The Korean Communications
in Statistics Vol. 11 No. 3, 2004
pp. 643-655

Resampling-based Test of Hypothesis in L_1-Regression[1)]

Bu-Yong Kim[2)]

Abstract

L_1-estimator in the linear regression model is widely recognized to have superior robustness in the presence of vertical outliers. While the L_1-estimation procedures and algorithms have been developed quite well, less progress has been made with the hypothesis test in the multiple L_1-regression. This article suggests computer-intensive resampling approaches, jackknife and bootstrap methods, to estimating the variance of L_1-estimator and the scale parameter that are required to compute the test statistics. Monte Carlo simulation studies are performed to measure the power of tests in small samples. The simulation results indicate that bootstrap estimation method is the most powerful one when it is employed to the likelihood ratio test.

Keywords : L_1-regression, hypothesis test, power of test, jackknife, bootstrap.

1. 서 론

회귀분석자료에 수직이상점이 포함된 경우에는 최소제곱추정(L_2-추정)보다 로버스트한 추정인 L_1-추정을 적용하여 회귀분석을 한다. L_1-추정량은 선형회귀모형 $y = X\beta + \epsilon$ (y는 n차인 반응변수 벡터, X는 $n \times p$차의 설명변수 행렬, β는 p차의 모수 벡터, ϵ는 서로 독립적이고 기댓값이 0인 분포 F를 따르는 n차의 오차 벡터)에서 오차 벡터의 L_1-norm인 목적함수,

$$S(\beta) = \| y - X\beta \|_1 \tag{1.1}$$

을 최소화하는 β로 정의된다. L_1-추정량은 오차가 Laplace나 Cauchy분포와 같이 두터운 꼬리를 갖는 분포를 따르는 경우에 L_2-추정량보다 상대적으로 효율성이 높다는 사실이 Rosenberg and Carlson(1977)과 Dielman and Pfaffenberger(1982)에 의해 밝혀졌다. 특히 오차의 분포가 Laplace 분포인 경우에 L_1-추정량은 최우추정량과 정확히 일치한다는 특징을 가지고 있다.

Kim(1995)은 L_1-추정량의 로버스트한 특성을 이론적으로 점검하였는데, 수직이상점에 대한 L_1-

---

1) This research was supported by Sookmyung Women's University Research Grants (2003)
2) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea
E-mail: buykim@sookmyung.ac.kr

추정량의 붕괴점은 $(n-p)/2n$ 으로서 다른 로버스트 추정량들만큼 높다는 사실을 입증하였다. 한편, Bassett and Koenker(1978)가 밝혀낸 L_1-추정량의 근사적 분포를 바탕으로 Koenker(1987)와 Dielman and Pfaffenberger(1990, 1992)는 L_1-회귀에서의 가설검정법을 제안하였다. 이러한 이론적 발전에 힘입어 L_1-회귀분석이 널리 사용되고 있는데, 계획된 실험에서 얻은 자료와 같이 지렛점은 포함되지 않고 수직이상점만 존재하는 경우에 L_1-회귀분석을 적용하는 것이 타당하다고 할 수 있다. 물론, 수직이상점만 포함된 경우에 붕괴점이 L_1-추정만큼 높은 LMS-추정이나 LTS-추정에 의한 회귀분석을 할 수도 있지만, 이 추정들에 바탕을 둔 통계적 추론이 충분히 확립되지 않은 상황이고 추정알고리즘들의 계산효율성이 상대적으로 낮기 때문에 L_1-회귀분석을 선호한다.

목적함수 (1.1)의 최적화 문제를 해결하기 위한 알고리즘들이 개발되었는데 주로 선형계획법 접근방식을 채택하고 있다. 대표적인 예로서 Barrodale and Roberts(1973)와 Armstrong *et al.* (1979)의 알고리즘이 이 범주에 속한다. 다른 형태의 L_1-알고리즘으로는 Schlossmacher(1973)와 Wesolowsky(1981)가 제안한 것들이 있다. 한편 Sherali, Skarpness and Kim(1988)은 데이터마이닝에서와 같이 회귀자료의 규모가 큰 경우에 사용할 수 있도록 선형척도변환(linear scaling transformation)을 적용하여 계산효율성을 개선한 L_1-알고리즘을 개발하였으며, Kim(1998)은 선형등식과 부등식형태의 제약조건이 주어진 상황에서의 L_1-알고리즘을 제안하였다.

이와 같이 L_1-추정법이나 알고리즘에 관한 연구는 상당히 이루어졌지만 가설검정에 관한 연구는 많이 이루어지지 않았기 때문에 L_1-회귀분석이 L_2-회귀분석만큼 널리 사용되지 않고 있는 실정이다. L_1-회귀 가설검정에는 일반적으로 Wald검정, 우도비검정과 Lagrange승수검정 등이 적용되는데, Wald검정과 우도비검정의 검정통계량 값을 구하기 위해서는 척도모수를 추정해야 한다. Cox and Hinkley(1974)와 McKean and Schrader(1987)는 척도모수 추정법을 제안하였으며 이러한 추정법들을 가설검정에 적용하는 방안에 관한 연구들이 많이 이루어졌다. 그러나 척도모수 추정법에 관한 연구들은 척도모수 추정법들 간의 효율성 비교에 그쳤고, 가설검정에 관한 연구들은 척도모수의 추정법을 특정한 것으로 전제하고 검정력을 비교하였으며, 대부분의 연구들이 단순회귀모형을 대상으로 검정력을 비교하였다. 따라서 본 논문에서는 L_1-회귀 가설검정의 검정력을 향상시키기 위해 재추출방법인 붓스트랩방법과 잭나이프방법을 L_1-추정량의 분산과 척도모수의 추정에 적용하는 방안을 모색하고, 다중회귀모형에서의 일반선형가설에 대해 검정법과 추정법을 조합한 모든 검정방법의 검정력을 측정하여 비교분석하고자 한다.

2. L_1-회귀에서의 가설검정법

Bassett and Koenker(1978)는 회귀모형에서의 L_1-추정량의 점근적 분포를 이론적으로 규명하였다. 즉, $\lim_{n\to\infty} n^{-1}X^TX=\Sigma$를 만족시키는 양정치(positive definite) 행렬 Σ가 존재하고, F는 연속적인 분포이며 $f(F^{-1}(1/2))>0$이라는 가정 하에서 L_1-추정량 $\hat{\beta}$ 의 분포는 다음과 같다. 즉,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) \xrightarrow{d} N(0, \lambda^2\Sigma^{-1}), \tag{2.1}$$

여기서 $\lambda=[2f(u)]^{-1}$ (>0)는 척도모수이며 $f(u)$은 중위수에서의 오차 밀도함수의 값이다. 그리고 λ^2/n은 오차분포 F로부터 얻은 확률표본의 중위수의 근사적 분산을 의미한다.

일반적으로 L_1-회귀계수에 대한 일반선형가설은 다음과 같은 형태로 설정된다.

$$H_0: R\beta=r, \quad H_1: R\beta \neq r, \tag{2.2}$$

여기서 R은 계수가 $q(\leq p)$인 $q\times p$ 행렬이고 r은 q-벡터인데 $R\beta$는 독립적인 q개의 추정가능한 (estimable) 선형함수를 구성한다고 가정한다. 점근적 분포 (2.1)을 바탕으로 Koenker(1987)는 선형가설 (2.2)을 검정하기 위한 통계량으로서 Wald검정 통계량, 우도비검정 통계량과 Lagrange승수검정 통계량을 제안하고 모든 통계량이 근사적으로 χ^2 분포를 따른다는 사실을 증명하였다. L_1-검정 통계량들에는 2가지 형태의 L_1-추정량이 적용되는데, 목적함수 (1.1)를 제약조건 없는 상황에서 최소화하는 추정량: $\hat{\beta}=min[S(\beta):\beta\in\mathbb{R}^p]$인 비제약(unconstrained)추정량과 귀무가설을 제약조건으로 추가한 상황에서의 추정량: $\tilde{\beta}=min[S(\beta), R\beta=r:\beta\in\mathbb{R}^p]$인 제약(constrained) 추정량이다. 첫째, Wald검정 통계량은 다음과 같이 정의된다.

$$WD=\lambda^{-2}(R\hat{\beta}-r)^T[R(X^TX)^{-1}R^T]^{-1}(R\hat{\beta}-r).$$

대체로 비제약추정의 계산효율성이 제약추정의 계산효율성보다 높기 때문에 비제약추정량에 바탕을 둔 Wald검정 통계량의 계산효율성이 다른 통계량보다 상대적으로 높다는 장점이 있다. 둘째, 우도비검정 통계량은 다음과 같이 정의된다.

$$LR=2\lambda^{-1}[S(\tilde{\beta})-S(\hat{\beta})],$$

여기서 $S(\tilde{\beta})$은 제약추정치에 의한 목적함수 (1.1)의 값인데 제약조건 $R\beta=r$에 의해 축소된 모형에서의 잔차 벡터의 L_1-norm이고, $S(\hat{\beta})$는 비제약추정치에 의한 (1.1)의 값인데 완전모형으로부터 구한 잔차 벡터의 L_1-norm에 해당된다. 우도비통계량은 비제약추정량과 제약추정량을 동시에 요구하므로 계산효율성이 가장 낮은 통계량이라 할 수 있다. 셋째, Lagrange승수검정 통계량은 제약추정치에 의한 L_1-목적함수의 경사도(gradient)에 바탕을 두고 다음과 같이 정의된다.

$$LM=ng^T(X^TX)^{-1}R^T[R(X^TX)^{-1}R^T]^{-1}R(X^TX)^{-1}g$$

여기서 $g=n^{-1/2}X^Th$, $h_i=sgn(y_i-x_i^T\tilde{\beta})$인데, x_i^T는 행렬 X의 i-번째 행벡터를 의미한다. 제약

추정량을 적용하는 Lagrange승수 통계량의 계산효율성은 Wald통계량보다 낮다. 한편, Lagrange 승수 통계량은 다른 통계량들과는 달리 척도모수 λ의 추정치나 L_1-추정량의 분산추정치를 요구하지 않는다는 특징을 갖는다. 그러나 Lagrange승수 검정법을 도입하는 경우 구간추정을 동시에 실행할 수 없다는 단점을 가지고 있기 때문에 실용성이 낮다고 평가된다.

앞의 2가지 기본가정과 함께 $R\beta = r + R\gamma/\sqrt{n}$의 관계를 갖는 $\gamma \in \mathbb{R}^p$가 존재한다는 가정이 추가로 충족되면, Wald통계량과 우도비통계량 그리고 Lagrange승수통계량은 귀무가설 하에서는 근사적으로 $\chi^2(q)$ 분포를 따르고, 국소(local) 대립가설: $R\beta = r + R\gamma/\sqrt{n}$ 하에서는 비심모수가 $\nu = 1/(n\lambda^2)\gamma^T R^T[R(X^TX)^{-1}R^T]^{-1}R\gamma$ 인 $\chi^2(q)$ 분포를 근사적으로 따른다는 사실이 Koenker (1987)에 의해 증명되었다. 한편, 일반선형가설 (2.2)의 단순한 형태, $H_0 : \beta_E = 0$, $H_1 : \beta_E \neq 0$ ($E=\{1, 2, \ldots, p_2\}$, $p_2 \leq p$)을 검정하기 위한 통계량들이 비교적 간단한 형태로 표현될 수 있는데, Koenker(1987)는 이 경우의 검정통계량들이 귀무가설 하에서 근사적으로 $\chi^2(p_2)$ 분포를 따른다는 사실을 증명하였다. 그리고 λ가 알려졌다고 가정하고 검정법들의 검정력을 측정하는 모의실험을 하였는데, 소 표본의 경우 검정력이 만족스럽지 못한 수준임을 보이고 이러한 문제점을 해결하기 위하여 λ를 적절한 방법으로 추정하는 것이 중요하다는 점을 강조하였다.

3. L_1-추정량의 분산 추정법

Wald검정 통계량과 우도비검정 통계량은 척도모수 λ를 포함하기 때문에 이를 추정해야 한다. λ는 $f(u)$에 의존적이기 때문에 오차의 분포에 대한 가정이 요구되지만, Cox and Hinkley(1974)는 오차의 분포에 대한 가정이 없이 λ를 추정할 수 있는 방법을 제안하였다. 이 방법은 분포무관 (distribution-free) 신뢰구간의 표준화 거리를 바탕으로 λ을 추정한다. 즉,

$$\hat{\lambda} = n(e_{(t)} - e_{(s)})[2(t-s)]^{-1}, \tag{3.1}$$

여기서 $e_{(\cdot)}$는 순서화된 L_1-잔차를 의미하며, t와 s의 값으로는 잔차의 중위수 지표로부터 좌우대칭으로 멀지 않은 두 값을 선택한다. Dielman and Pfaffenberger(1990)는 모의실험을 통하여 검정통계량들의 특성을 연구하였는데, Cox-Hinkley 추정법을 채택한 우도비검정이나 Wald검정보다 Lagrange승수검정의 검정력이 우수하다고 하였다. 그러나 λ나 오차의 분산을 적절히 추정할 수 있는 경우에는 Lagrange승수검정과 우도비검정은 검정력에 있어서 거의 차이가 없다고 밝혔다. 한편, Sposito and Tveite(1986)는 $t = [n/2] + v$, $s = [n/2] - v$, $v = (1/2)[\delta n]$, $\delta \in (0, 1)$ ($[.]$는 최대정수 값을 의미함)와 같이 t와 s의 값을 결정할 것을 제안하였으나 δ값의 결정이 임의적이라는 단점을 가지고 있다. 특히 Dielman and Pfaffenberger(1990)는 관찰치의 수가 작은 경우 t와 s의 선택이 검정력에 매우 큰 영향을 준다는 사실을 밝혔다. 한편, (3.1)에 의해 λ를 추정하는 과정에서 $e_{(t)} = e_{(s)}$인 상황이 발생할 수 있는데, 이런 경우에는 $e_{(t)} \neq e_{(s)}$가 될 때까지 t를 1씩 증가시키고 동시에 s를 1씩 감소시키는 방법을 적용해야 한다.

Cox-Hinkley 추정법 (3.1)은 McKean and Schrader(1987)에 의해 개선되었다. 즉, L_1-추정에 의해 구한 잔차들 중에는 그 값이 0인 것들(c개)이 있으므로 이 잔차들을 제외한 나머지 $n'=n-c$ 개의 잔차인 $\{\check{e}_1, ..., \check{e}_{n'}\}$을 바탕으로 다음과 같이 λ를 추정할 것을 제안하였다.

$$\hat{\lambda} = \sqrt{n'}(\check{e}_{(n-r+1)} - \check{e}_{(r)})(2z_{\alpha/2})^{-1},\ r = [(n'+1)/2 - z_{\alpha/2}\sqrt{n'/4}], \tag{3.2}$$

여기서 $\check{e}_{(r)}$와 $\check{e}_{(n-r+1)}$는 0인 잔차를 제외하고 순서화한 r번째와 $n-r+1$번째 L_1-잔차이고 [.]는 최대정수함수이며, α의 최적치는 0.05다. 한편, (3.2)에 의한 λ추정 과정에서도 $\check{e}_{(n-r+1)} = \check{e}_{(r)}$인 상황이 발생할 수 있는데, 이런 경우 $\check{e}_{(n-r+1)} \neq \check{e}_{(r)}$가 될 때까지 r을 1씩 감소시켜 나가야 한다. Dielman and Rose(1997)는 λ의 추정법으로서 McKean-Schrader 방법을 적용하여 검정력을 비교하였는데 Lagrange승수검정과 Wald검정보다 우도비검정의 검정력이 높다는 사실을 보였다.

Cox-Hinkley 추정법이나 McKean-Schrader 추정법에 의해 λ가 추정되면 L_1-추정량의 분산은 $\widehat{V(\hat{\beta})} = \hat{\lambda}^2(X^TX)^{-1}$로 추정될 수 있다. 그러나 Cox-Hinkley 추정이나 McKean-Schrader 추정에서는 임의로 결정하도록 되어 있는 δ나 α의 크기에 따라 λ의 추정치가 극히 민감하게 영향을 받는 문제가 있으며, 이러한 추정법에 바탕을 둔 가설검정의 검정력이 만족스럽지 못하다는 단점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 재추출방법인 잭나이프방법과 붓스트랩방법을 L_1-추정량의 분산추정에 적용하고자 한다.

Quenouille(1949)이 제안한 잭나이프방법은 통계학의 여러 영역에서 활용되고 있는데, 추정량의 분산을 추정하는데 유용한 방법으로 알려졌다. 특히, 잭나이프추정법은 로버스트한 방법이기 때문에 L_1-추정량의 분산을 추정하는데 활용될 수 있다. 잭나이프방법은 추정량의 특성을 파악하기 위하여 표본을 체계적으로 분할하는 방식을 취한다. 즉, 표본을 크기 k인 r개의 집단으로 분할하고 h-번째 집단을 제외한 축소표본으로부터 추정량을 얻는데 이 추정량을 $\hat{\beta}_{(h)}$라고 하자. 그러면

$$\widehat{V(\hat{\beta}_j)}_J = [r(r-1)]^{-1}\sum_{h=1}^{r} [\hat{\beta}_{j(h)} - r^{-1}\sum_{h=1}^{r}\hat{\beta}_{j(h)}]^2,\quad j = 1, 2, ..., p,$$

을 $V(\hat{\beta}_j)$의 잭나이프추정량으로 사용할 수 있다. 잭나이프방법에서는 $k=1$인 시스템('delete-1' 잭나이프)을 흔히 채택하는데 모집단 분포에 대한 일반적인 가정들이 충족되는 상황에서 최적의 방법이라고 알려져 있다(Rao and Webster, 1966). 그러나 추정량이 표본에 대해 미분가능한 함수가 아닌 경우에는 일치추정량이 될 수 없는데 대표적인 예가 표본중위수의 분산의 잭나이프추정량이다 (Efron and Tibshirani, 1993). 따라서 'delete-1' 방법 대신에 'delete-k' $(0 < k < n)$ 잭나이프방법을 채택할 수 있는데, 이 방법에서는 'delete-1' 잭나이프추정에 비하여 보다 광범위한 일치추정량을 얻을 수 있다. 일반적인 'delete-k' 잭나이프방법은 다음과 같다. 즉, 어떤 정수 k에 대해서 $d=n-k$라 하고 S_d는 $\{1, ..., n\}$의 부분집합이며 크기가 d라고 하자. $s = \{i_1, ..., i_d\} \in S_d$에

서의 L_1-추정량을 $\hat{\beta}_s$라 하면 $V(\hat{\beta}_j)$의 'delete-k' 잭나이프추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{V(\hat{\beta}_j)}_K = k(dN)^{-1} \sum_{s \in S_d} (\hat{\beta}_{js} - N^{-1} \sum_{s \in S_d} \hat{\beta}_{js})^2, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

여기서 N은 부분집합의 총 개수를 의미한다. 한편 Furno(1998)는 L_1-norm에 바탕을 둔 추정량,

$$\widetilde{V(\hat{\beta}_j)}_K = k[n(k+1)N]^{-1} \sum_{s \in S_d} |\hat{\beta}_{js} - \hat{\beta}_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

을 $V(\hat{\beta}_j)$의 잭나이프추정량으로 제안하였다. 그런데 이러한 추정법들은 k의 크기에 따라서 방대한 분량의 계산이 요구된다는 한계를 가지고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 붓스트랩방법을 L_1-추정량의 분산추정에 활용하고자 한다.

Efron(1979)이 제안한 붓스트랩방법은 표본으로부터 m개(Efron and Tibshirani(1993)는 m의 크기를 25-200으로 결정하는 것이 적절하다고 하였음)의 독립적인 붓스트랩표본을 복원추출하는 과정을 기본으로 한다. 즉, 표본은 모집단에 관한 정보를 가지고 있기 때문에 표본을 일종의 모집단으로 간주하고 확률표본을 재추출하여 통계량의 분포를 도출해 낼 수 있다는 생각에서 출발한다. 재추출된 붓스트랩표본의 조건표본분포를 바탕으로 통계적 추론이 실행되기 때문에, 붓스트랩방법은 모집단분포에 대해 별로 알려진 것이 없는 상황에서 매우 유용한 추론방법이라 할 수 있다. 즉, 추정량의 분포가 대 표본에서의 점근적 분포만 알려졌거나, 분포에 대한 가정이 의심스러운 경우에 신뢰구간 추정이나 가설검정을 위하여 붓스트랩방법이 많이 활용된다. 특히, 회귀모형이 모수에 대해 비선형이거나 능형회귀나 로버스트회귀와 같이 L_2-추정 이외의 추정방법을 적용할 때 붓스트랩방법이 유용하다. 따라서 L_1-추정량의 분산추정에 붓스트랩방법을 적용할 수 있다.

붓스트랩방법을 L_1-추정량의 분산추정에 적용하는 경우 표본의 변수들 간에 회귀모형의 연관성이 존재하기 때문에 붓스트랩방법에서 이 연관성이 유지되어야 한다. 회귀모형에 대한 붓스트랩 알고리즘에서는 (β, F)를 추정해야 하는데 β의 추정량으로는 L_1-추정량이 가능하지만 F를 추정하는 것은 용이하지 않다. 만약 β가 알려졌다면 F는 오차의 경험분포에 의해 추정될 수 있지만 $\hat{\beta}$을 바탕으로 하는 경우 F는 잔차의 경험분포 $\hat{F}$으로 추정될 수밖에 없다. 이와 같이 $(\hat{\beta}, \hat{F})$을 얻은 후 회귀모형을 위한 붓스트랩표본을 도출할 수 있는데, 우선 각 e_i^*가 n개의 e_j 중 어느 하나와 같을 확률이 $1/n$이 되도록 붓스트랩오차 $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$를 추출한다. 그러면 붓스트랩 반응변수 y_i^*는 $y_i^* = x_i^T\hat{\beta} + e_i^*$의 관계식에 의해 생성된다. 크기 n인 m개의 붓스트랩표본을 반복추출하고, 각 표본에서 새로운 회귀모형 $y^* = X\beta^* + \epsilon^*$을 설정하고 $\sum_{i=1}^{n} |y_i^* - x_i^T\beta^*|$을 최소화하는 β^*을 찾으면 곧 붓스트랩 L_1-추정치 $\hat{\beta}^*$이 된다. $\hat{\beta}^*$을 구한 후 그 추정치들의 분산을 추정하면 곧 L_1-

추정량의 분산추정치가 된다. L_1-추정량 $\hat{\beta}$의 분포의 특성은 적용된 재추출방법과는 무관하게 붓스트랩표본을 바탕으로 도출될 수 있는데, 그 이유는 붓스트랩표본의 관찰치들이 표본의 경험분포 $\hat{F}$을 따르며 붓스트랩표본으로부터 $\hat{\beta}$ 과 동일한 함수에 의해 계산된 추정량 $\hat{\beta}^*$는 $\hat{\beta}$ 의 붓스트랩 관찰치로 관주될 수 있기 때문이다. 따라서 $\hat{\beta}$의 분산 $V(\hat{\beta})$의 이상적인 붓스트랩 추정량은 $V(\hat{\beta}^*)$의 추정량이라 할 수 있으며 이것은 붓스트랩표본으로부터 추정될 수 있다. L_1-추정량의 분산의 붓스트랩추정을 위한 알고리즘은 다음과 같이 요약된다. 즉,

[단계 1] 표본으로부터 L_1-추정량 $\hat{\beta}$을 구하고 잔차 $e_i = y_i - \boldsymbol{x}_i^T\hat{\beta}$ 을 계산한 후, n개씩을 복원재추출하여 m개의 붓스트랩 잔차 집합들을 구성한다.

[단계 2] 복원추출된 잔차를 e^*라 할 때, 각 잔차 집합별로 $\boldsymbol{y}^* = X\hat{\beta} + \boldsymbol{e}^*$의 관계에 의해 반응변수 값의 붓스트랩표본 y_i^*를 생성한다.

[단계 3] 회귀모형 $\boldsymbol{y}^* = X\beta^* + \boldsymbol{\epsilon}^*$를 설정하고 각 집합별로 붓스트랩 L_1-추정치 $\hat{\beta}^*$을 구한다. 그리고 L_1-추정량 분산의 붓스트랩 추정량은 다음과 같이 정의된다.

$$\widehat{V(\hat{\beta}_j)}_B = (m-1)^{-1}\sum_{b=1}^{m} (\hat{\beta}_{jb}^* - m^{-1}\sum_{b=1}^{m} \hat{\beta}_{jb}^*)^2, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

여기서 $\hat{\beta}_{jb}^*$는 b번째 붓스트랩표본에서의 β_j의 추정량을 의미한다. 붓스트랩 추정법은 잭나이프방법보다 요구되는 계산량이 현저히 적지만, Cox-Hinkley 추정법이나 McKean-Schrader 추정법보다는 많은 계산을 요구한다는 단점을 갖는다.

한편, 붓스트랩방법(혹은 잭나이프방법)에 의해 L_1-추정량의 분산이 추정되면 그 결과를 바탕으로 척도모수 λ을 추정해야 가설검정에 적용할 수 있다. 본 연구는 다중회귀모형을 대상으로 하기 때문에 다음과 같이 λ를 추정할 것을 제안한다. 즉,

$$\hat{\lambda} = median\,(\hat{\lambda}_j), \quad \hat{\lambda}_j^{\,2} = \widehat{V(\hat{\beta}_j)}_B \sum_{i=1}^{n} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2, \quad j = 1, \ldots, p,$$

여기서 x_{ji}는 행렬 X의 j번 째 열의 i번 째 값이고 $\bar{x}_j$는 j번 째 열의 평균을 의미한다.

4. 검정력의 비교분석

가설검정법 중에서 Lagrange승수 검정은 L_1-추정량의 분산과 관련이 없는 방법이므로 모의실험에서 제외하고 Wald검정(WD)과 우도비검정(LR)만을 고려하였다. 척도모수를 추정하기 위하여 Cox-Hinkley 추정법과 McKean-Schrader 추정법을 적용하였으며 L_1-추정량의 분산추정을 통해 척도모수 λ를 추정하는 방법인 잭나이프방법과 붓스트랩방법을 적용하였다. 각 검정법과 분산추

정법의 조합인 8가지 검정방법의 검정력을 측정하기 위하여 Monte Carlo 모의실험을 실행하였는데, 설명변수가 3개인 선형회귀모형을 설정하였으며 표본의 크기(n)는 20과 40을 선정하였다. 설명변수 X_1, X_2, X_3의 값은 각각 정규분포 N(0, 1), N(1, 2), N(2, 3)으로부터 생성하였고, 오차는 정규분포: N(0, 1), 균일분포: U(-1.5, 1.5), 오염된 정규분포: CN[N(0, 1)-80%, N(0, 25)-20%], Cauchy분포: Cauchy(0, 1), 변형된 Cauchy분포: |Cauchy(0, 1)| 등으로부터 생성하였다. 모수의 참값을 다양하게 지정한 후 회귀모형에 따라 반응변수 값을 생성하였으며, 5가지 귀무가설을 설정하여 <표 1>과 같은 15가지의 시나리오를 구성한 후 검정력을 측정하였다.

<표 1> Monte Carlo 모의실험을 위한 시나리오

시나리오		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
모수 값	β_0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	β_1	0.5	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
	β_2	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
	β_3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0
귀무가설		$\beta_1=0$			$\beta_2=0$			$\beta_3=0$			$\beta_1=\beta_2=0$			$\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$		

모의실험의 실행에 필요한 몇 가지 중요한 요소를 사전에 결정하였다. 즉, Cox- Hinkley 방법(CH)에서 $\delta=0.2$를 적용하였고, McKean-Schrader 방법(MS)에서 α의 크기는 McKean and Schrader(1987)의 제안에 따라 0.05를 적용하였고, 붓스트랩 추정방법(BT)에서 붓스트랩 반복수 m의 크기는 Efron and Tibshirani(1993)가 제안한 범위 내에서 100을 채택하였으며, 잭나이프 추정방법(JK)에서 k는 설명변수의 수와 같은 값을 적용하는 것이 일반적이지만 계산량이 지나치게 방대해지는 문제점 때문에 $k=1$을 적용하였다 (실제로 $k=3$을 적용해도 모의실험 결과 검정력에는 유의적인 차이가 없었음). 그리고 L_1-추정치는 Kim(1998)의 알고리즘을 사용하여 구하였다.

모의실험은 오차분포의 종류, 표본의 크기, 시나리오를 블럭변수로 지정한 확률화완전블럭계획법을 적용하여 실행하였다. 모의실험 반복횟수는 1,000회로 결정하고 유의수준은 5%를 적용하였다. L_1-추정량의 근사적 분포는 밝혀졌지만 본 연구에서의 표본은 소 표본이므로 근사분포이론을 직접 적용하기 어렵기 때문에 각 시나리오별 귀무가설 하에서 구한 검정통계량 계산치 1,000개의 95백분위수에 해당되는 값(관측유의수준(observed significance level)이라고 함)을 임계치로 결정하였다. 각 검정방법을 적용하여 귀무가설을 기각한 경우의 수를 기록하였으며, 기각한 경우의 비율이 검정력의 측정치로 간주되었는데 검정력 측정결과는 <표 2>에 요약되었다.

Monte Carlo 모의실험 결과를 종합적으로 분석하기 위하여 확률화완전블럭계획 모형을 바탕으로 한 분산분석 및 다중비교를 실행한 결과, 검정법 및 분산추정법들 사이에 유의적인 차이가 있었으며, 분산추정법 중에서는 붓스트랩방법의 검정력이 가장 높았고 다음은 McKean-Schrader 방법, 잭나이프방법, Cox-Hinkley 방법 순서였다. 그리고 검정법 중에서는 우도비검정이 Wald검정보다 검정력이 높은 것으로 나타났는데 이 결과는 Dielman and Pfaffenberger(1990)와 Dielman and Rose(1997)의 연구결과와 일치한다. 검정법과 분산추정법의 조합에 대해 분석하면, '붓스트랩 추정과 우도비검정'의 조합이 가장 높은 검정력을 보였으며 다음은 'McKean-Schrader 방법과 우

도비검정', '잭나이프 추정과 우도비검정', '붓스트랩 추정과 Wald검정', 'McKean- Schrader 방법과 Wald검정', '잭나이프 추정과 Wald검정', 'Cox-Hinkley 방법과 우도비검정', 'Cox-Hinkley 방법과 Wald검정' 순서의 검정력을 보였다. 한편, 각 분포별 검정력을 분석하기 위하여 표본크기와 시나리오를 블록변수로 지정하고 분산분석과 다중비교를 실행한 결과, 모든 분포에 있어서 검정법이나 분산추정법 사이에 유의적인 차이가 있고 검정법과 분산추정법의 조합 사이에도 유의적인 차이가 있는 것으로 나타났다. 모든 분포에서 '붓스트랩 추정과 우도비검정'의 조합이 가장 높은 검정력을 보였고, 잭나이프 추정은 우도비검정과 결합되는 경우 균일분포와 변형된 Cauchy분포에서 McKean-Schrader 방법보다 검정력이 약간 높은 것으로 나타났다. 오차분포의 종류별 모의실험 결과는 <표 3>~<표 7>에 수록되었다.

<표 2> 검정방법별 검정력 평균

검정방법		정규분포	균일분포	오염된 정규분포	Cauchy 분포	변형된 Cauchy분포	평 균
WD	CH	0.274	0.272	0.273	0.199	0.256	0.255
	MS	0.839	0.803	0.838	0.673	0.714	0.773
	BT	0.900	0.901	0.900	0.687	0.764	0.830
	JK	0.749	0.725	0.748	0.530	0.609	0.672
LR	CH	0.580	0.561	0.580	0.419	0.513	0.531
	MS	0.899	0.873	0.900	0.754	0.805	0.846
	BT	0.933	0.927	0.933	0.788	0.866	0.890
	JK	0.891	0.879	0.891	0.729	0.807	0.840

5. 결 론

회귀분석에서 수직이상점에 대해 로버스트한 L_1-추정이 사용되는데, L_1-추정 방법이나 알고리즘에 관한 연구에 비해 가설검정에 관한 연구는 많이 이루어지지 않은 실정이기 때문에 본 논문에서는 L_1-회귀에서의 가설검정 방법에 관하여 연구하였다. 가설검정법으로서 우도비검정과 Wald검정을 고려하였으며, 가설검정에 필요한 L_1-추정량의 분산이나 척도모수의 추정법으로서 기존의 Cox-Hinkley 방법과 McKean-Schrader 방법을 검토하고, 이 방법들의 한계를 극복하기 위하여 재추출법인 잭나이프방법과 붓스트랩방법을 L_1-추정량의 분산추정에 적용하였다.

Monte Carlo 모의실험에 의해 검정법과 분산추정법의 조합별로 검정력을 측정하였다. 다양한 특성을 갖는 오차분포별, 표본크기별, 그리고 귀무가설과 모수 값 지정에 따른 시나리오별로 검정방법들의 검정력을 측정하여 분산분석과 다중비교를 실행하였다. 분석결과, 검정법 및 분산추정법들 사이에 유의적인 차이가 있었으며, 분산추정법 중에서 붓스트랩방법의 검정력이 가장 높았고 다음은 McKean-Schrader 방법이었다. 잭나이프 추정법은 붓스트랩 추정법에 비하여 계산량이 많다는 단점과 함께 검정력도 낮았다. 그리고 Cox-Hinkley 방법이 검정력 측면에서 가장 열등한 추정법인 것으로 나타났다. 한편, 검정법 중에서는 우도비검정이 Wald검정보다 검정력이 높았다. 종합컨대, '붓스트랩 추정법과 우도비검정법'의 조합이 가장 높은 검정력을 보였으며 'Cox-Hinkley

방법과 Wald검정법'의 조합이 가장 낮은 검정력을 보였다. 따라서 붓스트랩 추정법이 가장 우수한 분산추정법이고 우도비검정법에 붓스트랩 추정치를 적용하는 것이 가장 검정력 높은 L_1-검정방법이라 할 수 있다.

<표 3> 오차가 정규분포인 경우의 검정력 측정치

n	검정방법		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
20	WD	CH	.10	.17	.34	.12	.22	.39	.18	.32	.53	.11	.20	.36	.12	.22	.40
		MS	.26	.75	1.00	.41	.91	1.00	.63	.99	1.00	.36	.89	1.00	.46	.96	1.00
		BT	.34	.89	1.00	.54	.98	1.00	.79	1.00	1.00	.53	.99	1.00	.69	1.00	1.00
		JK	.19	.52	.99	.33	.88	1.00	.47	.98	1.00	.23	.65	1.00	.26	.79	1.00
	LR	CH	.16	.37	.73	.23	.51	.89	.32	.65	.94	.19	.42	.76	.17	.37	.67
		MS	.36	.84	1.00	.52	.97	1.00	.75	1.00	1.00	.56	.98	1.00	.65	1.00	1.00
		BT	.44	.93	1.00	.64	.99	1.00	.85	1.00	1.00	.72	1.00	1.00	.85	1.00	1.00
		JK	.36	.85	1.00	.51	.98	1.00	.74	1.00	1.00	.46	.98	1.00	.54	1.00	1.00
40	WD	CH	.13	.26	.42	.20	.35	.58	.16	.30	.47	.14	.26	.42	.13	.23	.39
		MS	.54	.97	1.00	.78	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	.69	1.00	1.00	.65	1.00	1.00
		BT	.66	1.00	1.00	.89	1.00	1.00	.98	1.00	1.00	.84	1.00	1.00	.87	1.00	1.00
		JK	.30	.87	1.00	.58	1.00	1.00	.82	1.00	1.00	.35	.96	1.00	.33	.94	1.00
	LR	CH	.21	.52	.89	.37	.79	.99	.41	.80	.99	.31	.68	.95	.39	.76	.96
		MS	.61	.99	1.00	.87	1.00	1.00	.96	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		BT	.69	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	.99	1.00	1.00	.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		JK	.57	.99	1.00	.87	1.00	1.00	.97	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

<표 4> 오차가 균일분포인 경우의 검정력 측정치

n	검정방법		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
20	WD	CH	.10	.17	.31	.13	.25	.44	.16	.29	.52	.10	.18	.34	.11	.19	.36
		MS	.23	.67	1.00	.32	.87	1.00	.62	1.00	1.00	.31	.86	1.00	.39	.94	1.00
		BT	.42	.92	1.00	.56	.99	1.00	.82	1.00	1.00	.57	1.00	1.00	.75	1.00	1.00
		JK	.17	.49	1.00	.30	.82	1.00	.46	.98	1.00	.22	.67	1.00	.27	.79	1.00
	LR	CH	.12	.26	.57	.21	.50	.88	.31	.67	.94	.15	.36	.68	.17	.37	.69
		MS	.27	.81	1.00	.42	.98	1.00	.74	1.00	1.00	.39	.98	1.00	.56	1.00	1.00
		BT	.38	.94	1.00	.64	1.00	1.00	.89	1.00	1.00	.67	1.00	1.00	.85	1.00	1.00
		JK	.25	.81	1.00	.48	.99	1.00	.80	1.00	1.00	.42	.99	1.00	.53	1.00	1.00
40	WD	CH	.12	.23	.42	.16	.32	.54	.19	.36	.57	.13	.26	.46	.12	.23	.41
		MS	.39	.94	1.00	.69	1.00	1.00	.86	1.00	1.00	.52	.99	1.00	.50	.99	1.00
		BT	.60	.99	1.00	.85	1.00	1.00	.95	1.00	1.00	.79	1.00	1.00	.82	1.00	1.00
		JK	.26	.77	1.00	.52	.99	1.00	.69	1.00	1.00	.32	.89	1.00	.28	.85	1.00
	LR	CH	.21	.55	.93	.30	.69	.96	.41	.82	.99	.30	.64	.94	.43	.79	.98
		MS	.46	.99	1.00	.79	1.00	1.00	.94	1.00	1.00	.87	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		BT	.62	1.00	1.00	.87	1.00	1.00	.99	1.00	1.00	.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		JK	.49	1.00	1.00	.79	1.00	1.00	.96	1.00	1.00	.87	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

<표 5> 오차가 오염된 정규분포인 경우의 검정력 측정치

n	검정방법		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
20	WD	CH	.10	.17	.34	.11	.22	.39	.18	.32	.53	.10	.20	.36	.12	.22	.40
		MS	.26	.75	1.00	.41	.91	1.00	.63	.99	1.00	.36	.89	1.00	.46	.96	1.00
		BT	.34	.89	1.00	.54	.98	1.00	.79	1.00	1.00	.53	.99	1.00	.69	1.00	1.00
		JK	.19	.52	.99	.33	.88	1.00	.47	.98	1.00	.23	.65	1.00	.26	.79	1.00
	LR	CH	.16	.37	.73	.23	.51	.89	.32	.65	.94	.19	.42	.76	.17	.37	.67
		MS	.36	.84	1.00	.52	.97	1.00	.75	1.00	1.00	.57	.98	1.00	.65	1.00	1.00
		BT	.44	.93	1.00	.64	.99	1.00	.85	1.00	1.00	.72	1.00	1.00	.85	1.00	1.00
		JK	.36	.85	1.00	.51	.98	1.00	.74	1.00	1.00	.46	.98	1.00	.54	1.00	1.00
40	WD	CH	.13	.26	.42	.20	.35	.58	.16	.30	.47	.14	.26	.42	.12	.23	.39
		MS	.54	.97	1.00	.78	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	.69	1.00	1.00	.65	1.00	1.00
		BT	.66	1.00	1.00	.89	1.00	1.00	.98	1.00	1.00	.84	1.00	1.00	.87	1.00	1.00
		JK	.30	.87	1.00	.58	1.00	1.00	.82	1.00	1.00	.35	.96	1.00	.33	.94	1.00
	LR	CH	.21	.52	.89	.37	.79	.99	.41	.80	.99	.31	.68	.95	.39	.76	.96
		MS	.61	.99	1.00	.87	1.00	1.00	.96	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		BT	.69	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	.99	1.00	1.00	.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		JK	.57	.99	1.00	.87	1.00	1.00	.97	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

<표 6> 오차가 Cauchy분포인 경우의 검정력 측정치

n	검정방법		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
20	WD	CH	.08	.12	.22	.09	.16	.32	.11	.19	.38	.08	.13	.25	.08	.14	.27
		MS	.12	.35	.78	.22	.58	.95	.30	.71	.98	.16	.50	.91	.21	.60	.96
		BT	.09	.31	.91	.19	.69	1.00	.26	.88	1.00	.12	.51	.99	.15	.70	1.00
		JK	.08	.17	.54	.11	.36	.93	.17	.51	.99	.08	.22	.74	.10	.29	.89
	LR	CH	.10	.21	.47	.14	.32	.65	.18	.42	.75	.11	.22	.51	.13	.24	.62
		MS	.19	.48	.88	.25	.65	.96	.44	.81	.99	.26	.65	.97	.33	.76	.98
		BT	.17	.54	.93	.28	.78	.99	.46	.89	1.00	.27	.80	1.00	.39	.93	1.00
		JK	.13	.39	.88	.21	.67	.98	.38	.85	1.00	.18	.65	.99	.22	.72	.87
40	WD	CH	.09	.16	.29	.12	.23	.41	.16	.31	.50	.10	.18	.24	.10	.17	.30
		MS	.31	.78	1.00	.53	.94	1.00	.67	.98	1.00	.42	.91	1.00	.40	.92	1.00
		BT	.38	.80	1.00	.26	.98	1.00	.84	1.00	1.00	.32	.96	1.00	.31	.96	1.00
		JK	.20	.58	.99	.28	.82	1.00	.38	.95	1.00	.21	.62	.96	.17	.56	1.00
	LR	CH	.13	.32	.68	.22	.50	.85	.29	.63	.92	.17	.40	.65	.28	.58	.88
		MS	.36	.83	1.00	.59	.96	1.00	.74	.99	1.00	.63	.97	1.00	.94	1.00	1.00
		BT	.45	.87	1.00	.45	.98	1.00	.81	.99	1.00	.69	.99	1.00	.98	1.00	1.00
		JK	.31	.84	1.00	.55	.97	1.00	.68	.99	1.00	.55	.97	1.00	.89	1.00	1.00

<표 7> 오차가 변형된 Cauchy분포인 경우의 검정력 측정치

n	검정방법		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
20	WD	CH	.09	.16	.27	.14	.24	.43	.16	.26	.46	.10	.18	.30	.11	.20	.34
		MS	.16	.43	.82	.32	.70	.95	.43	.81	.98	.21	.55	.90	.25	.63	.93
		BT	.14	.49	.99	.27	.85	1.00	.37	.96	1.00	.17	.78	1.00	.22	.89	1.00
		JK	.13	.30	.86	.14	.39	.97	.22	.65	1.00	.11	.29	.88	.13	.34	.97
	LR	CH	.15	.30	.57	.21	.45	.76	.28	.57	.84	.16	.32	.59	.16	.33	.59
		MS	.21	.57	.91	.39	.76	.97	.56	.90	.99	.35	.75	.97	.43	.84	.98
		BT	.27	.77	.99	.45	.88	1.00	.66	.97	1.00	.45	.92	1.00	.61	.98	1.00
		JK	.20	.64	.98	.31	.79	.99	.56	.95	1.00	.26	.76	1.00	.35	.91	1.00
40	WD	CH	.10	.19	.35	.18	.32	.54	.22	.39	.63	.11	.20	.36	.11	.19	.34
		MS	.38	.83	.99	.62	.96	1.00	.79	.99	1.00	.50	.92	1.00	.46	.91	1.00
		BT	.34	.93	1.00	.76	1.00	1.00	.92	1.00	1.00	.45	1.00	1.00	.39	1.00	1.00
		JK	.25	.71	1.00	.33	.92	1.00	.53	.99	1.00	.29	.85	1.00	.25	.78	1.00
	LR	CH	.20	.46	.82	.32	.67	.93	.42	.77	.97	.26	.55	.86	.34	.64	.91
		MS	.46	.90	1.00	.69	.97	1.00	.83	.99	1.00	.78	.99	1.00	.96	1.00	1.00
		BT	.50	.96	1.00	.82	1.00	1.00	.91	1.00	1.00	.86	1.00	1.00	.99	1.00	1.00
		JK	.40	.92	1.00	.70	.99	1.00	.85	1.00	1.00	.73	1.00	1.00	.97	1.00	1.00

참고 문헌

[1] Armstrong, R. D., Frome, E. L. and Kung, D. S.(1979). A revised simplex algorithm for the absolute deviation curve-fitting problem, *Communications in Statistics-Simulation of Computation*, Vol. 8, 175-190.

[2] Barrodale, I. and Roberts, F. D. K.(1973). An improved algorithm for discrete L_1-linear approximation, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 10, 839-848.

[3] Basset, Jr. G. and Koenker, R.(1978). Asymptotic theory of least absolute error regression, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, 618-621.

[4] Cox, D. R. and Hinkley, D. V.(1974). *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London.

[5] Dielman, T. E. and Pfaffenberger, R.(1982). LAV(least absolute value) estimation in linear regression; a review, *TIMS/Studies in the Management Sciences*, Vol. 19, 31-52.

[6] Dielman, T. E. and Pfaffenberger, R.(1990). Test of linear hypotheses and LAV(least absolute value) estimation: a Monte Carlo comparison, *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, Vol. 19, 1179-1199.

[7] Dielman, T. E. and Pfaffenberger, R.(1992). A further comparison of tests of hypothesis in LAV regression, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 14, 375-384.

[8] Dielman, T. E. and Rose, E. L.(1997). A note on hypothesis testing in LAV multiple regression: a small sample comparison, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 23, 381-388.

[9] Efron, B.(1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, Vol. 7, 1-26.

[10] Efron, B. and Tibshirani, R. J.(1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.

[11] Furno, M.(1998). Estimating the variance of the LAD regression coefficients, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 27, 11-26.

[12] Kim, B. Y.(1995). On the robustness of L_1-estimator in linear regression models, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 2, 277-287.

[13] Kim, B. Y.(1998). Constrained L_1-estimation in linear regression, *The Korean Communications in Statistics,* Vol. 5, 581-590.

[14] Koenker, R.(1987). A comparison of asymptotic testing methods for L_1-regression, *Statistical Data Analysis based on the L_1-norm and Related Methods*, ed. by Y. Dodge. 287-298.

[15] McKean, J. W. and Schrader, R. M.(1987). Least absolute errors analysis of variance, *Statistical Data Analysis based on the L_1-norm and Related Methods*, ed. by Y. Dodge. 297-306.

[16] Quenouille, M. H.(1949). Approximate tests of correlation in time series, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. B11, 18-84.

[17] Rao, J. N. K. and Webster, J. T.(1966). On two methods of bias reduction in the estimation of ratios, *Biometrika,* Vol. 53, 571-577.

[18] Rosenberg, B. and Carson, D.(1977). A simple approximation of the sampling distribution of least absolute residuals regression estimates, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 6, 421-437.

[19] Schlossmacher, E. J.(1973). An iterative technique for absolute deviations curve fitting, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 68, 857-859.

[20] Sherali, H., Skarpness, B. and Kim, B. Y.(1988). An assumption-free convergence analysis for a perturbation of the scaling algorithm for linear programs, with application to the L_1-estimation problem, *Naval Research Logistics*, Vol. 35, 473-492.

[21] Sposito, V. A. and Tveite, M. D.(1986). On the estimation of the variance of the median used in L_1-linear inference procedures, *Communications in Statistics-Theory and Method*, Vol. 15, 1367-1375.

[22] Wesolowsky, G. O.(1981). A new descent algorithm for the least absolute value regression problem, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 10, 479-491.

[2004년 3월 접수, 2004년 11월 채택]