

모델 개발 과정에서 도구를 조작하는 활동 분석

신 은 주* · 이 중 희**

본 연구에서는 학생들이 모델을 개발하는 과정에서 도구를 활용한 조작활동을 분석한다. 또한, 도구를 조작하는 활동이 내면화되어 내적 활동의 수단으로서의 도구가 사고 과정을 중재하여 일반화 가능한 모델이 개발되는지를 조사한다. 이를 위하여 중학교 1학년 학생 3명이 도구를 활용한 모델링 활동에서 모델을 개발하는 과정을 조사한 사례연구를 제시한다. 연구 결과, 학생들은 도구를 조작하는 지각적 활동을 인지적 활동에 통합함으로써 변화하는 양 사이의 관계를 추론하고 모델화하였다. 또한 도구를 조작하는 지각적 활동을 반성하면서 개발한 모델을 수정하고 정교화하였다. 특히, 학생들은 도구를 조작하는 지각적 활동을 내면화하여 도구를 조작하는 활동을 하지 않고서도 비커의 물부피와 높이의 관계그래프인 일반화 가능한 모델을 개발하였다.

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정에서는 학생 활동 중심의 적극적인 수업 방식과 구체적 조작물이나 공학적 도구와 같은 보조자료를 활용한 활동을 강조하고 있다. 제 7차 교육과정에 근거하여 개발된 수학 교과서의 가장 큰 특징의 하나는 학생들의 활동을 강조하여 학생들 스스로 관찰, 조작, 분석, 종합하는 경험을 바탕으로 수학적 개념이나 원리를 이해하도록 안내하는 것이다. 구체적 조작물이나 공학적 도구와 같은 보조도구는 구체적 세계와 추상적 세계를 연결할 수 있는 이점이 있으므로 이를 활용한 활동이 효과를 발휘하기 위해서는 도구를 보다 충실하게 활용하여야 한다는 지적과 함께 우리

나라 교수·학습을 고려한 도구의 활용 방안이 여러 연구자들(예를 들면, 김남희(2000, 2001), 김수미(2000))에 의해 제안되었다. 그러나 수학 교과서에서 제시하는 활동이 직접 구체물을 가지고 하는 조작 활동뿐만 아니라 논리 수학적 경험에 해당하는 활동도 많음에도 불구하고, 종종 조작활동으로만 해석하여 수업을 운영하거나 시간 부족으로 인해 놀이나 활동 자체로 그쳐서 개념이나 원리 이해를 유도하지 못하고 있다는 점이 현장 교사들과의 인터뷰를 통해 밝혀졌다(방정숙, 2002). 이 같은 시각은 배중수(2002)에 의해서 지적된 바 있는데, 그는 활동 중심의 교과서를 개편할 때 가장 염려한 점이 활동하는 것만으로 활동의 교육 목표가 달성되었다고 생각하는 것이라고 밝혔다. 7차 교과서 단위 도입 활동의 내용소재 변화 및 활용 실태

* 이화여대대학원(eunjushin@dreamwiz.com)

** 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)

를 조사한 이영하와 김미연(2002)에 의하면, 교과서에서 구체적 조작물의 활용이 반영되고 있지만 다양하지 못하고 진부한 경우가 많았으며 현장에서 그 활용이 미비하였다.

본 연구는 모델링 활동이 제 7차 교육과정의 취지를 살려 수학과 수업에서 학생 중심의 활동이나 구체적 조작물이나 공학용 도구와 같은 보조 자료를 활용한 활동을 하기 위한 수업 방법이 될 수 있다고 본다. 모델링 활동은 도구를 활용한 지각적이고 구체적인 활동이 기반이 되어 인지적이고 추상적인 활동과 연계를 이루면서 구체와 추상의 중재 역할을 하는 모델을 개발하는 활동이기 때문이다. 결과적으로, 모델링 활동은 제 7차 수학과 교육과정에서 지향하고 있는 학생 중심의 활동과 실생활 문제해결 능력 함양을 적극 반영한 교수·학습 방법이라고 볼 수 있다. von Glasersfeld(1995)에 의하면, 수 블록과 막대나 물리실험실의 실험 기구 등과 같은 교실에서 사용되는 지각 자료들은 원하는 개념을 명백하게 나타내 보이는 것이 아니라 개별적인 지각자로서 학생들이 반성하고 추상화 할 기회를 제공하는 것이다. 그러므로 교사들은 학생들에게 제시하는 지각 자료들을 사용하여 그들이 전달하려는 추상적인 개념들을 명료하게 드러낼 수는 없다. 정보처리 이론의 틀을 기반으로 한 교육 접근에서는 추상적인 수학을 더 구체적이고 쉽게 지도하기 위해 구체적 조작물을 고안하여 사용하였다. 반면, 이러한 접근을 비평한 구성주의자들은 외적 표현이 내재적 의미를 수반하는 것이 아니라 외적 표현의 의미가 해석자의 지식과 이해에 의존한다고 설명하였다. 따라서 구체적 조작물을 사용하는 것에 문제를 제기하였고, 의미의 발달을 역동적인 과정으로 보았다(Gravemeijer, 2002). 본 연구에서는 구성주의와 사회 문화적 이론의 관점을 기반으로 하여 외적 표현의 정

적인 의미가 조작물에 구현되어 있는 것이 아니라, 학생들이 도구를 조작하는 지각적 활동을 인지적 활동에 통합할 수 있을 때 모델 개발 과정이 촉진될 수 있을 것이라고 본다. 본 연구에서 사용한 도구는 이미 의도한 수학 개념을 구현하기 위해 고안된 조작물과 다른 것으로서, 과학 실험 도구와 같이 도구를 사용하는 물리적이고 지각적인 활동에 기반 하여 개념을 이해하는 인지적인 활동을 유도하도록 돕는 기술적인 도구를 말한다. 교육연구자들은 학생들에게 도구를 조작하는 환경을 제공하면 기호가 참조로 하는 실재를 이해할 수 있으므로 의미 있는 수학활동을 하게 된다는 점을 강조하였다. 도구중재 개념은 비고츠키주의자들이 인지발달을 분석할 때 핵심이 되며, 활동 이론에서도 기호와 도구를 중재로 하여 의미가 발생하는 과정을 연구하였다. 수학학습에서 도구의 역할에 대한 연구는 도구를 사용할 때 도구 기능이 어떻게 변형되는가를 분석한 연구(Lave & Wenger, 1991; Meira, 1998), 컴퍼스, 자와 같은 기술적 도구가 인지활동에 미치는 영향을 조사한 연구(Chassapis, 1999; Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993), 기술적 도구와 기호적 도구 사이의 상호작용을 조사한 연구(Meira, 1995, 2000; Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney, & Wright, 1998), 기술적 도구를 중재로 한 모델링 과정을 조사한 연구(Cobb, 2002; Hines, 2002; Izsak, 2003; Lehrer et al, 2000)가 있다.

도구를 중재로 한 모델링 과정을 조사한 연구들은 모델링 단계에서 모델의 특징이나 학생들의 추론과 사고방식을 분석하였다. 모델링 활동은 추상적이고 인지적인 활동 뿐 만이 아니라 지각적이고 구체적인 활동을 포함한다. 따라서 실제적인 상황을 모델링하기 위해 수단으로서의 도구를 조작하는 지각적인 활동이 모

델에 대해 사고하고 추론하는 인지적 활동과 상호작용 함으로써 모델을 개발하는 데 영향을 줄 것이라고 본다. 이에 근거하여 본 연구에서는 모델링 활동에서 모델을 개발하는 과정과 도구를 활용한 활동의 상호작용을 사례연구 방법으로 조사하고자 한다. 또한 도구를 조작하는 활동이 내면화되어 내적 활동의 수단으로서의 도구가 사고 과정을 중재하여 일반화 가능한 모델이 개발되는지를 조사하고자 한다. 이러한 연구목적에 위해 다음 장에서는 이론적 고찰로서 수학교육에서 사용할 수 있는 도구와 그 기능, 도구 기능의 변형적 잠재성, 도구가 인지 기능에 미치는 영향, 기술적 도구와 기호적 도구의 상호작용, 도구가 모델링 활동에 미치는 영향을 살펴보고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학교육에서 도구

수학교육에서 도구는 퀴즈네르 막대나 십진 블록과 같은 구체적 조작물, 컴퍼스, 자, 컴퓨터와 같은 물리적·기술적 도구, 달력, 우편요금 표나 수체계와 같이 문화적 맥락에서 사용되는 인공물로서의 문화적 도구, 수학 기호체계와 같은 기호적 도구가 있다. 인지과학의 정보처리 접근에서는 구체적 조작물을 사용하는 것이 추상적인 지식을 획득하는 것을 돕는다고 주장한다. 따라서 조작물 사용을 연구할 때는 주로 조작물을 가지고 수행하는 활동과 기호적 수준에서의 활동이 연결되는지를 조사한다. 이때 이미 규정된 방식으로 조작물을 활용하여 활동을 행함으로써 조작물에 구현되어 있는 수학적 구조를 학생들이 학습할 수 있다는 것을 가정하였으므로 구성주의 관점에서 비판을 받게

되었다(Gravemeijer, 2002). Lesh등(1987)은 Dienes는 조작물 자체로부터가 아니라 조작물을 사용한 활동에서 학생들이 수학적 관계를 추상화할 수 있다는 점을 의도한 것이라고 설명하였다. 즉, 수학이 조작물 자체에 내재되어 있는 것이 아니라 조작물을 사용한 교실 활동에서 수학을 이해할 수 있다는 것이다. 같은 시각에서 Meria(1998)과 Noble등(2001)은 물리적 장치 자체가 학생들에게 수학적 의미를 전달하는 것이 아니라 물리적 장치를 가지고 실제로 행하는 교실활동에서 개념과 아이디어를 이해할 수 있다고 보았다. 따라서 교사가 조작물을 사용하는 방법을 말하고 학생들이 이 방법을 따를 때는 탐구할 기회를 제공하지 못하므로 절차만을 이행하게 된다는 점을 지적하였다. 수학적 구조가 조작물에 구현되어 있다고 보는 것은 외적 표현이 내재적 의미를 가진다고 보는 입장으로서, 수학적 의미가 사회 문화적으로 상황화 된 구성과정이라는 관점과 대조되는 시각이다. 이는 학습을 인간의 활동, 문화, 역사와 독립된 것으로 고려하여 고정된 수학 구조와 관계의 정확한 정신적 표현을 얻는 것으로 정의하지 말아야 함을 의미한다. 조작물 사용에 대한 전통적 관점에서는 교육전문가들이 조작물에 내재되는 관계를 구성하므로 학생들은 이 관계를 구성하지 못할 수도 있다. 따라서 조작물을 사용하기 위해서는 자신들의 이해 상태보다 더 발달된 수학적 관계를 알아야만 하는 문제가 발생한다(Cobb, Yackel & Wood, 1992; Gravemeijer, 2002).

Gravemeijer(1997)에 의하면, 조작물을 통해 구현된 수학이 학생들에게 구체적이지 않을 수 있고, 이러한 조작물에 의한 접근은 학생들에게 상황화 된 비 형식적 지식을 간과하는 것이다. 또한 의도한 수학 개념을 구현하는 구체적인 참조 틀을 만들기 위해서 조작물을 고안하

고, 조작물을 가지고 추상적인 수학 지식과 절차를 학습할 때는 전문가의 형식적인 수학 지식이 교육의 시작점이 된다. 그러므로 Gravemeijer는 추상적 지식을 개발하는 시작점은 구체적 조작물을 사용해서가 아니라 상황화 된 비 형식적인 전략과 지식이 되어야 한다고 제안하였다. Gravemeijer(2002)는 전통적인 접근과 대조적으로 구성주의나 사회 문화적 관점에서 조작물은 자신의 수학 활동을 기호화하는 수단으로 사용될 수 있다고 설명하였다. 조작물 사용에 대한 정보처리 관점을 비판한 구성주의 시각은 사회 문화적 이론에서 조작물 사용에 대해 취하고 있는 시각과도 부합한다.

이상에서 살펴 본 바와 같이, 도구는 다양하게 정의되어 왔고, 인간의 활동에서 도구 역할이 연구되어왔다. 구체적 조작물이나 물리적 도구 자체에 수학 개념이 내재되어 수학적 아이디어를 구현한다는 견해는 비판받아 왔고, 학생들이 도구를 사용하여 활동함으로써 수학적 아이디어를 이해할 수 있을 것이라는 점에 대해 점차 관심을 가지게 되었다. 다음 절에서는 도구가 활동에 통합될 때 도구는 그 기능이 변할 수 있는 잠재성을 가진다는 점을 제시한 연구들을 고찰하여 본 연구에 주는 시사점을 도출하고자 한다.

2. 도구 기능의 변형적 잠재성

수학을 활동적인 과목으로 본 Pimm(1995)에 의하면, 물리적인 도구를 가지고 수학 개념을 학습할 때 수학 개념을 더 쉽게 이해할 수 있다. 수학적 아이디어를 탐구하는 수단으로서 도구를 사용하여 개념이미지를 가질 때 도구는 기호와 같이 인지적 기능을 할 수 있다. 따라서 도구를 사용한 활동에서 개인과 물리적 도구 사이에서의 상호작용 즉, 물리적 대상에 가

한 실제적인 행동과 정신적 대상에 가한 행동, 혹은 기호적 표현을 연결하는 것이 필요하다. 또한 수학적 아이디어는 도구 자체보다는 도구가 기능을 하는 수단과 결합되는 것이므로 도구를 사용하는 사람이 물리적 대상인 도구를 제어하고 의미를 해석하는 것이 중요하다 (Pimm, 1995). 이 같은 Pimm의 시각은 수학적 구조와 관계가 도구에 내재되어 있다는 것을 부정한 것으로서, 도구를 사용함으로써 도구에 내재한 수학적 가능성에 대한 통찰력을 가지는 것이 중요하다고 본 것이다. 또한 물리적 대상으로서의 도구를 사용하면서 도구를 인간 활동에 통합할 때 도구는 수학적 아이디어를 구체화하도록 하는데 도움을 줄 수 있다는 점을 함의하고 있다. 이 시각은 Lave와 Wenger(1991)의 도구에 대한 관점과 일맥상통한다. Lave와 Wenger에 의하면, 도구는 사회 집단의 활동이나 수행에서 사용하는 장치로서, 도구를 사용하여 활동하는 방법은 참여자의 이해와 밀접하게 연결된다. 따라서 사회·문화적 수행에서 이해과정은 기호 체계와 기술적 도구를 사용함으로써 의미를 얻는 활동으로 볼 수 있다.

Lave와 Wenger는 그래프와 같은 기호적 도구나 기술적 도구와 같은 인공물이 인공물 자체를 초월해 도구를 사용하는 사람에게 도구가 어떤 의미를 부여하는지를 설명하기 위해 '투명성(transparency)'이라는 용어를 도입하였다. 투명성이란 도구를 사용하는 사람들에게 도구의 특징이나 조작 방법, 도구가 중재한 수행 활동의 의미가 가시적으로 드러날 수 있는지를 의미한다. 그들은 도구와 도구를 사용하는 사람의 수행과의 관계에서 도구는 학습자에게 더 투명할 수도 있고, 덜 투명할 수도 있다고 설명하였다. Lave와 Wenger에 의하면, 어떤 인공물의 투명성은 활동목표, 인공물이 역할을 하는 사회적 조직, 사회·문화적 맥락에서 인공

물을 가지고 행하는 수행과 밀접하게 연관된다. 그러므로 인공물 자체에 의해서가 아니라 인공물이 중재 기능을 하는 활동에 의해서 인공물의 투명성이 드러나게 되는 것이다. Lave와 Wenger는 인공물의 사용과 인공물에 대한 이해 사이의 관계를 고려할 때 투명성에 내재된 이중성을 보게 된다고 설명하였다. 이 때, 투명성에 내재된 이중성이란 가시성과 비가시성으로서 이들은 이분법적으로 분리되는 것이 아니라 상호작용을 하게 된다. 예를 들어, 기호적 도구인 그래프 위의 점을 읽는 것과 같이 그래프의 정확한 세부 정보를 추출하게 될 때 그래프는 가시적인 것이 된다. 반면, 그래프가 표현하는 현상을 해석할 때는 현상을 예측해야 하므로 그래프는 비가시적인 것이다.

도구의 투명성에 대한 이러한 관점은 Meria(1998)의 연구에서 잘 지지되고 있다. Meria는 눈금, 선 등과 같은 그래프 자체의 내재적 성질에 따라 그래프의 투명성을 판단하는 것을 비판하며, 이 같은 접근을 ‘인식론적 충실성(fidelity)’으로 정의하였다. 이 때, 도구를 활용한 활동에서 얻는 의미는 물리적 대상에 내재되어 있는 것으로 고려된다. 또한 도구의 내재적 성질이나 도구의 질과 지식 사이의 대응에 초점을 두게 된다. Meria는 이 관점과 대조적으로 Lave와 Wenger의 관점에 따라 물리적 도구에 내재된 요소가 아닌 도구를 사용함으로써 발생하는 투명성 관점을 제시하였다. Meria에 의하면, 물리적 도구 자체가 수학적 의미에 접근하는 학생들에게 더 투명하거나 덜 투명한 것이 아니라, 도구의 투명성 여부는 사고과정에서 만들어지고 맥락에서 발생하는 것이다. 따라서 물리적 도구와 지식 사이에서 만들어지는 형식적 대응에 제약받지 않고 활동에서 변형되면서 도구가 투명성을 얻게 된다. 이 시각에서 Meria는 도구를 사용하는 활동 맥락과 투

명성이 관계하는 방법을 연구하였다. 도르래의 회전수와 물체의 높이 변화를 측정하는 원치라는 물리적 도구, 물체를 올려놓을 때 스프링의 늘어난 길이 변화를 측정하는 스프링 장치, 입력 수와 출력 수를 주고 관계를 찾게 하는 수기계(number machine)라는 컴퓨터 장치를 도구로 사용하였다. 만일, 인식론적 충실성 관점에 따라, 즉 도구 자체의 직접 조작 가능한 요소로 투명성을 고려한다면, 원치의 메커니즘은 직접 조작, 관찰, 측정 가능한 것이므로 투명성이 가장 큰 것이다. 다음으로 스프링의 탄성은 가시적인 것이 아니므로 기울기가 추론되어야 하는 것이지 쉽게 조작될 수 있는 것이 아니다. 따라서 투명성이 원치보다 드러나지 않는다. 컴퓨터 스크린 위에 입력 수와 출력 수가 나타나는 수 기계는 그 메커니즘을 알 수 없으므로 투명성이 가장 적은 도구이다. 수 기계 자체가 기울기와 y 축 정보를 포함하고 있으므로 기울기를 알기 위해서는 추상적인 수를 가지고 계산을 해야 한다. 활동 초기에는 도구 자체의 질에 의해 예측된 것처럼 원치와 스프링의 조작을 쉽게 이해한 반면, 수 기계를 다루는 경험의 부족으로 혼란스러워하였다. 그러나 활동이 진행되면서 도구 자체의 질로 판단시 투명성이 클 것이라는 예측과는 달리 원치의 도르래 크기의 역할을 인식하지 못하거나 탄성을 이해하지 못하여 어려움을 가졌다. 그러므로 수학 활동에서 물리적 장치의 사용과 이해는 인지 활동에 통합될 때 유용한 것이지 도구 자체의 질로 설명할 수 없다는 것을 밝혔다. 학생들에게 원치와 스프링은 수학에 접근 가능하게 하는 자원으로 보이지 않은 반면, 수 기계는 교실에서 개발한 함수에 대한 지식에 접근 가능하게 하는 도구가 되었다(Meria, 1998).

Meria는 수학적 이해를 실제적이고 구체적인 행동과 대조적인 추상적 추론으로 정의하는 전

통적인 이분법의 부 적절성을 지적하였다. 또한 도구를 이해한다는 것은 지식과 도구 사이의 변증법적 상호작용과 사회적 상호작용으로 도구를 사용한 활동의 목표를 성취하는 것이라고 설명하였다. Meria나 Lave와 Wenger의 투명성에 대한 관점은 도구 자체에 내재한 의미가 학생들에게 전수될 수 있다는 조작물 사용에 대한 전통적인 시각과 대조적인 것이다. 오히려 구성주의나 사회 문화적 관점에 기반 하여 도구의 기능을 설명한 Gravemeijer의 관점과 일관된다. 선행연구에서 논의한 바와 같이, 도구 자체에 내재한 고립된 물리적 기능에 초점을 맞추는 것이 아니라 도구를 사용하는 맥락에서 도구의 변형적 잠재성을 이해해야 한다. 인지 활동에 통합되어 의미를 이해하는데 중재하는 기능을 하는 도구는 의미를 구성하고 협상하고 사고를 촉진하는 역할을 할 수 있다. 또한 도구의 도움으로 구체적 사고와 추상적 사고를 통합할 수 있으며 도구를 조작하는 지각적 활동과 인지적 활동의 통합이 가능하게 될 수 있다. 이러한 시각에서 다음절에서는 도구 자체의 물리적 기능을 초월하여 인지 활동에 통합된 도구의 기능을 고찰해 보고자 한다.

3. 인지활동에서 도구의 기능

가. 기술적 도구가 인지활동에 미치는 영향

기술적 도구가 수학문제해결을 돕거나 제약하는 방법을 연구한 Nunes, Schliemann과 Carraher(1993)는 도구를 사용하는 것이 길이를 측정하는 과제를 수행하는데 어느 정도 영향을 주는지를 조사하였다. 특수한 수학적 아이디어를 구현하는 도구로서 1cm, 1/2cm가 표시된 자와 비 형식적인 측정 도구로서 실 조각을 자 대신으로 사용하였다. 비 형식적인 실 조각을 사용

하였을 때는 반복과 분할과 같은 논리적인 성질을 발명할 필요성이 있기 때문에 어려움이 유발된 반면 자와 같은 관습적인 도구는 문제 해결을 촉진하였다.

이 연구와 유사한 시각을 가지고 다른 중재 수단을 사용하는 것이 활동을 다른 방법으로 구조화하고, 개념발달 과정과 사고에도 다른 영향을 주는지의 여부를 조사한 Chassapis(1999)의 연구에서는 중재수단, 사고과정, 수행 활동 사이의 상호의존성을 밝혔다. 다양한 지름을 가진 원 주형 판이나 트레이서(tracer)를 도구로 사용하여 활동한 학생들은 원을 일정한 곡률을 가진 곡선으로 이해하였다. 이 때, 원 둘레가 원의 발생적 요소로서 기능을 하였고, 학생들은 원의 현상학적 요소인 등글고 모든 방향에서 대칭이라는 성질을 이해하였다. 그러나 원의 지각된 현상학적 요소만 참조하였기 때문에 도구를 사용해 그려진 그림과 원의 기하적 개념 사이에서 번역하지 못했으므로 원의 형식적 개념으로 전이하지 못했다. 원 크기에만 초점을 둔 것은 도구의 물질적 구조 때문인 것으로 판단되었다. 반면, 컴퍼스를 사용하였을 때는 한 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취인 폐곡선으로 원을 이해하였고 중심과 반지름을 알게 되었다. 학생들은 컴퍼스를 사용하여 활동을 내면화하고 외적 조작을 내적으로 변형함으로써 형식적인 원 개념과 유사한 개념을 구성하였다. 따라서 컴퍼스를 사용하는 활동에 기반 한 실제적 사고는 지각적인 원을 점진적으로 변형하여 역동적으로 개념을 유도하였으므로 원의 형식적 개념을 정신적으로 구성하는 것을 촉진한다는 점을 밝혔다. 문화적 맥락에서 도구의 인지적 기능을 설명한 Saxe등(1996)은 도구가 맥락에서 사용되고 조직되면서 수단으로서의 도구에서 인지적 기능을 하는 도구로 전이하는 과정을 연구하였다. 눈금이 표시되지

얇은 8인치의 파란 색 끈으로 6인치의 흰 끈과 18인치의 노란 색 끈을 측정하는 과제를 연구 도구로 사용하였다. 파란 색 끈과 흰 색 끈의 길이 차이가 파란 색 끈의 길이를 나누어 흰 끈을 측정하게 하였다. 연구에서 끈의 물리적 성질이 수학적 목표 구성을 가능하게 하거나 제약한다는 것을 밝혔다. 인지적 형태로서 파란 색 끈은 과제를 수행하기 위한 수단이 되었으며 같은 간격으로 나눌 수 있는 수학적 대상이 되었다. 이 때 구획은 끈이 비를 측정하는 기능을 하는데 필요한 것이었다. 측정 기능이 발생 목표로서 실현화되고 흰 끈이 균등하게 분할될 수 있는 물리적 실체로서 개념화되었다. 형태로서 파란 색 끈은 수학적 대상으로 변형되는 수단이 되었고 이 수단을 가지고 목표를 성취하였다. 연구에서 형태와 수단, 목표와 기능을 연결하였을 뿐만이 아니라 형태에서 기능으로의 전이가 이루어짐으로써 형태와 목표, 기능과 수단도 연결되었다는 점을 밝혔다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 도구와 활동 주체의 상호작용으로 도구를 조작하는 활동을 하면서 수학활동을 구조화할 수 있다. 도구가 가진 제한점과 가능성을 인식할 때 도구 자체의 수준인 물리적 기능을 하는 도구에서 인지 활동에 통합되어 도구를 사용해 추론하거나 모델을 개발하는 것을 돕는 기능을 할 것이다. 또한 활동 주체의 지식이 도구에 통합되어 도구를 제어하며 도구의 기능을 변형시킬 수 있을 때 물리적 기능에서 인지적 활동을 가능하게 하는 기능으로 전이할 수 있을 것이다. 이와 더불어 외적인 도구를 조작하는 활동이 내적으로 변형되어 사고의 중재수단이 됨과 동시에 도구를 조작하는 활동을 반성하며 활동을 재조직하는 과정에서 메타인지적 활동을 가능하게 하는 기능을 할 수 있을 것이다. 이 점에 착안하여 본 연구에서는 도구를 활용한 모델링 활

동에서 모델을 개발하는 과정과 도구를 조작하는 활동의 상호작용을 조사하는 것의 교육적 의의를 고려하게 되었다. 모델링 활동은 도구를 중재로 하여 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 모델을 개발하고, 개발한 모델을 수정하고 정교화하여 일반화 가능한 모델을 만들기 위해 모델을 가지고 하는 활동을 재조직하는 과정이라고 파악된다. 결국, 도구와의 상호작용에서 모델이 개발되고 변형과 정교화 과정을 거치게 될 것이다. 이를 위해 다음절에서는 기술적 도구를 가지고 하는 활동과 기호적 도구를 가지고 하는 활동의 상호작용이 인지 활동에 미치는 영향을 조사한 연구들을 살펴보고자 한다.

나. 기술적 도구를 가지고 하는 활동과 기호적 도구를 가지고 하는 활동의 상호작용

구성주의와 사회 문화적 이론에 기반한 연구들은 기술적 도구 자체에 내재된 성질이 인지 발달을 촉진한다는 시각을 가진 연구들과는 그 관점에서 대조적이다. 그들은 물리적 기능을 하는 도구가 인지적 활동에 도움이 되면서 기호적 도구를 가진 활동으로 발달한다는 시각에서, 기술적 도구를 가지고 하는 활동과 기호적 도구를 가지고 하는 활동의 상호작용을 연구하였다(Meira, 1995, 2002; Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney, Wright, 1998). 환경의 사회적·물질적 구조와 활동 사이의 상호작용에서 발생하는 표현에 초점을 둔 연구(Meira, 1995, 2002)는 물리적 도구인 원치를 가지고 하는 조작활동에서 일차함수를 이해하는 과정을 분석하였다. 이 연구는 학습과 사고에 대한 활동지향적 관점을 취하여 도구가 중재하는 활동과 기호와 기호의 의미 사이의 상호관계에 초점을 두었다. 활동 초기에는 물리적인 도구인 원치

가 활동에 쉽게 통합되지 못하였으나 점진적으로 수학적 아이디어를 만들고 사용하는데 원치를 중요한 자원으로 사용하게 되었다. 또한 도구와의 상호작용에서 도르래의 회전수와 물체의 높이를 기록한 표는 회전수와 높이의 일차함수 관계를 이해하게 돕는 사고 도구로 발달하였다. Meira(2000)는 학생들의 표현 능력은 사회적·물질적 환경과의 상호작용에서 발달한다는 점과, 물리적인 도구를 사용하여 수학 개념을 조직하게 될 때 표현을 구성할 수 있다는 점을 밝혔다. 도구의 중재로 운동 역학적인 경험과 수학적인 활동을 연결할 때 기호화가 발생하는 과정을 연구한 Nemirovsky(1994)와 Nemirovsky, Tierney와 Wright(1998)는 기술적 도구를 가지고 하는 활동과 기호적 도구를 가지고 하는 활동의 상호작용을 밝혔다. 그들은 도구와 상호작용하면서 물리적인 행동과 경험을 구조화하여 현상에 내재한 성질과 관계를 기호화 할 수 있다고 설명하였다. 그들의 연구에서 학생들은 물리적인 도구로 MBL(microcomputer-based labs)을 사용하여 장난감 자동차를 움직이는 물리적인 변화의 상황과 컴퓨터 스크린 위에 만들어지는 자동차의 움직임을 표현한 실시간 그래프를 연결하였다. 이 때 MBL이라는 도구는 기호와 물리적인 행동을 연결함으로써 학생들이 운동 역학적인 행동을 기호화하게 도왔다. 학생들은 운동 역학적인 경험에 기초하여 자동차의 속도 그래프를 예측하였고, 거리그래프에서 운동의 방향성을 인식함으로써 속도그래프를 이해하였다. 연구자들은 학생들이 방향성, 속도, 위치를 조화시킴으로써 기호화를 발달시켰고, 이 때 MBL은 상황화 된 의미를 수반한 기호화 활동을 가능하게 하는 도구라는 점을 밝혔다. 또한 MBL과의 상호작용, 그래프 모양에 대한 예측, 운동 역학적인 경험, 학생들의 관점의 전이는 기호화를 돕는 통합된 요소로 작용하였다는 점

을 밝혔다. Nemirovsky(1994)와 Nemirovsky, Tierney와 Wright(1998)의 연구에서는 학생들이 MBL이라는 물리적인 도구에서 만들어진 그래프와 자신이 움직이는 활동을 연결하여 그래프를 이해하는 과정에 초점을 두었다. 반면, Meira의 연구는 도구를 중재로 하여 자신이 직접 모델을 구성하고 이 모델을 변형함으로써 도구를 조작하는 활동과 모델의 상호 구성적 관계가 형성되는데 중점을 두었다. 도구가 사고 과정을 중재한다는 점에서는 같은 시각을 가지고 있지만 도구에서 만들어진 기호와 학생들이 도구를 활용하여 개발한 모델이라는 점에서 두 연구는 차이가 있다. 선행 연구들을 고찰한 결과가 주는 함의점은 인지활동에 통합된 도구와 기호적인 도구인 표현이나 모델의 상호작용으로 수학적 의미가 발달되어 나간다는 것이다. 또한 학생들이 도구의 잠재성과 제한점을 인식할 때 도구의 변형은 수학적 구조를 변화 가능한 것으로 가시화 해 준다는 것이다. 그러므로 물리적인 기능을 하는 도구 자체에 수학적 내재된 것이 아니라 도구를 사용하는 활동에서 도구에 대한 지식과 수학적 지식이 통합될 때 도구는 인지적 활동과 메타인지적 활동을 돕는 기능을 한다고 볼 수 있다.

다. 도구가 모델링 활동에 미치는 영향

도구를 중재로 한 모델링 과정을 조사한 연구들은 학생들이 개발한 모델의 특징과 사고과정을 분석하였다. 도르래를 사용하여 물체를 끌어올리는 장치인 윈치를 도구로 사용하여 대수식을 모델링 하는 과정에 대한 연구들(Hines, 2002; Izsak, 2003)은 수학에 대한 이해와 물리적 세계에 대한 이해가 서로의 발달을 지지하거나 제약하는 과정을 분석하였다. 도르래의 회전 수, 둘레, 물체 높이의 변화와 같은 물리적인 속성들 사이의 관계에 대한 지식은 상황

모델을 개발하는데 도움이 되었다. 그 후, 원치에 대한 이해에 기반 하여 자신이 개발한 상황 모델을 사용하고 다른 모델들을 평가하였다. 학생들은 물리적인 속성들의 특징을 변수로 표현하고, 변수의 변화 패턴에서 대수 식을 만들었으며, 대수 식에서 변수의 변화와 원치의 물리적 상황의 변화 사이의 관계를 연결하여 인식하였다. 도구가 발생하는 일차함수를 이해하고, 이를 기호적인 표현과 연결시키면서 도구에 대한 지식을 모델에 대한 지식과 함께 연결하여 구성한 것이다. 연구자들은 물리적인 상황과 모델 사이의 관계에 대한 인식이 도구의 사용을 증재로 하여 촉진되었으며, 도구는 모델의 발생과 재구성과 정교화에 계속적으로 영향을 미치게 된다는 점을 제시하였다. 또한 모델링은 물리적인 맥락과 수학적 맥락을 연결하여 활동을 조직하면서 모델을 개발하고 사용하고 평가해 나가는 활동이라고 정의하였다.

이 연구들은 도구를 사용하여 물리적인 상황과 모델 사이의 연결성을 만들면서 상황을 조직하고 모델을 개발하는 과정에 초점을 두었다. 이외에도 도구를 증재로 하여 활동을 조직하면서 비 형식적인 모델을 형식적인 모델로 개발하는 과정에 초점을 둔 연구(Lehrer et al, 2000)도 있다. 도구와의 상호작용에서 학생들의 비 형식적인 모델을 분석한 Lehrer 등(2000)은 경사진 판에서 물체가 구를 때 속도에 영향을 주는 요인을 탐구하는 실험에서 경사도를 표현하는 다이어그램이 비 형식적인 모델로서 발생한 후에 형식적인 수학모델로 발달하는 과정을 분석하였다. 경사진 판을 그린 다이어그램, 즉 상황을 실제적으로 표현한 모델이 물리적 환경에서 도구와 상호 작용함으로써 속도에 영향을 주는 요인을 추론하는 사고 도구로서의 모델로 발달하였다. 연구자들은 학생들이 물리적인 상황을 개념화 할 수 있어야 하고, 정신적으로

구성하여 사고의 도구로서 모델을 개발해 나가는 것이 중요하다는 점을 밝혔다. 이 연구에서 알 수 있듯이, 도구 자체에 내재한 성질보다는 도구를 조작하는 활동에서 도구의 기능이 변하고, 학생들이 만든 모델도 현상을 나타내는 그림으로서의 모델에서 추론을 위한 모델로 발달하는 것이다. 본 연구에서는 도구 사용에 대한 사회·문화적 이론의 관점을 기반으로 하여 학생들이 모델링 활동을 하는 과정에서 증재 수단으로서의 도구를 사용하여 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직할 수 있다고 본다. 또한 도구를 조작하는 활동이 내면화되고 도구에 대한 지식과 수학적 지식이 통합되어 도구를 제어하면서 모델을 개발할 수 있을 것이다. 선행 연구에서는 도구를 증재 수단으로 사용하면서 도구와의 상호작용에서 모델이 발달하는 과정을 연구하였다. 그러나, 외적인 도구를 조작하는 활동이 내면화되어 도구를 조작하는 활동을 하지 않고도 학생들이 도구를 사고과정의 증재 수단으로 하여 일반화 가능한 모델을 개발하게 돕는지를 조사하지는 않았다. 이 점에 착안하여 본 연구에서는 도구 기능이 변형하면서 비 형식적인 상황모델이 수학모델로 발달하는 과정을 연구함과 동시에 외적인 도구를 조작하는 활동 없이 일반화 가능한 모델이 개발될 수 있는지를 조사하고자 한다. 물리적인 활동의 증재자로서의 도구가 활동을 구조화하여 내적 활동의 수단으로서 사고과정을 증재할 수 있는지를 파악하기 위해서이다.

III. 연구방법

1. 연구절차

본 연구는 2003년 12월 말에서 2004년 1월

초까지 2차시에 걸쳐 시행한 연구로서, 한 차시는 2-3시간 정도가 소요되었다. 모델링 활동에서 본 연구자는 연구대상자와 함께 참여자로서의 관찰자 역할을 했다. 세 명의 연구대상자의 사고 과정에 대한 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리내어 사고하기 과정을 사용하여 연구대상자의 관점을 추적하고 이해하였다. 본 연구의 대상은 서울시 소재의 한 중학교 2학년 여학생 세 명으로서 연구 참여자의 동의를 구두로 받았으며 학생들 모두 자발적으로 연구에 참여하였다. 성적이 상위권에 속하는 A학생은 자신의 생각을 주저 없이 표현하고 대화에 적극적인 반면, 중위권인 B와 C 학생은 A의 의견을 반영해 생각을 한 후에 자신의 의견을 말하였다.

2 자료수집 및 분석

자료 수집은 모델링 활동을 녹화한 비디오테이프와 오디오테이프의 녹취물, 학생들의 노트와 연구자의 현장노트를 중심으로 하였다. 수집된 자료는 자료를 수집하고 분석하는 체계적인 귀납적 절차에 기반 해서 추론하는 형태를 취하는 지속적인 비교법(constant comparison)을 사용하여 분석하였다. 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리내어 사고하기 과정을 사용하였고, 특히, 연구대상자의 비언어적 행동에도 주목하여 관찰하였다. 본 실험은 신은주·이종희(2004b)의 연구에 포함된 실험을 도구의 관점에서 새롭게 분석한 것이다.

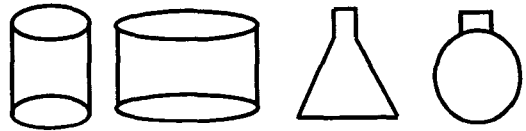
3. 연구도구

본 연구를 위해서 연구자가 고안한 다음과 같은 활동과제를 학생들에게 제시하였다. 이 활동과제는 학생들의 실세계에서의 경험을 기

반으로 하여 상황에서 자신의 비 형식적인 상황모델을 개발하고, 상황모델에서 수학적 구조와 관계를 발견하여 수학모델을 개발하고, 이 수학모델을 상황에 비춰 해석하고 정교화하여 수학모델을 일반화 가능한 모델로 개발하는 과정을 모두 포함할 수 있다는 점에서 모델링 활동 과제로 선택하였다. 활동과제에서 사용한 도구는 활동 초기에 제시하였다.

모델링 활동 과제 :

여러 가지 모양의 비커에 물을 부을 때에 수면의 높이는 어떻게 변화하나요? 수면의 높이를 변하게 하는 요인을 찾고 그 변화요인과 높이의 변화관계를 설명하시오. 변화관계를 나타내는 그래프를 그리고 그래프에서 변화 현상을 설명하시오.



[그림 III-1] 실험에 사용한 비커

IV. 사례연구 분석과 논의

1. 사례연구 분석

사례연구에서 보여준 학생들의 모델링 활동을 실세계 탐구 과정, 상황모델 개발 과정, 수학모델 개발 과정, 모델적용 과정으로 구분하여 각 과정에서 나타나는 인지적 행동과 메타 인지적 사고를 수집한 자료에 기반 하여 분석하였다. 사례연구 분석은 모델링 과정을 개발하는 것이 아니라 모델링에 관한 선행연구(신은주, 이종희, 2004a)에서 밝힌 네 가지 과정을 적용하여 이 네가지 과정에서 모델 개발과 도구

를 활용한 활동의 상호작용에 초점을 두었다.

가. 실세계 탐구 과정과 비커를 활용한 활동의 상호작용

본 연구자는 학생들이 경험을 기반으로 하여 여러 가지 모양의 그릇에 물을 부을 때 물높이 변화를 고려하고, 작은 원기둥 비커와 삼각 비커에 일정량의 물을 부을 때 물높이의 변화를 고려하는 활동을 실세계 탐구 과정에 포함시켰다. 다음은 연구자와 학생들이 물높이가 변화하는 상황을 이해하기 위해 토론한 대화의 일부분이다.

연구자: (원기둥 비커를 보여주면서)이 비커에 서는?

학생C: (원기둥 비커를 보면서)똑같이 올라올 것 같아요.

학생A: (비커에 부피 눈금이 일정한 간격으로 표시되어 있는 것을 관찰한다)음..똑같이 올라와요.

학생B: (삼각비커를 관찰하며) 조금씩 올라와요.

학생A: 음. 아니 더 많이 썩 올라와요.

학생C: 네. 여기(비커 아래 부분을 손으로 가리키며)는 조금씩, 여기(비커 위 부분을 손으로 가리키며)는 많이 썩 올라와요.

원기둥 비커를 관찰하게 하였을 때, 학생 C가 물높이가 똑같이 올라온다는 답을 하였다. 비커를 보면서 비커의 횡단면의 넓이가 일정하다는 사실로부터 높이가 일정하게 변한다는 것을 인식하게 된 것이다. 학생 A는 비커에 부피 눈금이 일정한 간격으로 표시되어 있는 것을 관찰하면서 물높이가 똑같이 올라온다고 설명하였다. 학생A와 C는 원기둥 비커 횡단면의 넓이가 일정하다는 사실로부터 높이가 일정하게 변한다는 것을 이해하였으므로, 삼각비커를 관찰하며 물이 갈수록 많이 썩 올라온다고 설명하였다. 삼각비커의 눈금은 관찰하지 않고 삼각비커의 횡단면의 넓이가 갈수록 좁아지는 모

양을 보고 물높이 변화를 이해한 것이다. 그러나 학생B는 횡단면의 넓이와 물높이의 관계를 이해하지 못하여 삼각비커를 관찰하며 물이 조금씩 올라온다고 설명했다. 이 과정에서 비커라는 도구는 물을 붓는 상황에서 물높이 변화에 영향을 미치는 요인을 발견하기 위한 수단으로서 참조역할을 하였음을 알 수 있다.

나. 상황모델 개발 과정과 비커를 활용한 활동의 상호작용

상황모델 개발 과정은 물부피와 높이의 변화 관계에 대한 가설을 세우고, 측정 활동으로 부피와 높이의 데이터를 얻은 후에 변화 패턴을 발견하는 활동을 포함한다. 본 연구자는 학생들이 측정활동에서 얻은 데이터와 이 데이터에서 추론한 변화관계를 상황모델로 보았다. 학생들은 원기둥 비커에 표시된 부피 눈금인 50ml, 100ml, 150ml, 200ml에 해당하는 높이를 측정하여 기록한다. 다음은 학생들이 가설과 측정결과가 모순이 있음을 발견하는 과정을 발견한 것이다.

학생B: 1.7하고 1.8사이이고요. 100ml은 3이고 150은 4.8요.

연구자: 높이 증가가 어때?

학생B: 1.7, 1.3, 1.8요.

학생A: 다르네 어어.

학생C: 똑같아야 하는데.

학생B: 이상하다. 내가 잘못 재었나?

학생A: 네가 잘못 잰 것 아니니?

학생C: 똑같아야 하는데(다시 측정한다)

학생A는 물의 부피가 일정하게 변할 때, 물높이가 일정하게 변할 것이라는 가설과 다른 측정 결과가 나오자 이상하게 생각하고 학생B의 활동을 모니터하고 평가하였다. 학생C도 모순을 인식하고 다시 측정하여 학생B가 높이의 눈금을 잘못 측정하여 발생한 측정오차를 발견

하였다. 이 때, 측정기능이 발생목표로서 실현화되고 도구는 눈금이 균등하게 분할될 수 있는 물리적 실체임과 동시에 목표성취를 위한 수단으로서 생각하게 되었다. 이 대화는 도구를 활용한 활동의 조직화와 모델의 발달은 상호작용하면서 서로의 발달을 촉진하였음을 보여주고 있다.

다. 수학모델 개발 과정과 비커를 활용한 활동의 상호작용

수학모델 개발 과정은 상황모델 개발과정에서 얻은 데이터로부터 부피와 높이의 변화관계 그래프를 그린 후에 그래프에서 부피와 높이의 변화관계가 상황모델과 일치하는지를 판단하는 과정을 포함한다. 본 연구자는 부피와 높이의 변화관계 그래프를 학생들의 수학모델로 보았다. 다음은 삼각비커에서 부피와 높이를 측정해 기록한 상황모델로부터 자신의 수학모델을 개발한 후에 서로 다른 모델의 차이를 고려하는 과정의 일부분이다.

연구자: 두 그래프의 차이가 무얼까?

학생A: 이상하다.

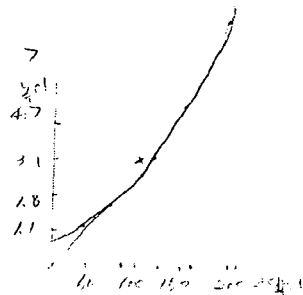
학생C: 어어(자신의 그래프와 친구의 그래프를 본다)

연구자: 왜 곡선으로 그렸니?(곡선으로 그린 이유를 묻자 C는 답이 없다. A는 C의 그래프를 보면서 자신의 그래프를 곡선으로 연결하려고 한다)

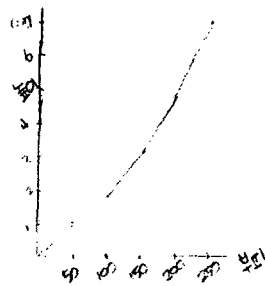
연구자: 부피를 더 조금씩 측정하면? 50ml씩 말고 25ml씩, 아니면 10씩 측정하면 그래프가 어떨까? 이 친구는 곡선이고 이 친구는 직선인데 차이가 왜 생길까?

학생A: (부피를 조금씩 증가시키면서 실험을 하여 높이의 변화를 그래프로 그린다) 간격을 좁히면 직선이 곡선이 되요. 여기 (점과 점 사이)사이가 좁아지니까요.(간격을 좁히면서 직선을 부드럽게 곡선으로 연결한다)

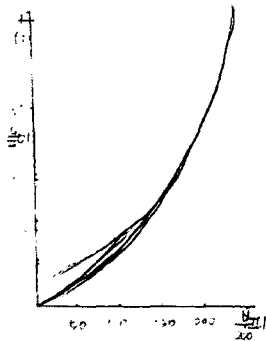
[그림 IV-1], [그림 IV-2], [그림 IV-3]에서와 같이 삼각 비커의 물높이와 부피를 측정할 데이터로부터 점을 찍은 후에 학생A와 B는 점들 사이를 선분으로 연결하였고, 학생C는 곡선으로 연결하는 차이를 보였다. 학생들은 서로의 그래프를 보며 자신의 그래프가 왜 다른지를 생각하였다. 연구자는 학생들이 곡선의 차이를 이해하도록 부피를 측정하는 간격을 좁혀서 다시 측정활동을 하게 하였다. 학생들은 새로운 활동목표를 성취하기 위해 다시 도구와 상호작용을 하였다. 학생A는 측정간격을 좁혀 데이터를 기록하는 활동을 재 조직화하여 수학모델의 차이를 해결하였다. 그래프의 간격을 좁히기 위해 새로운 정보를 확인하여 다시 실험을 하고 앞의 실험과정을 모니터 하는 활동을 하면서 수학모델을 개발하였다.



[그림 IV-1] A 학생의 그래프



[그림 IV-2] B 학생의 그래프



[그림 IV-3] C학생의 그래프
(삼각비커에서 부피와 높이 변화를 나타낸 수학모델)

A학생의 그래프: 부피가 0일 때 높이를 임의로 하여 점들을 선분으로 연결해 그린 후 원점을 연결하면서 곡선으로 수정
 B 학생의 그래프; 원점을 지나면서 점들을 선분으로 연결
 C학생의 그래프: 부피가 0일 때 높이를 임의로 하여 점들을 곡선으로 연결해 그린 후 원점을 연결하여 곡선으로 수정

라. 모델적용 과정과 비커를 활용한 활동의 상호작용

모델적용 과정은 측정 활동 없이 큰 원기둥과 항아리 모양 비커의 물 부피와 높이의 변화 관계를 예측하여 관계그래프를 그리는 활동을 포함한다. 본 연구자는 항아리 모양 비커의 부피와 높이의 변화관계 그래프를 일반화가능한 모델로 보았다. 학생들은 서로의 의견을 교환하며 측정활동을 참고로 하여 비커그림에 부피를 나타내는 눈금을 표시하였다. 전 과정에서 개발한 모델을 참조로 하여 도구를 조작하는 활동 없이 내적 활동의 수단으로서 사고과정을 중재하는 도구를 가지고 일반화 가능한 모델을 개발하는 것이 이 활동의 목표이다. 다음은 학

생들이 비커 그림에 부피 눈금을 설정하기 위해 토론하는 과정과 그래프를 그리고 이 그래프를 해석하는 과정에서 연구자와 학생들 간에 이루어진 대화이다.

학생A: 아니 이렇게 해야지(앞 단계에서 관찰한 비커의 눈금을 참조로 하여 비커그림에 눈금을 매긴다) 여기가 더 넓게.

학생B: 그래 맞아

학생C: 그림 여기는?

학생A: 아니 그게 아니라, 아까처럼

연구자: 이 점(그래프의 변곡점)이 어디에 해당 되니?

학생A: 여기요(자신이 그린 용기의 가장 넓은 부분을 손으로 지적)

학생B: 아아 여기 맞아요(용기의 가장 넓은 부분을 손으로 표시)

연구자: 그럼 이 점 이 전에는 어떻게 변화하 니?

학생A: 조금 씩 요.

연구자: 이유는?

학생A: 넓어지니까요.

연구자: 그렇지, 그럼 이 점을 지나면?

학생B: 많이 씩 요.

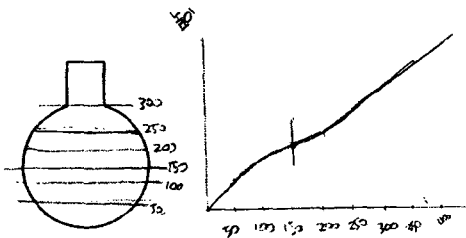
학생C: 빨리 올라가요.

연구자: 왜?

학생A: 좁아지니까요

[그림 IV-4]에서와 같이 학생들은 비커의 넓은 부분은 부피 눈금간격을 좁게 하고, 좁은 부분은 간격을 넓게 분할하였다. 즉, 비커라는 물리적 도구는 횡단면에 따라 부피 눈금이 분할되는 수학적 대상이 되었고, 부피 변화에 따른 높이의 변화를 인식하게 하는 인지적 활동을 가능하게 하였다. 학생들은 눈금에 따라 높이의 변화를 인식하고 [그림 IV-4]에서와 같이 부피와 높이의 변화그래프를 그렸다. 이는 곧, 학생들이 전 과정에서 개발한 모델을 사고 대상으로 하여 부피와 높이의 변화관계를 인식하였음을 입증하는 것이다. 연구자가 학생들이

그런 그래프에서 부피가 150ml 일 때 높이에 해당하는 점을 지적하면서 이 점이 비커의 어느 부분인지에 대해 묻자 학생들은 비커의 가장 넓은 부분을 지적하며 그 부분을 중심으로 전에는 물이 천천히 올라오고 나중에는 빨리 올라간다고 설명하였다. 이는 곧 그래프의 기울기와 부피에 대한 높이의 변화를 연결하여 사고한 것임을 반영한다. 또한 물리적 도구에 대한 지식과 부피와 높이의 변화관계에 대한 지식이 학생들의 인지활동과 통합되어 사고를 촉진한다는 것을 보여주는 것이다.



[그림 IV-4] 부피와 높이의 변화를 나타낸 일반화 가능한 모델

2. 논의

실세계 탐구 과정에서 학생들이 비커라는 도구를 관찰하면서 물을 붓는 상황을 연상하였을 때 비커의 횡단면의 넓이가 일정하다는 것이 가시적으로 드러남에 따라 횡단면의 넓이와 물 높이라는 두 변화하는 양의 관계를 이해한 것이다. 또한 학생들은 비커에 부피 눈금이 일정한 간격으로 새겨진 것을 관찰하면서 부피와 높이의 변화라는 변화하는 양들의 관계를 이해하게 되었다. 비커라는 도구가 가진 일정한 횡단면의 넓이와 균등하게 분할된 부피 눈금이라는 내재적 성질이 물높이에 영향을 주는 변화하는 양과 상호연관 됨으로써 학생들은 부피와

높이를 활동목표를 위해 조작할 대상으로 인식하였다. 원기둥 비커를 관찰함으로써 학생들에게 가시화 된 도구의 성질은 학생들이 삼각비커의 횡단면의 넓이가 갈수록 작아지므로 물높이 증가율이 감소한다는 사실을 발견하게 되었다. 물리적인 측정 도구로서 기능을 하는 비커에 대한 지식이 상황에 대한 이해를 돕는 역할을 한 것이다. 또한 비커가 가진 성질이 학생들에게 가시화됨에 따라 관찰의 대상이었던 비커는 모델을 개발하는 과정에서 지각적 활동을 가능하게 하였을 뿐만 아니라 인지적 활동에도 도움이 되었다. 이 때 비커는 변화하는 양들 사이의 관계를 구체적으로 경험하게 하는 탐구 도구로서 역할을 하였다. 부피 눈금 간격이 횡단면의 넓이에 따라 분할될 수 있는 물리적 실체로서 비커, 관찰대상인 물리적 도구로서 비커는 변화하는 양들 사이의 변화관계를 발견하기 위한 추론도구로서 사용되었다. 학생들이 도구를 활용한 활동을 조직하면서 실세계 탐구 과정에서 상황모델 개발과정이 유도되었다.

상황모델 개발 과정에서 학생들은 원기둥 비커를 활동에 통합하여 직접 조작하는 활동을 하였다. 이 때, 부피와 높이의 데이터를 얻음으로써 부피에 따라 높이가 일정하게 변한다는 점을 발견하게 되었다. 학생들의 활동 초기에 비커는 지각적 활동을 가능하게 하는 측정도구로서 물 부피와 높이의 데이터를 얻게 하는 물리적 기능을 한다. 하지만 학생들은 지각적 활동에서 발달하여 데이터 사이의 변화 관계를 추론하는 인지적 활동을 하였다. 지각적 활동에서 인지적 활동으로 발달하는 과정에서 변화하는 양들 사이의 관계가 가시적으로 드러나게 되고, 이 때, 도구에 새겨진 부피 눈금은 학생들이 변화하는 양들 사이의 관계를 추론하는 인지적 활동을 하는데 도움이 되었다. 학생들이 가설과 데이터의 모순을 찾기 위해 도구를

조작하는 활동을 반성하고 재조직하여 변화하는 양들 사이의 관계를 발견하게 될 때 도구는 학생들이 메타인지적 활동을 하는데 도움이 되었다. 횡단면의 넓이, 새겨진 부피 눈금의 변화라는 도구에 대한 지식과 부피와 높이의 변화 데이터인 상황모델에서 이해한 변화하는 양 사이의 관계에 대한 지식이 결합하여 수학모델로 발달하였다. 수학모델 개발 과정에서 학생들은 상황모델을 사고의 대상으로 하여 부피와 높이의 관계그래프를 그렸다. 축을 결정하기 위해 도구를 조작하는 지각적 활동에서 얻은 데이터를 반성하는 메타인지적 활동을 하였다. 학생들은 도구를 조작하여 얻은 데이터를 참조하여 축을 결정함으로써 인지적 활동 방식을 재조직하였다. 도구의 횡단면의 넓이에 따라 물의 높이가 변한다는 도구에 대한 지식과 부피와 높이의 변화 패턴에서 인식한 변화관계에 대한 수학적 지식이 결합하여 변화관계 그래프를 그리게 되었음을 알 수 있다. 결국, 지각적인 도구조작 활동은 함수관계 인식을 돕고 그래프라는 수학모델을 개발하게 돕는 인지적 활동으로 발달하였다. 학생들은 활동 초기에 비커라는 도구를 측정활동을 가능하게 하는 물리적 도구로 인식하지만 도구를 활용한 활동을 하면서 변화하는 양 사이의 관계를 인식하여 모델을 개발하는 인지적 활동을 하게 되는 것이다. 또한 측정된 데이터를 선분으로 연결한 그래프와 곡선으로 연결한 그래프의 차이를 발견하기 위해 도구를 조작하는 지각적 활동을 모니터하고 부피 간격을 더 작게 분할하여 측정하는 메타인지적 활동을 하였다. 이 때, 도구를 조작하는 지각적 활동이 학생들이 메타인지적 활동을 하는데 도움을 줌으로써 그래프의 차이를 해결하는 인지적 활동이 가능하게 된 것이다.

모델적용 과정에서 그래프의 기울기의 의미와 물 부피 변화에 대한 높이의 변화를 연결시

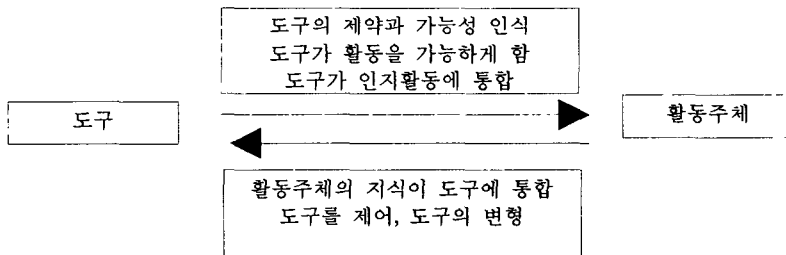
켰다. 도구와의 상호작용은 기울기를 부피의 변화에 대한 높이 증가율로 이해하게 도와서 인지적 활동을 가능하게 하였다. 모델을 개발하는 과정에서 지각적 활동을 통한 측정 수단으로서의 도구에서 함수관계를 인식하는 인지적 활동을 돕는 도구로 전이한다는 것을 알 수 있다. 그래프가 표현하는 현상을 예측할 때 그래프는 비가시적인 것일 수 있지만, 모델적용 단계는 실세계 탐구, 상황모델, 수학모델에서 발달하였으므로 그래프의 기울기가 표현하는 현상이 부피와 높이의 변화 관계로서 가시적으로 드러나게 되었다. 다음에는 학생들이 외적인 도구조작 활동을 내면화하여 내적 활동의 수단으로서의 도구가 사고과정을 증재하여 일반화 가능한 모델을 개발할 수 있는지를 조사하고자 한다. 측정을 하지 않고 폭이 넓은 비커에서 변화를 설명하게 했을 때에 학생들은 이전의 실험상황을 참조로 하여 그래프를 그렸다. 도구의 속성을 생각하면서 학생들은 변화하는 양들의 관계패턴을 인식하게 되었고, 변화패턴을 고려하여 그래프를 그리게 되었다. 이 때, 그래프에서 변화패턴과 비커의 물리적 변화 사이의 관계가 연결된 것이다. 실제적인 양들의 변화하는 상황과 수학모델이 이분되지 않고 모델과 변화하는 상황 사이의 상호 구성적 관계가 만들어진 것이다. 비커의 모양을 그려주고 부피와 높이의 관계그래프를 그리게 했을 때, 학생들은 지각적 활동을 참조로 하여 비커 그림에 비커 횡단면 넓이에 따라 부피 간격을 조절하여 물의 부피를 나타내는 눈금을 설정한 후에 그래프를 그렸다. 즉, 학생들이 물리적 도구에서 인지적 도구로 변형하여 생각하는 과정에서 수학 구조가 가시적으로 드러나게 되고 도구에 대한 지식과 그래프 기울기에 대한 지식을 함께 구성하게 된 것이다. 학생들은 이전의 실험을 참조로 하여 외적인 조작 활동

을 내면화하여 일반화 가능한 수학모형을 개발하였다. 이 때 비커는 목표를 성취하기 위한 수단에서 용기 모양에 따라 부피의 변화를 인식해 눈금이 표시되는 수학적 대상으로 변화해 되었다. 사례연구를 분석한 결과, 측정기능을 하는 물리적 수단으로서의 도구를 조작하는 지각적 활동, 변화하는 양들 사이의 관계패턴을 인식하는 인지적 활동, 두 활동을 모니터하고 제어하는 메타인지적 활동이 모형을 개발하는 과정과 상호작용하면서 학생들의 모델링 활동이 진행되었다. 또한 도구조작 활동을 내면화함으로써 도구의 중재가 없는 상황에서도 그래프와 실세계 현상이 연결되었다. 또한 도구 자체의 특성에 의해서가 아니라 도구가 학생들의 인지활동에 통합되어 기능과 형태에서 전이됨에 따라 모델이 개발되었다. 도구 자체의 물리적인 특징에 초점을 두는 것이 아니라 활동을 조직하면서 지각적 활동이 인지적 활동에 통합

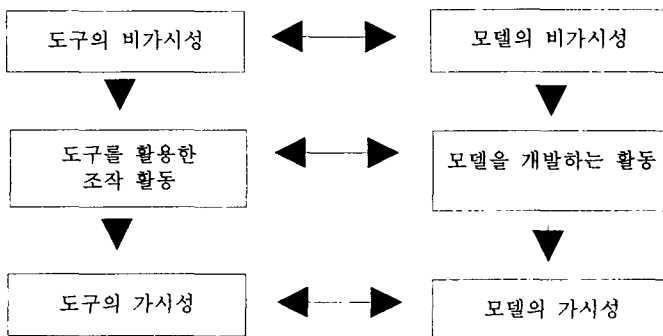
되어 도구를 사용하여 추론하는 방식이 모델 개발과정과 상호작용하였다.

모델링 활동에서 [그림 IV-5]에서와 같이 도구와 활동 주체의 상호작용에 의해 인지 활동에 통합된 도구는 인지적이며 개념적인 활동을 가능하게 하였다. 또한 도구를 물리적인 수단으로서 조작하면서 도구의 다양한 기능이 가시적으로 드러나게 되었고, 이와 동시에 도구를 조작하는 활동과 연결하여 모델의 의미가 가시적으로 드러나게 되었다. 모델링 활동에서 [그림 IV-6]에서와 같이 도구와 모델의 가시성은 병치되어 발달하였다.

Meria(1998)는 도구를 조작하는 활동에서 도구의 투명성이 드러나는 과정을 연구한 반면, 본 연구는 이 점 이외에도 이미 조작활동에서 가시화 된 도구의 성질이 내면화되어 학생들이 도구를 조작하는 활동을 하지 않고도 일반화 가능한 모형을 개발할 수 있다는 점을 밝혔다.



[그림 IV-5] 모델링 활동에서 도구와 활동 주체의 상호작용



[그림 IV-6] 도구의 가시성과 모델의 가시성

모델링 활동에서 모델 개발과정과 도구를 활용한 활동의 상호작용을 정리하면 <표 IV-1>와 같다.

V. 결 론

본 연구에서는 모델링 활동에서 모델을 개발하는 과정과 도구를 활용한 활동의 상호작용을 사례연구 방법으로 조사하였다. 또한 도구를 조작하는 활동이 내면화되어 내적 활동의 수단으로서의 도구가 사고 과정을 증재하여 일반화 가능한 모델이 개발되는지를 조사하였다.

실세계 탐구 과정에서 학생들은 비커를 관찰의 대상으로 생각하였으나, 후에 비커에 포함된 성질을 가시화하여 모델을 개발하기 위

해 비커를 조작하였다. 이 때 비커는 변화하는 양들 사이의 관계를 구체적으로 경험하게 하는 탐구도구로서 역할을 하였다. 부피 눈금 간격이 횡단면의 넓이에 따라 분할될 수 있는 물리적 실체로서의 비커, 관찰대상인 물리적 도구로서의 비커를 추론도구로서 사용함에 따라서 변화하는 두 양 사이의 변화관계를 발견하게 되었다. 상황모델 개발 과정에서는 변화하는 양들을 측정할 수 있는 양적인 실험도구를 가지고 지각적 활동을 함으로써 물 부피와 높이의 데이터를 얻었다. 다음에는 물리적 기능을 하는 도구를 가지고 양을 측정하는 지각적 활동에서 전이하여 변화하는 양들 사이의 변화관계를 추론하는 인지적 활동을 하였다. 또한 측정데이터의 변화관계가 가설과 다르다는 것을 발견하여 도구를 조작하는 측정 활동을 재

<표 IV-1> 모델 개발과정과 도구를 활용한 활동의 상호작용

모델링 활동	모델 개발과 도구를 활용한 활동의 상호작용
실세계 탐구	<ul style="list-style-type: none"> · 지각적 활동: 학생들이 도구를 관찰하거나 조작함으로써 도구의 물리적 성질이 변화하는 양으로 학생들에게 가시화 됨 · 인지적 활동: 변화하는 현상에 대한 이해를 돕고 변수를 구체적으로 경험하게 하는 탐구도구를 조작함으로써 변화하는 양 사이의 관계를 추론 · 메타인지적 활동: 도구의 물리적 성질에 대한 이해를 서로 모니터하고 반성
상황모델 개발	<ul style="list-style-type: none"> · 지각적 활동: 물리적 수단으로서의 도구를 가지고 변화하는 양을 측정 · 인지적 활동: 학생들은 측정 데이터로부터 변화하는 양들의 변화관계를 발견, 학생들에게 도구의 물리적 속성이 가시화되어 인지활동에 통합됨에 따라 모델의 비가시성이 학생들에게 가시화 됨 · 메타인지적 활동: 학생들은 가설과 데이터의 모순을 해결하기 위해 물리적 기능을 하는 도구를 조작하는 지각적 활동을 반성하고 검토
수학모델 개발	<ul style="list-style-type: none"> · 인지적 활동: 학생들의 인지활동에 통합되어 수학적 아이디어의 구현을 돕는 도구의 도움으로 변수관계에 대한 추론과 사고, 그래프의 기술기와 측정활동에서 변화패턴을 연결하여 사고, 도구의 횡단면의 넓이에 따라 물의 높이가 변한다는 도구에 대한 지식과 부피와 높이의 변화 패턴에서 인식한 변화관계에 대한 수학적 지식이 결합 · 메타인지적 활동: 다른 사람의 수학모델과의 차이를 이해하기 위해 도구를 조작하는 지각적 활동을 반성하고 제어
모델적용	<ul style="list-style-type: none"> · 인지적 활동: 내적 활동의 증재자로서 사고를 촉진하는 역할을 하는 도구의 도움으로 도구를 조작하는 활동 없이 비커 모양에 따라 부피의 변화를 인식하여 일반화 가능한 모델을 개발 · 메타인지적 활동: 목표성취를 위한 수단 역할을 하는 도구를 조작하는 활동을 검토하고 제어함으로써 부피 눈금이 표시되는 수학적 대상으로서의 도구를 제어하고 인지 활동에 통합

조직하는 메타인지적 활동을 하였다. 수학모델 개발 과정에서 도구의 횡단면의 넓이에 따라 물의 높이가 변한다는 도구에 대한 지식과 부피와 높이의 변화 패턴에서 인식한 변화관계에 대한 수학적 지식이 결합하여 변화관계 그래프를 그리게 되었다. 결국, 도구에 대하여 지각적으로 조직하는 활동은 함수관계 인식을 돕고 그래프라는 수학모델을 개발하게 돕는 인지적 활동으로 발달하였다. 또한 다른 사람들의 수학모델과의 차이를 해결하기 위해 도구를 조작하는 활동을 반성하며 부피 눈금 간격을 좁혀 높이를 측정하는 메타인지적 활동을 하였다. 모델적용 과정에서 도구는 목표성취를 위한 수단 역할을 하는 물리적 실체에서 비커 모양에 따라 부피 눈금이 분할되는 수학적 대상으로 전이하였으며, 학생들은 측정 활동을 사고의 대상으로 하여 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 외적인 도구조작 활동을 내면화함으로써 내적 활동의 수단으로서의 도구가 사고과정을 증대하여 일반화 가능한 모델을 개발한 것이다. 모델링 활동에서 도구에 대한 지식과 수학적 지식을 인지활동에 통합하고 도구의 잠재성과 제한점을 인식하게 될 때 모델 개발이 촉진되었다. 결과적으로, 도구 자체의 물리적인 특징에 초점을 두는 것이 아니라 도구를 가지고 행하는 지각적인 활동을 인지적 활동과 메타인지적 활동에 통합함으로써 도구를 사용하여 추론하는 방식이 모델을 개발하는 과정과 상호작용하였다.

교과서에 제시되고 있는 모델링 활동은 도구를 활용한 물리적이고 지각적인 탐구 활동을 하면서 데이터를 얻고, 이 데이터를 가지고 패턴에 대해 사고하는 과정에서 모델을 개발하는 과정을 거치기보다 이론적이고 추상적인 모델링에 초점을 맞추는 경향이 있다. 학생들이 개발한 모델을 실세계 현상에 비취 합리적인지를

반성하며 모델을 수정하고 정교화하기 위해 인지적 활동의 기반이 될 수 있는 지각적인 활동이 경시되어 왔음을 부인할 수 없다. 제 7차 교육과정에서 구체적 조작물이나 보조자료를 활용한 학생 중심의 활동을 적극 권장하고 있고, 이를 반영하여 수학 교과서에는 구체물을 가지고 하는 조작활동이 제시되고 있다. 그러나 조작 활동이 수학적 경험에 해당하는 활동과 연계되지 못하고 조작활동 자체로 그쳐서 개념이나 원리 이해를 유도하지 못하는 문제점이 지적되고 있는 실정이다. 이러한 문제점을 극복하기 위해서는 수업 목표에 적절한 도구의 효율적인 활용 방안을 고려해야 한다. 또한 도구를 활용할 때는 지각적인 활동에서 학습이 끝나지 않고 지각적 활동이 인지적 활동으로 유도되고, 지각적 활동을 모니터하고 평가하는 메타인지적 활동이 활성화됨으로써 구체와 추상의 연결이 이루어져야 한다.

사례연구에서 알 수 있듯이, 활동 초기에 학생들은 물리적인 도구를 활용한 지각적 활동에 기반하여 비 형식적인 상황모델을 개발하였다. 그러나 도구를 조작하는 활동을 인지적 활동에 통합함에 따라 상황모델은 수학모델로 개발되어 나갔다. 또한 도구를 조작하는 지각적 활동이 기반이 되어 인지적 활동을 구조화하기 위해 자신의 지각적 활동을 모니터 하는 메타인지적 사고가 유발될 수 있었다. 학생들이 도구 사용의 한계와 가능성을 인식할 때 도구 자체의 수준인 물리적 기능을 하는 도구에서 인지 활동에 통합되어 도구를 사용해 추론하거나 모델을 개발하는 인지적 활동을 돕는 도구로 발달하였다. 또한 활동 주체의 지식이 도구에 통합되어 도구를 제어하며 도구의 기능을 변형시킬 수 있을 때 지각적 활동, 인지적 활동, 메타인지적 활동이 모델 개발과정에서 서로 상호작용하였다. 결과적으로, 모델의 형태, 기능, 모델

의 의미는 도구를 조작하는 활동의 전이와 함께 상호작용하며 발달할 수 있는 것이다.

학생들은 모델링 활동을 하는 과정에서, 도구를 사용한 지각적 활동에서 시작하여 자신이 활동의 주체로서 활동에 참여하고 자신의 활동을 제어할 수 있었다. 이러한 경험이 계속 된다면, 수학을 추상적이고 형식적인 연역 체계로 보지 않고 경험과 실생활에 대한 이해를 참조로 하여 점차 발전해가는 과목으로 이해하는데 도움이 될 것이다. 본 연구는 모델링 활동이 제 7차 교육과정의 취지를 살려 수학과 수업에서 학생 중심의 활동이나 구체적 조작물이나 공학용 도구와 같은 보조 자료를 활용한 활동을 하기 위한 수업 방법이 될 수 있다고 본다. 모델링 활동은 도구를 활용한 지각적이고 구체적인 활동이 기반이 되어 인지적이고 추상적인 활동과 연계를 이루면서 구체와 추상의 중재 역할을 하는 모델을 개발하는 활동이기 때문이다. 본 연구에서는 비커라는 한 가지 도구를 사용한 하나의 활동과제를 분석하였으나 후속연구에서 다양한 도구의 효과를 극대화 할 활용 방안에 대한 보다 체계적이고 실증적인 연구가 필요하다.

참고문헌

- 김남희(2000). 교구이용에 대한 교수학적 논의. *학교수학*, 2(1), 259-281.
- 김남희(2001). 기하판을 활용한 학교수학의 지도. *학교수학*, 3(1), 155-184.
- 김수미(2000). 수학교육과정에서의 조작교구에 관한 연구. *학교수학*, 2(2), 459-474.
- 방정숙(2002). 제 7차 수학과 교육과정의 초등 학교 현장적용에서 나타나는 문제점 및 개선 방향. *학교수학*, 4(4), 657-675.
- 배종수(2002). *초등 수학과 교육론*. 서울: 원미사.
- 신은주·이종희(2004a). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. *학교수학*, 6(2), 153-179.
- 신은주·이종희(2004b). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구. *수학교육학연구*, 14(4), 403-419.
- 이영하·김미연(2002). 수학과 7-가 교과서 단원도입 활동의 내용소재 변화 및 활용실태 조사 연구: 제 6차와 7차 교과서를 중심으로. *학교수학*, 4(3), 375-399.
- Chassapis, D. (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 275-293.
- Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 171-195). Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-371). Psychology Press.
- Gravemeijer, K. (2002). Preamble: from model to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer,

- B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Kluwer Academic Publishers.
- Hines, E. (2002). Developing the concept of linear function: one student's experiences with dynamic physical models. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 337-361.
- Izsak, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and development of modeling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(3), 191-227.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Lehrer, R., Schauble, L., Carpenter, S., & Penner, D. (2000). The interrelated development of inscriptions and conceptual understanding. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 325-360). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiment in computer environment. In L. Wirsup & R. Streit (Eds.), *Development in school mathematics education around the world(Vol 1)*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Meira, J. H. (1995). The microevolution of mathematical representation in children's activity. *Cognition and Instruction*, 13(2), 269-313.
- Meira, J. H. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 121-142.
- Meira, J. H. (2002). Mathematical representation as systems of notations-in-use. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 87-104). Kluwer Academic Publishers.
- Nemirovsky, R. (1994). On way of symbolizing: The case of Laura and velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 389-422.
- Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119-172.
- Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, C. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85-108.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Mathematics in the streets and in schools*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge: London and New York.
- Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R., & Howard, S. (1996). Culture and children's mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.). *The nature of mathematical thinking* (pp. 119-144). Hillsdale,

NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constru-*

ctivism: A way of knowing and learning.
The Falmer Press.

An Analysis of the Activities Operating a Tool in Model Development Process

Shin, Eun Ju (Ewha womans university, Graduate school)

Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

This article presents a case study in which three middle school students developed models in modeling activity using a tool. We research the interaction of model development process and the activities operating a tool in the modeling. And we investigate whether students are able to create generalizable model, after a tool mediates students' thought process and students internalize the perceptive activity operating a tool. The analysis of our case study led to three results. First, as students were able to

integrate perceptive activity operating a tool and cognitive activity, they reasoned about the relationships among changing quantities and developed the model. Second, students corrected and refined developed models with reflecting the perceptive activity operating a tool. Third, as students internalized perceptive activity, students were able to create generalizable model, which is a graph of height as a function of the amount of water that's in the beaker.

* key words : modeling activity (모델링 활동), perceptive activity(지각적 활동), cognitive activity(인지적 활동). metacognitive activity(메타인지적 활동). tool(도구), generalizable model(일반화가능한 모델)

논문접수 : 2004. 10. 29

심사완료 : 2004. 11. 30