에 포함된 5%와 20% 범프 두께에 대한 수렴성을 각각 보이고 있다. Fig. 10(a)에서 볼 수 있듯이 범프의 두께가 작은 낮은 강직성을 갖는 유동에 대해서는 외재적 연산자와

같은 소산 레벨을 갖는 내재적 연산자 뿐만 아니라 더 작은 소산 레벨을 갖는 EX와 AP의 내재적 연산자에 대해서도 좋은 수렴성을 보인다. 또한 외재적 연산자 보다 소산 레벨이 큰 JT 내재적 연산자가 가장 낮은 수렴성을 보인다. 하지만 강직성이 증가함에 따라 EX, AP, VL의 내재적 연산자는 수렴성이 급격하게 감소된다. 이는 Table 2에서 볼 수 있듯이 허용 CFL 수가 매우 낮기 때문이다. 반면에 JT 내재적 연산자는 매우 좋은 수렴성을 보이고 있다. 이러한 해석을 통해서 유동의 강직성이 높은 복잡한 유동 해석을 위해서는 내재적 연산자의 소산 레벨이 외재적 연산자의 소산 레벨보다 항상 커야함을 알 수 있다.

6. 결 론

LU-SGS 방법에 적용된 내재적 연산자의 거동에 대해서 폰 노이만 선형 해석 방법을 이용하여 안정성과 수렴성 거동을 알아보았다. 내재적 연산자의 거동은 홀로 좋은 수렴성과 강건성을 갖는 기법은 존재하지 않으며, 외재적 연산자의 소산 레벨에 따라서 상대적으로 결정되는 것을 보였다. 높은 시간 간격에서 안정성과 수렴성을 유지하기 위해서는 외재적 연산자의 소산 레벨보다 높은 내재적 연산자의 사용이 필수적이다. 하지만 내재적 연산자의 과도한 소산은 안정적이지만 매우 낮은 수렴성을 보일 수 있다.

유동 해석 결과 강직성이 낮은 단순한 유동에 대해서는 선형 해석에서 예측된 불안정성이 해석 코드를 불안정화하진 않는다. 하지만 강직성이 높은 유동을 계산하기 위해서는 외재적 연산자와 같거나 낮은 소산 레벨을 갖는 내재적 연산자는 심각한 안정성 및 수렴성 저하를 겪으며, 외재적 연산자보다 높은 소산 레벨을 갖는 내재적 연산자가 사용되어야 함을 볼 수 있다. 이러한 경향은 정렬 격자계에 비해 상대적으로 복잡한 유동 해석을 많이 수행하는 비정렬 격자계에는 매우 중요하다.

후기

본 연구는 국방과학연구소 수중운동체 기술 특화 연구센터의 '전산유체역학을 이용한 수중운동체의 선

체-제어판-추진기 상호작용연구(SM-21)' 과제의 지원에 의한 결과의 일부이며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

[1]Choi, Y.-H. and Merkle, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *J. Computational Physics*, Vol.105, (1993), p.207-223.

[2]Pulliam, T.H., "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," *AIAA J.*, Vol.24, No.12, (1986), pp.1931-1940.

[3]Jameson, A. and Turkel, E., "Implicit Schemes and LU Decompositions," *Mathematics of Computation*, Vol.156, (1981), p.385-397.

[4]Liou, M.-S. and van Leer, B., "Choice of Implicit and Explicit Operators for the Upwind Differencing Method," *AIAA Paper* 88-0624, (1988).

[5]Amaladas, J.R. and Kamath, H., "Implicit and Multigrid Procedures for Steady-State Computations with Upwind Algorithms," *Computers and Fluids*, Vol.28, (1999), p.187-212.

[6]Wright, M.J., Candler, G.V., and Prampolini, M., "Data-Parallel Lower-Upper Relaxation Method for the Navier-Stokes Equations," *AIAA J.*, Vol.34, No.7, (1996), p.1371-1377.

[7]Oh, W.S., Kim, J.S., and Kwon, O.J., "Numerical Simulation of Two-Dimensional Blade-Vortex Interactions Using Unstructured Adaptive Meshes," *AIAA J.*, Vol.40, No.2, (2002), p.474-480.

[8]Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *J. Computational Physics*, Vol.43, (1981), p.357-372.

[9]Van Leer, B., "Flux-Vector Splitting for the Euler Equations," *Lecture Notes in Physics*, Vol.170, (1982), p.507-512.

[10]김주성, 권오준, "비정렬 격자계에서 강건하고 효율적인 LU-SGS 기법 개발: Part II - 효율적인 적용," *한국전산유체공학회지*, 제9권, 제3호.

- (2004).
- [11] Van Leer, B., Thomas, J.L., Roe, P.L., and Newsome, R.W., "A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 87-1104, (1987).
- [12] Toro, E.F., "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics," Springer, 2nd ed., (1999).
- [13] Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows," John Wiley & Sons, (1988).
- [14] 김주성, 권오준, "비정렬 격자계에서 LU Implicit Scheme의 수렴성 및 안정성 해석: Part I - 오일러 방정식," *항공우주학회지* 게재 심사중.