

부분분포하중이 평면 포물선아치의 동적응답에 미치는 영향

Effects of Partially Distributed Loads on Dynamic Response of Plane Parabolic Arch

조진구* · 박근수**

Cho, Jin Goo · Park, Keun Soo

Abstract

This study aims to investigate the effects of partially distributed loads on the dynamic behaviour of steel parabolic arches by using the elasto-plastic finite element model based on the Von Mises yield criteria and the Prandtl-Reuss flow rule.

For this purpose, the vertical and the radial load conditions were considered as a distributed loading and the loading range is varied from 40% to 100% of arch span. Normal arch and arch with initial deflection were studied. The initial deflection of arch was assumed by the sinusoidal profile of $w_i = w_o \sin(n\pi x/L)$. Several numerical examples were tested considering symmetric initial deflection when the maximum initial deflection at the apex is fixed as $L/1000$. The analysis results showed that the maximum deflection at the apex of arch was occurred when 70% of arch span was loaded. The maximum deflection at the quarter point of arch span was occurred when 50% of arch span was loaded. It is known that the optimal rise to span ratio between 0.2 and 0.3 when the vertical or radial distributed load is applied. It is verified that the influence of initial deflection of radial load case is more serious than that of vertical load case.

Keywords : parabolic arches, elasto-plastic model, initial deflection, partially distributed load, Prandtl-Reuss flow rule

I. 서론

아치는 주로 원호, 포물선 등의 곡선형상을 갖는 구조물로서 직선부재로 구성되는 다른 구조형식과는 거동이 매우 상이하고 따라서 하중을 지지하는 방식도 매우 특이하다.¹⁾ 아치는 연직으로 작용하는 외력에 의하여 양단의 지점에서 수평반력이 발생하고 이 수평반력은 임의단면에서의 휨모멘트를 감소시키며 부재단면은 주로 축방향 압축력을 지지하게

* 전남대학교 농업생명과학대학, 농업과학기술연구원
** 충남대학교 대학원, 금광기업(주)
* Corresponding author. Tel.: +82-62-530-2151
Fax: +82-62-530-2159
E-mail address: chojg@chonnam.ac.kr

되므로 긴 지간의 구조물 건설에 사용될 수 있다. 특히 아치는 곡선형태이므로 구조적으로 안정되고 미관이 아름답기 때문에 예로부터 온실 교량 등 각종 구조물에 널리 사용된 구조형식이다.^{3),7)}

아치구조물의 경우 과거에는 단면은 크고 지간이 짧은 경우가 대부분이며 하중이 과대하지 않았기 때문에 정적 해석만으로도 안전한 설계가 가능하였다. 그러나 최근에는 강재의 압연기술의 발전으로 강구조 부재는 경량화 및 고강도화 되었으며^{1),2)} 설계기술이 발달함에 따라 단면은 작아지는 반면 지간은 더욱 길어지는 등 대규모화하는 추세에 있는데⁷⁾ 반해 충격, 지진 등 예기치 않은 동하중을 받는 경우가 많아지는 등 위험성은 오히려 커지고 있다.

구조물은 어떠한 경우에도 안전성이 확보되어야 하고 이를 위해서는 정하중은 물론 동하중에 대해서도 안전성이 확보되어야 한다. 구조물의 동적응답에 관한 연구는 항공기 설계에서 널리 사용되어 왔는데 최근 빈번한 지진의 발생으로 일반 구조물의 설계에서도 이에 대한 관심이 커지고 있다. 이와 같은 경향으로 많은 연구가들에 의하여 각종 구조형식을 대상으로 동적해석에 대한 연구가 진행되어 왔으며 아치에 대해서도 비선형성을 고려한 동적해석 연구가 수행되고 있다. 필자들^{3),4),5)}은 형상 불완전을 고려한 원호아치 구조물의 비선형 정적 및 동적거동 특성을 보고한바 있으며, 또 전 지간에 분포된 하중을 받는 포물선아치의 동적거동 특성을 보고한바 있다. 그러나 지금까지 이루어진 연구는 대부분 원호아치를 대상으로 아치에 작용하는 동하중이 아치의 전지간에 분포되거나 자유진동인 경우에 관한 것들이 대부분 이었다. 그러나 실제로는 포물선아치가 많이 건설되고 또 아치에 작용하는 하중은 교통하중과 같이 아치지간에 부분적으로 분포될 수 있으며 그렇게 되는 경우 아치의 동적응답은 새로운 특성을 나타낼 수 있을 것이다.

따라서 본 연구에서는 2차원 평면 해석방법을 적용하고 탄-소성 모델을 사용한 비선형유한요소 해석을 통하여 부분적으로 분포된 하중을 받는 평면

포물선아치의 동적응답특성을 파악하고자 한다. 이를 위하여 하중은 연직 및 방사하중을 고려하였으며 하중의 분포범위는 아치지간의 40~100%를 고려하였다.

II. 유한요소 해석

부분분포 하중을 받는 평면 포물선아치의 동적 해석방법으로는 유한요소법을 사용하였으며 이때 사용된 요소는 8-절점 등매개 변수 요소이다. 또한 유한요소 정식화 과정에서는 Von Mises의 항복 기준과 Prandtl-Reuss의 흐름 법칙에 근거한 탄-소성 모델이 사용되었다.

1. 탄-소성 해석

가. 탄-소성 구성 방정식

포물선아치의 유한요소해석에서 사용된 탄-소성 모델의 구성 방정식은 다음과 같다.^{3),4),5)}

재료의 소성거동은 비선형 탄성거동과는 달리 응력-변형률 관계가 유일하지 않은 특징이 있으며 재료의 항복은 현재의 응력이 일정한 항복조건을 만족할 때 일어난다고 가정하는 것이 일반적이다.^{9),13)} 또 최초의 항복이 일어난 후 재료의 거동은 응력의 증분이 일어나는 동안 변형률의 변화는 탄성성분과 소성성분으로 나눌 수 있다고 가정한다. 즉

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p, \dots \dots \dots (1)$$

여기서, $d\epsilon_e$: 탄성변형률 증분

$d\epsilon_p$: 소성변형률 증분

탄성변형률 증분은 식 (2)에 의해서 응력증분과 관련지을 수 있다.

$$\begin{aligned} d\sigma &= \mathbf{D} d\epsilon_e, \dots \dots \dots (2) \\ &= \mathbf{D} (d\epsilon - d\epsilon_p) \end{aligned}$$

그런데, Von Mises는 항복함수(\mathbf{F})와 소성변형률 증분벡터 ($d\boldsymbol{\varepsilon}_p$) 사이의 구성관계에 대해서 식 (3)과 같은 기본 구성식을 제안하였다.⁹⁾

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda \dots \dots \dots (3)$$

여기서, $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$: 소성변형률 증분 벡터
 λ : 소성승수

식 (1), (2) 및 식 (3)으로부터 다음 식을 쓸 수 있다.⁹⁾

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda \dots \dots \dots (4)$$

나. 탄-소성 유한요소 해석

탄-소성 유한요소 해석에서 응력증분과 변형률 증분과의 구성관계는 재료에 대한 항복조건, 유동 법칙과 경화법칙등을 이용하여 구하면 다음과 같이 쓸 수 있다.^{9),12),13)}

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \dots \dots \dots (5)$$

여기서,

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - \mathbf{D} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dots \dots \dots (6)$$

$$\mathbf{D} \left[\mathbf{A} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right]^{-1}$$

여기서, $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dx \frac{1}{\lambda} \dots \dots \dots (7)$

이와 같이 구해진 탄-소성 행렬 (\mathbf{D}_{ep})는 증분해석에서 탄성행렬 (\mathbf{D}) 대신으로 이용된다. 그런데, 변형률증분은 변형률 행렬과 절점변위 증분의 곱으로 주어진다. 즉,

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} d\boldsymbol{\delta} \dots \dots \dots (8)$$

여기서, $d\boldsymbol{\delta}$: 절점변위 증분

\mathbf{B} : 변형률-변위 행렬

위에서 정의된 탄-소성 행렬과 변형률 행렬을 사용하면 탄-소성 재료의 강성도 행렬 (\mathbf{K}_{ep})은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{K}_{ep} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} dV \dots \dots \dots (9)$$

2. 동적 해석

동하중을 받는 구조물의 임의시간 t_n 에서의 동적 평형방정식은 2계의 선형미분방정식의 형태로 주어지며 이러한 동적평형방정식의 시간적분방법으로는 직접 점진적인 방법에 의해 수치적으로 적분하는 직접적분방법이 많이 사용된다. 직접적분법에 의한 수치적인 해법으로는 묵시적(implicit)방법과 명시적(explicit)방법이 있지만 묵시적방법은 시간간격의 크기와는 무관하게 항상 안정된 방법이기 때문에 비교적 큰 시간간격을 사용할 수 있는 장점이 있다. 묵시적방법으로는 Houbolt 방법, Wilson- θ 방법 그리고 Newmark 방법 등이 있다. 본 논문에서는 묵시적방법 중에서 Newmark 방법을 적용하여 적분을 수행하였다. 비선형 탄성문제에서 감쇠에 관한 유효한 자료는 거의 없는 실정이다. 감쇠 구조계의 동적응답은 비감쇠 구조계의 동적응답에 비해 적으며 하중이 재하되는 초기 시간에만 나타나므로 동적하중에 의한 구조계의 거동 해석에서는 감쇠효과를 무시한 해석이 지배적이다. 따라서 본 연구에서는 감쇠효과는 무시하였다.

3. 아치의 초기처짐

본 연구에서 아치의 초기처짐은 식 (10)과 같은 정현곡선으로 가정하였다.

$$w_i = w_o \sin(n\pi x/L) \dots \dots \dots (10)$$

여기서 w_0 : 아치 정점에서의 초기처짐값
 x : 아치의 대칭축으로부터의 거리
 L : 아치지간
 n : 초기처짐의 모드를 결정하는 상수로
 서 대칭모드일 때 1 또는 역대칭 모드일 때 2의 값을 갖는다. 또한 초기처짐의 크기에 관한 자료는 거의 없지만 $L/1000 \sim L/5000$ 의 범위 내에서 추정하고 있다.⁷⁾

III. 수치예

부분분포하중에 따른 포물선아치의 동적응답을 알아보기 위하여 모델 케이스로서 선정된 Fig. 1과 같은 강재 포물선아치가 연직 또는 방사상상태의 부분분포단계하중(partially uniformly distributed

Table 1 Dimensions and properties of parabolic arch

internal radius	$R = 6.0 \sim 12.0$ m
thickness of arch	$t = 0.15$ m
semi angle	$\alpha = 22.62 \sim 90.0$ degree
elastic modulus	$E = 20,000$ MPa
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
yield stress	$\sigma_y = 392$ MPa
mass density	$\rho = 7.85$ KN-s ² /m ⁴
distributed step load	$q = 9.8$ KN/m ²

step load)을 받는 경우를 해석하였다. 아치 구조물의 요소분할은 포물선아치를 각도 방향으로 20 등분 두께 방향으로 3등분하였으며 사용된 재료의 성질은 Table 1 과 같다. 이때 아치의 단면은 한국표준 I-150 × 75 강재를 사용하는 것으로 하였고 강재의 초기항복은 Von Mises의 항복 기준을 적용하였다.

IV. 결과 및 고찰

1. 아치높이/아치지간 비(h/L)에 따른 아치의 동적응답

먼저 연직하중과 방사하중이 아치 전 지간에 분포되어 작용할 때 h/L에 따른 아치의 동적응답을 알아보기 위하여 h/L의 값을 0.1~0.5로 변화시킨 경우 초기처짐이 없는 완전아치 정점 처짐의 동적응답은 Fig. 2와 같다.

연직하중이 작용하는 경우 h/L의 값이 0.1일 때 가장 큰 처짐을 보였고 피크에서의 최대 처짐은 하향으로 1.45 cm 이었다. 또한 h/L의 값이 0.2일 때 피크에서의 처짐은 하향으로 0.32 cm로서 가장 작게 나타났으며 이 값 보다 크거나 작은 경우 피크에서의 처짐이 점차로 증가하였고 특히 0.3 이상이면 피크에서의 처짐의 증가가 현저하였으며 0.5

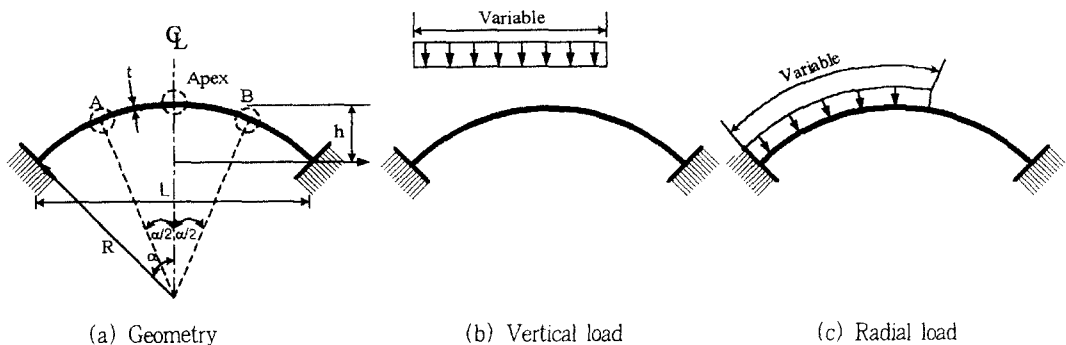


Fig. 1 Geometry of parabolic arch and loading conditions

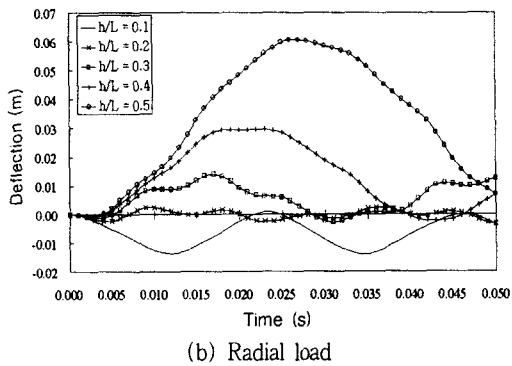
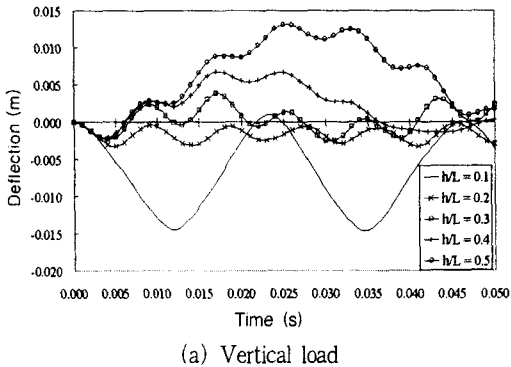


Fig. 2 Dynamic response of deflection at the apex of arch according to arch rise to arch span ratio

일 때 최대 처짐은 상향으로 1.31 cm 발생되었지만 원호아치³⁾의 최대 처짐 5.50 cm와 비교하면 현저하게 작게 나타났다. 한편 방사하중이 작용하는 경우에는 h/L 의 값이 0.2일 때 피크에서의 처짐은 0.25 cm로서 가장 작게 나타났으며 연직하중이 작용할 때의 78% 수준이었다. h/L 의 값이 0.2 이상이면 h/L 의 값이 증가할수록 피크에서의 처짐은 상향의 처짐으로서 현저하게 증가하였다. 이는 h/L 의 값이 클수록 지지점 부근에서 방사방향으로 작용하는 하중에 의해서 내측으로 작용하는 수평분력이 크게 증가하기 때문으로 생각된다. 그러나 h/L 의 값이 0.1인 경우 최대 처짐은 1.39 cm로서 연직하중이 작용할 때의 95% 수준이었으며 h/L 의 값 0.5에서는 최대 처짐은 6.06 cm로서 오히려 연직하중이 작용할 때의 4.6배의 처짐이 발생되었다.

연직하중 또는 방사하중이 작용하는 경우 모두 h/L 의 값이 0.2~0.3일 때 처짐은 비교적 작게 나타났으며 일반적으로 h/L 의 값이 작을 때는 연직하중이 작용하는 경우에 처짐이 크게되었고 h/L 의 값이 클수록 방사하중이 작용하는 경우에 처짐이 크게 발생되었다. 위의 두 경우를 종합하여 볼 때 h/L 의 값은 0.2~0.3이 이상적일 것으로 판단된다.

2. 부분분포하중에 따른 아치의 동적응답

부분분포하중에 따른 아치의 동적응답을 알아보기 위하여 h/L 를 0.2, 아치지간 10 m 및 초기처짐이 없는 완전아치의 경우 분포하중이 아치지간의 40~100% 범위에 분포되었을 때 아치의 중앙 좌측 4등분점 처짐의 동적응답은 Fig. 3과 같다.

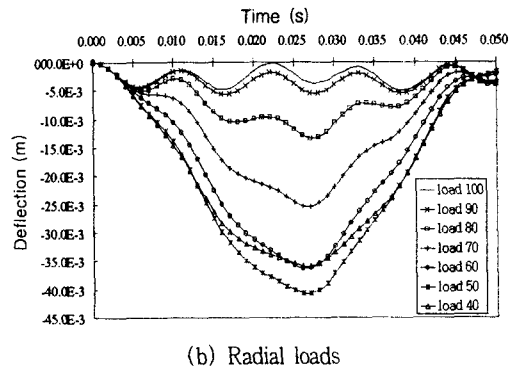
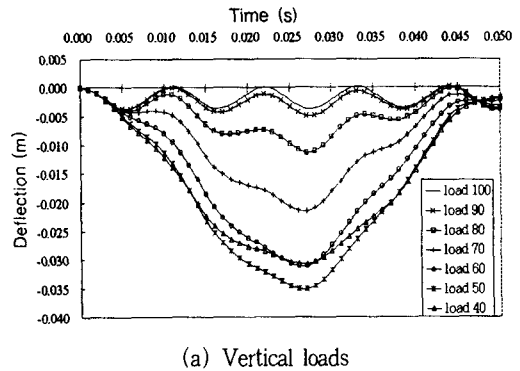


Fig. 3 Dynamic response of deflection at the left quarter point of partially loaded arch without initial deflection

완전 아치의 동적응답 곡선에서 최대 처짐은 두 경우 모두 하중이 아치지간의 50% 범위에 분포되었을 때 최대 값을 나타냈다. 최대 값은 연직하중이 작용하는 경우 3.5 cm, 방사하중이 작용하는 경우 4.07 cm로서 방사하중이 작용하는 경우 약 16.3% 큰 것으로 되었다. 또 하중 분포범위가 넓을수록 응답주기는 짧아 졌으며 최대 처짐 값은 감소하였다. 최대 처짐이 발생하는 시간은 하중 분포 범위가 많을수록 약간 지연되었지만 큰 차이는 없었다.

한편 분포하중에 따른 아치정점 처짐의 동적응답은 Fig. 4와 같다.

완전 아치정점 처짐의 응답곡선에서 처짐이 하향 최대 값을 갖는 하중의 분포범위는 70%일 때이었

으며 이 결과는 원호아치⁴⁾에서 최대 처짐을 유발하는 하중 분포범위 70%와 일치하였다. 최대 처짐 값은 연직하중의 경우 0.83 cm, 방사하중의 경우 0.66 cm로서 연직하중이 작용할 때 약 25% 크게 나타났다. 하중분포 범위가 40%일 때는 상향 최대 처짐이 발생되었고 연직하중의 경우 피크에서의 처짐은 0.45 cm, 방사하중의 경우 피크에서의 처짐은 0.64 cm로서 방사하중이 작용할 때 35% 크게 나타났다.

아치 중앙우측 4등분점에서의 처짐의 동적응답은 중앙좌측 4등분점의 응답과는 달리 하중 분포범위가 작을수록 상향의 처짐이 유발되었지만 전체적인 거동 특성은 중앙좌측 4등분점의 응답과 유사하였으므로 그림의 제시는 생략하였다.

3. 초기처짐이 있는 경우 아치의 동적응답

아치에 정현 곡선 형태로 주어지는 최대 $L/1000$ 의 초기처짐이 있는 경우 부분분포하중에 따른 아치의 동적응답을 알아 보기 위하여 h/L 를 0.2, 아치지간 10 m인 아치에 부분분포하중이 아치 지간의 40~100% 범위에 분포되었을 때 아치의 중앙좌측 4등분점 처짐의 동적응답은 Fig. 5와 같다.

완전아치의 경우와 마찬가지로 하중이 아치지간의 50% 범위에 분포될 때 피크에서의 처짐은 최대 값을 나타냈으며 연직하중의 경우 3.91 cm, 방사하중의 경우 4.48 cm로서 방사하중이 작용하는 경우 약 14.6% 크게 유발되었다. 또 완전아치일 때 연직하중의 경우 3.5 cm, 방사하중의 경우 4.07 cm와 비교하면 초기처짐이 있는 경우 처짐은 약 10~12% 크게 나타났으며 초기처짐이 있는 경우 불리함을 알 수 있다. 이들의 결과를 원호아치⁴⁾가 초기처짐을 갖는 경우 처짐이 23% 크게 유발된 것과 비교하면 포물선아치가 초기처짐의 영향을 적게 받고있음을 알 수 있다.

한편 부분분포하중에 따른 아치정점 처짐의 동적응답은 Fig. 6과 같다.

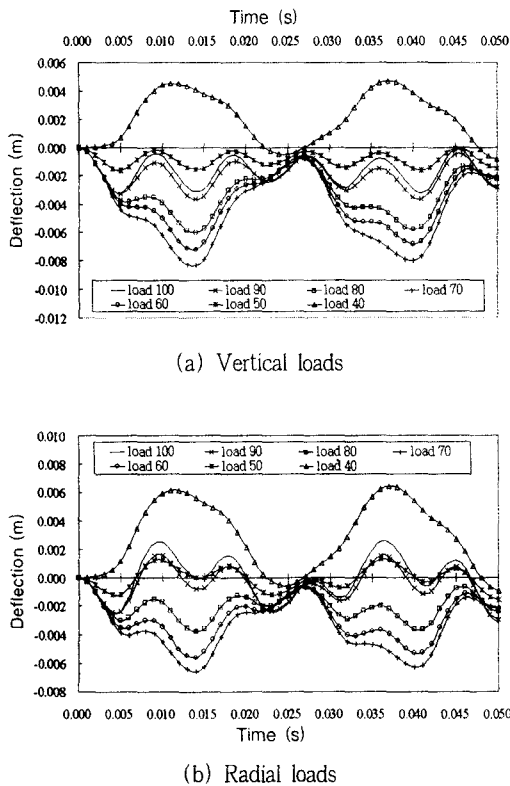
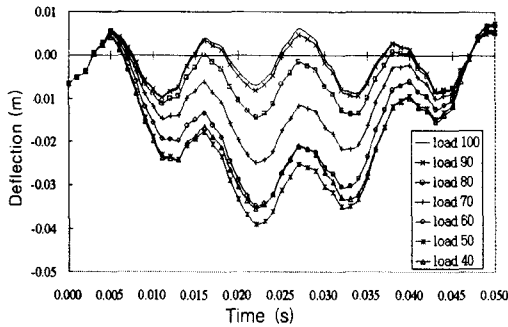
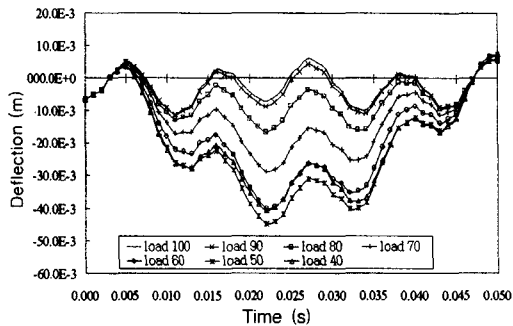


Fig. 4 Time response of deflection at the apex of partially loaded arch without initial deflection



(a) Vertical loads

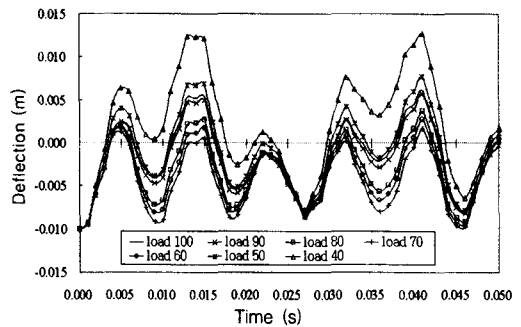


(b) Radial loads

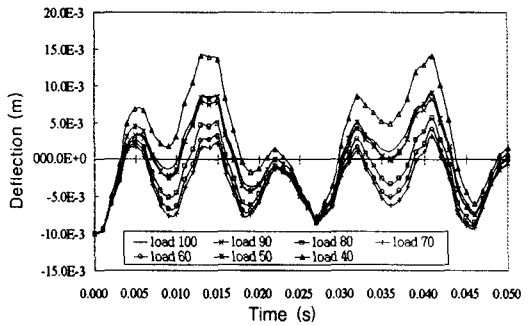
Fig. 5 Dynamic response of deflection at the left quarter point of partially loaded arch with initial deflection

최대 하향 처짐은 하중 분포 범위 70%일 때 발생하였지만 피크에서의 처짐 값은 연직 하중 및 방사 하중의 경우 모두 0.92 cm로서 초기처짐의 값을 초과하지는 않았다. 또한 이 값을 완전 아치의 경우 피크에서의 최대 처짐 0.83 cm 및 0.66 cm에 비교하면 약 11%~39% 크게 나타났다. 즉 초기처짐의 영향은 방사하중에서 더 크게 나타났다. 최대 상향 처짐은 하중 분포 범위 40%일 때 발생하였고 처짐 값은 연직하중의 경우 1.24 cm, 방사 하중의 경우 1.41 cm로서 완전아치의 경우 0.45 cm 및 0.64 cm와 비교하면 초기처짐의 영향은 하중 분포 범위가 작을 때 많이 받고 있었다.

중양우측 4등분점의 처짐의 응답 특성은 응답 분포가 중앙좌측 4등분점의 응답과는 방향이 반대로



(a) Vertical loads



(b) Radial loads

Fig. 6 Dynamic response of deflection at the apex of partially loaded arch with initial deflection

되는 것 이외에는 중앙좌측 4등분점의 응답 특성과 유사하였으므로 생략하였다.

V. 요약 및 결론

본 연구에서는 부분적으로 분포된 동하중을 받는 강재 포물선아치의 동적응답 특성이 논의되었다. 해석방법으로는 비선형유한요소법이 채용되었고 유한요소 정식화 과정에서는 Von Mises의 항복 기준과 Prandtl-Reuss의 흐름 법칙에 근거한 탄-소성 모델이 사용되었다. 모델 케이스로 선정된 강재 포물선아치에 부분분포하중이 작용하는 경우 포물선아치의 동적응답 특성을 알아보기 위하여 몇 가지의 수치 예를 제시하였다. 수치 예에서 고려된 부분분포하중은 방사분포하중 및 연직분포하중이며

분포하중의 작용 범위는 아치지간의 40~100%로 하였다. 또한 대상 아치는 완전아치와 정현곡선의 형태를 갖는 L/1000의 최대 초기처짐을 갖는 포물선아치로 하였다. 이러한 수치 예를 통하여 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 연직분포하중 또는 방사분포하중이 작용하는 경우 모두 아치높이/아치지간 비(h/L)의 값이 0.2~0.3일 때 처짐은 비교적 작게 나타났으며 일반적으로 h/L의 값이 작을 때는 연직분포하중이 작용하는 경우에 처짐이 크게되었고 h/L의 값이 클 때는 방사분포하중이 작용하는 경우에 처짐이 큰 것으로 나타났다. 연직분포하중 또는 방사분포하중이 작용하는 아치에서 h/L의 값은 0.2~0.3이 이상적일 것으로 판단된다.

2. 아치의 4등분점의 최대처짐은 분포하중이 그 점이 포함된 아치지간의 50% 범위에 분포될 때 최대 값을 나타냈다. 처짐의 최대 값은 연직분포하중이 작용하는 경우보다 방사분포하중이 작용하는 경우에 완전아치에서 약 16%, 초기처짐이 있는 아치에서 14.6% 정도 크게 나타났다.

3. 완전아치 정점의 하향 처짐은 하중의 분포범위 70%일 때 최대 값을 나타냈으며 분포하중에 따른 최대 처짐 값은 방사하중이 작용하는 경우보다 연직하중이 작용하는 경우에 약 25% 크게 나타났다.

4. 초기처짐을 갖는 아치 정점의 하향처짐은 하중분포범위 70%일 때 최대 값이 나타났으며 처짐 값은 초기처짐의 값을 초과하지는 않았다. 또한 완전아치에서의 최대 처짐 값보다 연직하중의 경우 11% 방사하중의 경우 39% 크게 나타났다. 즉 방사하중을 받는 경우에 초기처짐의 영향을 더 크게 받고 있었다.

References

1. Austin, Walter J., et al., 1982, Numerical

Bending Analysis of Arches, Journal of the structural division, ASCE, Vol 108, No. ST4, : 849-867

2. Austin, Walter J. and Timothy J. Ross, 1876, Elastic Buckling of Arches under symmetric loading, Journal of the structural division, ASCE, Vol. 102, No. st5, :1085-1095

3. Cho, Jin Goo, 2001, Dynamic Behavior of the Plane Circular Arches with the Shape Imperfections, *Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers*, 43(3) : 85-93 (in Korean)

4. Cho, Jin Goo, Keun Soo Park, 2001, Effects of Partially Distributed Step Load on Dynamic Response of the Plane Circular Arches, *Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers*, 43(4) : 89-96 (in Korean)

5. Cho, Jin Goo, Keun Soo Park, 2004, Dynamic Behavior of the Plane Parabolic Arches with the Initial Deflections, *Journal of the Korean Society of Agricultural Engineers*, 46(2), 67-75 (in Korean)

6. Howard B. Harrison, 1982, In-Plane Stability of Parabolic Arches, Journal of the structural division, ASCE, Vol. 108, No. ST1, :195-205.

7. Komatsu, Sadao and Tatsuro Sakimoto, 1977, Ultimate Load Carrying Capacity of Steel Arches, *Journal of the structural division, ASCE*, Vol. 103, No. ST12 : 2323-2336.

8. Mondkar and Powell, G. H. 1977, Finite Element Analysis of Nonlinear Static and Dynamic Response, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11 : 499-520.

9. Owen, D. R. J. and E. Hinton, 1980, *Finite elements in plasticity*

10. Robert Kao, 1980, Nonlinear dynamics buckling of spherical caps with initial imperfections, Pergamon, Computer & Structures, vol. 12 : 49-63.