

# 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 유한체 내에 존재하는 임의의 삼차원 균열의 해석

박재학<sup>†</sup> · 김태순<sup>\*</sup>

충북대학교 안전공학과 · <sup>\*</sup>한국전력연구원  
(2003. 9. 19. 접수 / 2003. 12. 15. 채택)

## Analysis of Arbitrary Three Dimensional Cracks in the Finite Body Using the Symmetric Galerkin Boundary Element Method

Jai Hak Park<sup>†</sup> · Tae Soon Kim<sup>\*</sup>

Department of Safety Engineering, Chungbuk National University  
<sup>\*</sup>Korea Electric Power Research Institute  
(Received September 19, 2003 / Accepted December 15, 2003)

**Abstract :** Many analysis methods, including finite element method, have been suggested and used for assessing the integrity of cracked structures. In the paper, in order to analyze arbitrary three dimensional cracks, the finite element alternating method is extended. The crack is modeled by the symmetric Galerkin boundary element method as a distribution of displacement discontinuities, which is formulated as singularity-reduced integral equations. And the finite element method is used to calculate the stress values for the uncracked body only. Applied the proposed method to several example problems for planner cracks in finite bodies, the accuracy and efficiency of the method were demonstrated.

**Key Words :** symmetric Galerkin method, three dimensional crack, finite element alternating method, stress intensity factor

### 1. 서 론

균열을 포함하고 있는 설비의 안전성 평가나 손상허용 분석을 위한 파괴매개변수로 응력강도계수(stress intensity factor)가 가장 많이 사용되고 있음은 주지의 사실이다. 따라서, 각종 설비에서 발견되는 균열의 대부분이 임의의 형상을 갖는 삼차원 균열인 점을 고려하면, 설비의 안전성 평가를 위하여 삼차원 균열에서의 응력강도계수를 정확히 구하는 문제는 많은 사람들의 관심의 대상이 되어왔다. 현재 이 삼차원 균열에 대한 연구는 타원형 균열과 같은 일부 비교적 간단한 형태의 균열에 대해서는 많은 결과가 발표된 바 있다.

그러나 실제 구조물이나 설비에 존재하는 균열의

형상은 보다 일반적인 형태를 띠고 있으므로, 이러한 일반적인 형태의 삼차원 균열에 대한 해석의 필요성이 계속 제기되어 왔고, 몇 명의 연구자에 의하여 해석 방법이 제안되었다. 1982년 Wiles와 Curran<sup>1)</sup>은 변위의 불연속(displacement discontinuity)을 이용하여 공동(cavity)과 균열문제를 해석하였고, Murakami 등<sup>2)</sup>은 체적력법(body force method)을 사용하여 임의 형태의 표면균열들을 해석하였다.

이러한 균열의 해석은 각 균열요소에 대한 적분방정식의 커널이 갖는 특이성으로 인해 적분을 수행하는 것이 쉽지 않게 된다. Forth와 Keat<sup>3)</sup>은 이러한 특이성을 제거할 수 있는 방법을 제안하여 삼차원 균열을 해석할 수 있는 경계적분법(boundary integral method)을 제시하였다. 최근 Li와 Mear 등<sup>4,5)</sup>은 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식을 제시하고 여러 형태의 삼차원 균열에 대하여 정확한 응력강도계수를 얻을 수 있

<sup>†</sup>To whom correspondence should be addressed.  
jhpark@cbucc.chungbuk.ac.kr

다고 하였다.

이와 아울러 유한요소 교호법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 삼차원 균열을 해석하려는 시도도 진행되었는데, Nishioka와 Atluri<sup>6)</sup>에 의하여 타원형의 표면균열 또는 모서리 균열 등을 해석하는 방법이 제안되었다. 2000년 박재학 등<sup>7)</sup>은 Forth와 Keat<sup>3)</sup>의 해를 유한요소 교호법에 적용하여 일반적인 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 하지만 이러한 적용방법은 일부 표면 균열의 경우에 해의 정확성이 균열메쉬에 따라 변하는 경향을 보였다.

본 논문에서는 Li와 Mear 등<sup>4,5)</sup>이 제시한 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식의 균열해를 유한요소 교호법에 적용하여 임의의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하려고 한다.

## 2. 수식화

### 2.1. 지배방정식

무한 물체 내에 존재하는 임의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 Fig. 1에서와 같이 존재한다고 하자. 그리고 균열면 상에는 임의의 표면력(traction)이 작용한다고 하자. 이때 균열은 두 개의 균열면  $S_+$ 와  $S_-$ 에서 변위 불연속의 연속 분포로 나타낼 수 있다.

Li와 Mear 등<sup>4,5)</sup>은 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weakly singular)을 갖는 경계적분 방정식이 만족됨을 보였다.

$$\begin{aligned}
 & - \int_S \int_S D_\alpha u_i^*(z) C_{\alpha\beta\gamma}(\xi - z) D_\beta u_j(\xi) dS(\xi) dS(z) \\
 & = \int_S u_i^*(z) t_j dS(z) \quad (1)
 \end{aligned}$$

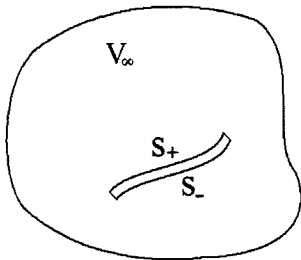


Fig. 1. Crack as displacement discontinuity.

여기서  $u_i$ 는 균열면에서의 변위의 불연속,  $u_i^*$ 는 시험함수(test function),  $t_i$ 는 균열면  $S$ 에 작용되는 표면력이다. 또한 감소된 특이성을 갖는 커널  $C_{\alpha\beta\gamma}$ 는 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\gamma}(\xi) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} [(1-\nu)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} \\
 & + 2\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \delta_{\alpha\beta}]. \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서  $\delta$ 는 힘의 성분, 하중점으로부터의 위치 벡터  $\xi = \xi - z$ ,  $r^2(\xi) = \xi_i \xi_i$ ,  $\mu$ 는 전단탄성계수,  $\nu$ 는 푸아송비이고,  $D_\alpha$ 는 접선 연산자(tangential operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$D_\alpha = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_2} - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_1} \right) \quad (3)$$

여기서  $\eta_1, \eta_2$ 는 균열면 상에서의 좌표이고,  $J = |s \times t|$ ,  $s$ 는  $\eta_1$ 방향의 접선벡터,  $t$ 는  $\eta_2$  방향의 접선벡터이다.

### 2.2. 균열요소에 대한 이중적분 방정식

균열면을 몇 개의 경계요소로 나누고 요소 내에서의 변위 및 표면력은 다음 식과 같이 절점들에서의 값과 형상함수로 나타낼 수 있다고 한다.

$$u_i = N_a u_{ia}, \quad f_i = N_a f_{ia}. \quad (4)$$

여기서 아래첨자  $i$ 와  $a$ 는 각각 전체좌표계와 요소 내 절점번호를 나타내고,  $u_{ia}$ 와  $f_{ia}$ 는 각각 이들 절점에서의 변위와 표면력 값이다. 시험함수로 형상함수를 사용하고 식 (4)를 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 이중적분의 형태로 된다.

$$\begin{aligned}
 & - \int_S \int_S C_{\alpha\beta\gamma} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z) u_{ib} \\
 & = \int_S N_a N_q(z) dS(z) t_{iq} \quad (5)
 \end{aligned}$$

식 (5)를 사용하여 각 균열 절점에서의 변위의 불연속을 구한 후, 이들 값과 응력강도계수의 관계로부터 각 모드에서의 응력강도계수를 계산한다.

식 (5)의 좌변에서 볼 수 있는 바와 같이 식 (5)의 풀이를 위해서는 이중적분을 계산하여야 한다. 적분은 각 균열요소에 대하여 행해지므로,  $S_m$  및  $S_n$ 을 임

의의 두 균열요소라고 한다면,  $S_m$ 에 대하여 적분한 후 다시  $S_n$ 에 대하여 적분할 필요가 있다.

이때  $S_m$ 과  $S_n$ 이 서로 떨어져 있는 두 요소이면 일반적인 Gauss 타입의 적분공식을 사용함으로써 수치적분을 행할 수가 있다. 그러나 Fig. 2의 (a)에서와 같이  $S_m$ 과  $S_n$ 이 서로 동일한 요소이거나, (b)와 같이 서로 요소의 에지를 맞대고 있거나, (c)와 같이 요소의 모서리를 맞대고 있는 경우는 피적분함수에 특이성이 나타나므로 적분에 어려움이 있다. 이러한 적분의 어려움은 적절한 좌표변환을 통하여 해결할 수 있음이 최근 밝혀졌다<sup>9,11)</sup>.

### 3. 유한요소교호법

일반적으로 유한요소법은 다양한 경우의 경계조건을 수용할 수 있으므로 탄성 또는 탄소성 문제를 해석하는 데 널리 사용되고 있고, 대칭 Galerkin 경계요소법은 무한 물체 내에 존재하는 임의 형태의 삼차원 균열에 대한 모델링에 아주 적합한 방법이다. 따라서 유한요소 교호법에서는 균열에 대한 모델링에는 대칭 Galerkin 경계요소법을, 균열을 포함하지 않는 유한요소모델에는 유한요소법을 사용하여 해를 구하게 된다<sup>9)</sup>.

결국 두 모델을 Fig. 3에서와 같이 중첩함으로써 균열을 포함한 유한물체에 대한 해를 구하는 방법으로 다음과 같은 단계로 해석이 이루어진다;

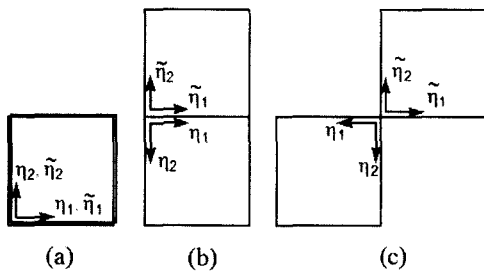


Fig. 2. Singular cases for boundary element integration

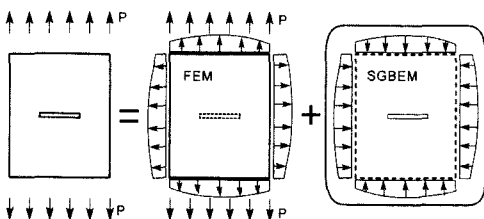


Fig. 3. Superposition principle of FEAM

(1) 우선 주어진 문제에 대하여 균열이 포함되지 않은 FEM 모델을 만들고 주어진 외부하중을 가하여 균열이 존재하는 위치에서의 응력을 구한다.

(2) 다음으로 균열면에서의 표면력을 없애기 위하여 단계 (1)에서 구해진 표면력의 역이 가해지는 균열에 대한 문제를 대칭 Galerkin 경계요소법을 사용하여 해석한다.

(3) 단계 (1)과 (2)에서 구해진 응력장 또는 변위장을 더할 경우에 균열면에서의 경계조건은 만족되지만 균열면을 제외한 경계면에서의 경계조건은 만족되지 않으므로 경계면에서의 응력과 경계면 상의 각 절점에 대한 잔류하중을 계산한다.

(4) 다시 단계 (1)에서 고려하였던 FEM모델에 단계 (3)에서 구한 잔류하중의 역을 가하여 FEM해석을 행한다.

(5) FEM해석을 통해 얻어진 응력에 대응하는 균열 위치에서의 응력을 구한다.

(6) 균열 위치에서의 응력의 크기가 아주 작은 경우는 반복계산을 중단하고, 그렇지 않으면 단계 (2)로 다시 간다.

(7) 각 단계에서의 응력강도계수, 변위, 응력 등을 더한 값이 해가 된다.

### 4. 해석결과 및 고찰

#### 4.1. 해석 개요

대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 유한요소 교호법의 정확성과 효율성을 검토하기 위하여 몇 가지 문제를 해석하였다. 우선 Fig. 4의 (a)와 같은 반원형 표면균열이 존재할 때의 응력강도계수를 기존 해와 비교하여 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 균열 요소와 유한요소모델의 자유표면이 만나는 점에서의 응력강도계수가 작아지는 현상을 나타내고 있지만, 그 외 균열선단에서는 기존의 해와 잘 일치함을 알 수 있다. 표면에서 응력강도계수가 작아지는 현상은 Li와 Mear<sup>4,5)</sup> 등 다른 논문의 해석에서도 나타나는 것으로, 이러한 현상에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다.

또한, 이 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 균열 요소의 수가 작은 경우에도 해석결과는 그다지 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 그러나 타원형 균열 요소의 경우에는 균열요소의 형태에 따라 해석결과가 조금씩 달라지는 것을 알 수 있었다. 즉, Fig. 4의 경우에서와 같이 균열요소의 모서리가 균열의 중심에

집중된 경우보다는 균열선단에 수직하게 형성되었을 경우에 더 정확한 결과를 얻었다.

### 4.2. 해석 결과

본 논문에서 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 유한요소 교호법의 유용성을 검증하기 위하여 기존의 해석결과와 비교할 수 있는 문제들을 예로 들었다. 그 첫 번째로 우선, 유한체에 자유표면과 인접하여 존재하는 반타원 표면균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 두께가  $h$ 인 유한체에 존재하는 타원의 장축의 길이는  $2a$  단축의 길이는  $2b$ 라 한다. 이때  $b$ 는 표면에서부터의 균열의 깊이와 같으며, 장축의 길이와 단축의 길이의 비는 0.6으로 하였다.

해석을 위하여 사용된 균열요소는 Fig. 4의 (b)와 같이 균열요소의 모서리가 균열의 중심에 집중된 형태이다. 해석 대상 균열의 형태는 반타원형이지만 FEAM의 해석해에서 고려하는 균열의 형태는 꼭 반타원일 필요는 없다. 오히려 반타원형의 균열을 사용할 경우 균열선단이 물체의 외부경계에 놓이게 되므로 균열선단에서의 높은 응력값을 갖게되는 결과가 초래된다. 그리고 이러한 특성은 외부경계에서의 잔류하중을 제거하는 반복계산에서 해의 수렴을 나쁘게 한다.

따라서, 본 해석에서는 Fig. 4의 (b)에서와 같이 타원형 전체에 대한 해석해를 사용하였다. 이 균열요소 중 타원형의 반은 Fig. 6의 균열모양에서와 같이 고려하는 물체의 내부에 놓이게 되고 나머지 반은 물체의 외부에 놓이게 된다. 물체의 외부에 놓이게 되는 균열면에서의 트래션은 항상 0이다.

반타원 표면균열의 해를 두께에 대한 균열깊이의 비를 나타내는  $b/h$ 에 따른 정규화된 최대 응력강도계수로 표시하여 그 변화를 도시하면 Fig. 6과 같다. 비교를 위하여 Smith와 Sorensen의 결과, Isida 등의 결과를 함께 도시하였고<sup>12,13</sup>, 박재학 등<sup>7</sup>에 의한 기존의 또 다른 유한요소교호법으로 구한 결과도 같이 나타냈다. 본 논문에서 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 방법의 결과가 Smith와 Sorensen의 결과보다는 크고, Isida 등의 결과나 박재학 등<sup>7</sup>의 결과보다는 작은 값을 보이고 있다.

다음으로 유한체 내에 두께방향으로 중심에 존재하는 타원형 균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 두께가  $2h$ 인 유한체에 존재하는 타원의 장축의 길이와 단축의 길이는 각각  $2a$ ,  $2b$ 이고, 장축의

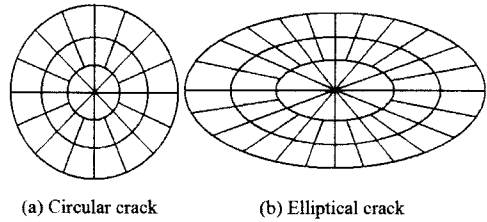


Fig. 4. Mesh for surface cracks

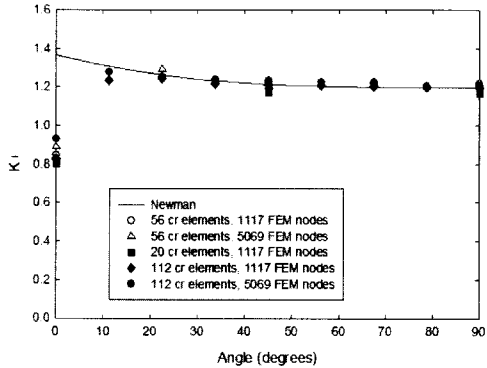


Fig. 5. Stress intensity factors in a circular surface crack

길이와 단축의 길이의 비는 0.5로 하였다. 해석을 위하여 사용된 균열요소는 반타원형 표면균열의 경우와 마찬가지로 Fig. 4 (b)와 같다.

타원형 중심균열의 해를  $b/h$ 에 따른 정규화된 최대 응력강도계수의 변화로 도시하면 Fig. 7과 같다. 이 결과와 Isida 등<sup>13</sup>의 결과와 박재학 등<sup>7</sup>에 의한 결과와 비교하여 나타냈다.  $b/h$ 의 값이 커지는 부분을 제외하면 반타원 표면균열의 해에서와 같이 본 논문에서 제안한 방법의 결과가 기존의 결과들의 중간에 놓여 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

다음으로 직사각형 표면균열에 대한 해석을 행하여 기존 해석과 비교하였다. 균열의 형태와 해석결과는 Fig. 8에 도시되어 있듯이 두께가  $h$ 인 유한체의 표면에 인접하여 존재하는 직사각형 균열의 장변의 길이와 단변의 길이는 각각  $2a$ ,  $2b$ 이고, 장변의 길이와 단변의 길이의 비는 0.5로 하였다. 직사각형 표면균열의 해석에서도 반타원 표면균열의 경우처럼 전체 균열요소의 1/2만 물체의 내부에 놓이게 고려하였다. 해석결과는 균열의 중심에서  $x$ 방향으로 증가 또는 감소하는 비를 나타내는  $(x+a)/a$ 에 대한 정규화된 응력강도계수로 표시하여 Fig. 8에 나타냈다. 기존의 해석 결과들<sup>7,13</sup>과 유사한 값을 얻어졌음을 알 수 있다.

마지막으로 반무한체 내의 중심에 존재하는 직사각형 균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 자유표면으로부터 두께방향으로 거리가  $h$ 인 위치에 존재하는 직사각형 균열의 장변의 길이와 단변의 길이의 비는 0.5로 하였다. 해석에 사용된 균열의 형태는 Fig. 9에 간략하게 도시되어 있다.

직사각형 중심균열의 해를  $b/h$ 에 따른 정규화된 최대 응력강도계수의 변화로 도시하면 Fig. 9와 같다. 이 결과와 Isida 등<sup>13)</sup>의 결과와 비교하여 나타났다. 외부 물체의 두께에 비해 균열이 작은 경우, 즉  $b/h$ 의 값이 작은 부분에서는 두 결과의 차이가 거의 없지만  $b/h$ 의 값이 커지는 부분에서 Isida 등의 결과보다 낮게 나타났다. 이것은 일반적으로 유한요소법을 적용한 해석방법들이  $b/h$ 의 값이 커지는 부분에서는 해가 민감해지는 경향을 보이는 것과 무관하지 않은 것으로 판단되며, 따라서 추가적인 해석상의 검토가 요구되는 부분이다.

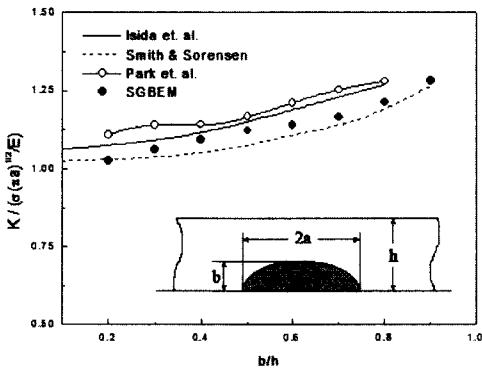


Fig. 6. Variation of normalized stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks

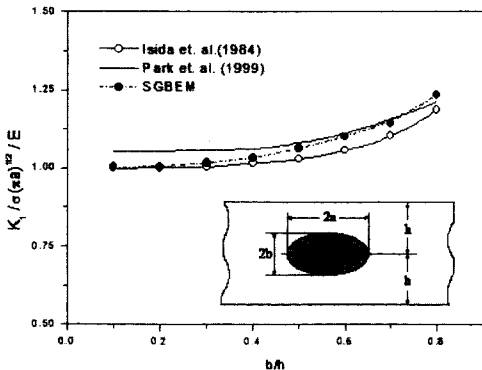


Fig. 7. Variation of normalized stress intensity factors for elliptical center cracks

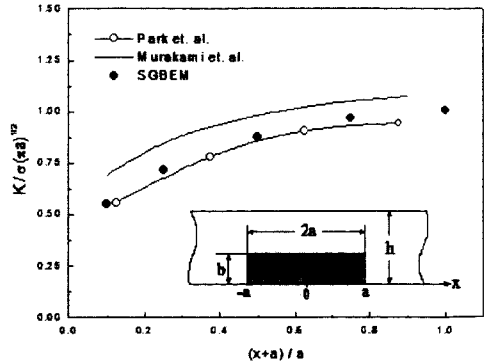


Fig. 8. Variation of normalized stress intensity factors for a rectangle surface crack

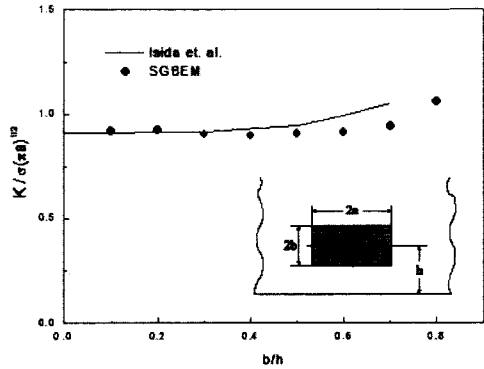


Fig. 9. Variation of normalized stress intensity factors for a rectangle crack in a semi-infinite body.

### 5. 결론

대칭 Galerkin 경계요소법과 유한요소법의 장점을 이용한 유한요소 교호법을 통해 구조물이나 설비에서 나타나는 일반적인 형태의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제안하였다. 이 두 가지의 방법은 서로 완전하게 독립적이므로 균열의 해석에 있어서 시간적 경제적으로 매우 유리한 방법임을 알 수 있다.

제안된 방법의 효율성과 유용성을 검토하기 위하여 균열을 포함한 유한 또는 반무한체의 형상과 균열 형상을 변화시켜가며 몇 가지 문제를 해석하여 기존의 해석결과와 비교하였다. 이를 통하여 제안된 균열해석 방법이 구조물이나 설비 내에 존재하는 균열을 해석하는데 효율적이고 유용한 방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있었다.

감사의 글 : 본 연구는 한국과학재단(KOSEF) 산

하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

### 참고문헌

- 1) T. D. Wiles, and J. H. Curran, "A general 3-D Displacement Discontinuity Method", Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, ed. 2 Balkema, A. A., Rotterdam, The Netherlands, pp. 103~111, 1982.
- 2) Y. Murakami, "Analysis of Stress Intensity Factors of Mode I, II and III for Inclined Surface Cracks of Arbitrary Shape", Engng Frac. Mech., Vol. 22, pp. 101~114, 1985.
- 3) S. C. Forth and W. D. Keat, "Three-dimensional Nonplanar Fracture Model Using the Surface Integral Method", Int. J. Fracture, Vol. 77, pp. 243~262, 1996.
- 4) S. Li and M. E. Mear, "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media", Int. J. Fract., Vol. 93, pp. 87~114, 1998.
- 5) S. Li, M. E. Mear and L. Xiao, "Symmetric Weak-form Integral Equation Method for Three Dimensional Linear Elastic Media", Com. Methods Appl. Mech. Engng, Vol. 151, pp. 435~459, 1998.
- 6) T. Nishioka and S. N. Atluri, "Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks, Subjected to Arbitrary Loadings", Engng Frac. Mech., Vol. 17, pp. 247~268, 1983.
- 7) 박재학, 김태순, S. N. Atluri, "유한요소 교호법을 이용한 모드 I 하중 하의 삼차원 균열의 해석", 대한기계학회 논문집 (A), 제24권, 제4호, pp. 982~990, 2000.
- 8) G. P. Nikishkov, J. H. Park and S. N. Atluri, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components", Computer Modeling in Engng & Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 401~422, 2001.
- 9) H. Andra, "Integration of Singular Integrals for the Galerkin-type Boundary Element Method in 3D Elasticity", Com. Methods Appl. Mech. Engng, Vol. 157, pp. 239~249, 1998.
- 10) S. Erichsen and S. A. Sauter, "Efficient Automatic Quadrature in 3-d Galerkin BEM", Com. Methods Appl. Mech. Engng, Vol. 157, pp. 215~224, 1998.
- 11) A. Frangi, G. Novati, R. Springhetti and M. Rovizzi, "Fracture Mechanics in 3D by the Symmetric Galerkin Boundary Element Method", VIII Conf. On Numerical Methods in Continuum Mechanics, Liptovsky Jan, Slovak Republik, 2000.
- 12) M. Isida, H. Noguchi and T. Yoshida, "Tension and Bending of Finite Thickness Plates with a Semi-elliptical Surface Crack", Int. J. Fracture, Vol. 26, pp. 157~188, 1984.
- 13) Y. Murakami, Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, pp. 811-865, 1987.