The Korean Communications
in Statistics Vol. 11 No. 3, 2004
pp. 631-641

Optimal Restocking Policy of an Inventory with Constant Demand[1]

Jeong Jin Ki[2], Kyung Eun Lim[3], and Eui Yong Lee[4]

Abstract

In this paper, a model for an inventory whose stock decreases with time is considered. When a deliveryman arrives, if the level of the inventory exceeds a threshold α, no stock is delivered, otherwise a delivery is made. It is assumed that the size of a delivery is a random variable Y which is exponentially distributed. After assigning various costs to the model, we calculate the long-run average cost and show that there exist unique value of arrival rate of deliveryman α, unique value of threshold α and unique value of average delivery m which minimize the long-run average cost.

Keywords : inventory, Poisson process, long-run average cost, restocking policy

1. 서론

생산 활동을 거쳐 완성된 제품은 소비자로부터의 주문이 있기 전 까지는 창고에 보관되며, 이렇게 보관된 제품은 수요의 발생에 비례하여 줄어들게 된다. 만약 창고 내 재고 상태가 바닥난다면 수요에 맞는 적절한 공급이 이루어지지 않게 되며, 이는 기업에 큰 손실로 돌아오게 된다. 따라서 일정 수준 이하로 재고 수준이 떨어지면 다시 제품을 창고에 채워 재고 수준을 높여야 한다. 이러한 재고 상태를 확률 모형으로 나타낼 수 있다면 기업의 이익을 극대화하는 방법을 모색할 수 있을 것이다.

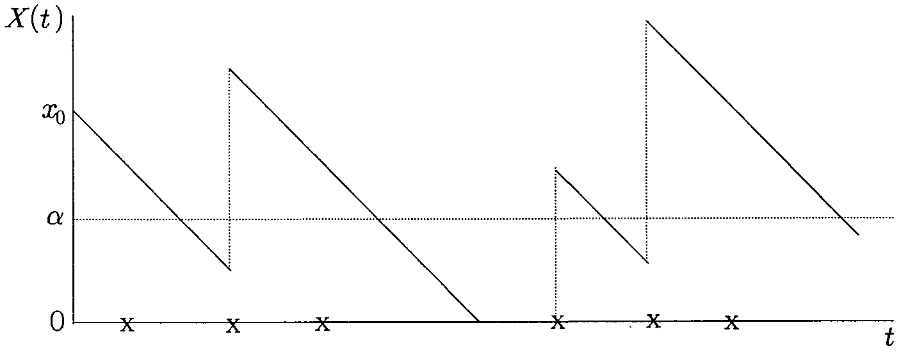
많이 알려진 재고 조절 정책은 (s,S)-정책으로, 재고 상태가 s 이하로 떨어지면 S 만큼 충전하는 정책이다. 이와 관련된 최근 논문은 Gavirneni(2001), Sethi와 Cheng(1997), Zheng(1991) 등이 있으며, Baxter와 Lee(1987), Lee와 Park(1991)은 재고에 대한 수요가 단위시간당 평균 μ로 일정하고, 도착률 $\lambda \geq 0$인 포아송과정을 따라 도착하는 배달원에 의해 다시 재고가 충전되는 재고 모형을 소개하였다. 배달원이 도착했을 때, 창고 내 재고의 양이 $\alpha \geq 0$ 이상이면 재고를 채우지 않고 그냥 돌아가며, α 미만이면 재고를 확률변수 $Y \geq \alpha$ 만큼 채우는 것으로 가정하였다. Lee와

1) This paper was supported by Sookmyung Women's University Research Fund, 2004
2) Graduate Student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742
E-mail: kijj0321@licos.co.kr
3) Graduate Student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742
4) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742

Park(1991)은 배달원이 올 때마다 드는 비용과 재고의 양이 비었을 때 입는 손해비용 등을 고려한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 최소화하는 λ의 값이 유일하게 존재함을 보였다.
본 연구에서는 확률변수 Y의 분포가

$$f(y) = \frac{1}{m} e^{-(y-\alpha)/m} \quad , \quad y \geq \alpha$$

인 경우를 고려하여, 기존의 연구에서 고려되지 않은 재고의 유지비용을 추가한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 최소화하는 배달원의 도착률 λ가 유일하게 존재함을 보인다. 더 나아가 이 비용을 최소화하는 적정수준 α와 평균 배달량 m의 값도 유일하게 존재함을 보이고 이들을 구하는 연구를 수행한다. 이 재고 모형의 재고량 $\{X(t),\ t \geq 0\}$의 표본경로는 다음과 같다.



x: 도착률 $\lambda \geq 0$인 포아송과정

그림 1.1: 재고량의 표본경로

2. 최적화

배달원이 올 때마다 드는 비용을 C_1, 단위재고량에 대한 단위시간당 유지 비용을 C_2, 창고가 비어 있을 때 드는 단위시간당 손실 비용을 C_3라고 하고, 재고량이 α에 닿는 시점을 내재된 재생점으로 정의하자. T^*를 재생과 재생 사이의 기간, N을 T^*동안 배달원이 오는 횟수, 장시간에 걸친 재고량의 기대값을 $E(X)$, 배달원이 도착했을 때 창고가 비어있을 확률을 p_0라고 하면, 장시간에 걸친 단위 시간당 평균 비용함수는 Ross(1996, p.133)의 재생보상정리에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} C(\lambda, \alpha, m) &= \frac{E(T^*\text{동안의 전체비용})}{E(T^*)} \qquad (2.1) \\ &= \frac{E(N)C_1 + \frac{1}{\lambda} p_0 C_3}{E(T^*)} + E(X)C_2 . \end{aligned}$$

여기서 T^*는 재고량이 a에 닿는 순간부터 다음 배달원이 올 때까지의 기간 E^λ와 배달원이 온 후 다시 재고량이 a에 닿을 때까지의 기간 T의 합으로 구할 수 있다. 이 때 E^λ는 평균이 $\frac{1}{\lambda}$인 지수확률변수이다. 따라서,

$$\begin{aligned} E(T^*) &= E(E^\lambda)+E(T) \\ &= \frac{1}{\lambda}+E\left(\frac{X'+Y-a}{\mu}\right)=\frac{\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)}{\lambda\mu}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

여기서 X'은 재충전 직전의 재고 상태이고, $X'=a-\min(a,\mu E^\lambda)$로 나타낼 수 있다.
또한, 한 주기 동안 배달원이 오는 횟수 N에 대한 기대값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(N) &= \lambda E(T^*) \\ &= \frac{\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)}{\mu}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

위의 결과에 Baxter와 Lee(1987)에 의해 구해진 장시간에 걸친 재고량의 기대값 $E(X)$와 배달원이 도착 했을 때 창고가 비어있을 확률인 $p_0=e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}$를 대입하여 풀면,

$$C(\lambda,a,m)=\frac{\widetilde{C}(\lambda,a,m)}{\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)} \tag{2.4}$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\lambda,a,m) &= \lambda\left[\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)\right]C_1+\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}C_3 \\ &\quad+\left[\mu(a+m)(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1)+\lambda\left(m^2+2am+\frac{3}{2}a^2\right)\right]C_2 \end{aligned}$$

이다. 이제 통제할 수 있는 변수 λ, a, m에 대해 비용함수를 최소화하는 문제를 생각해보자.

2.1. λ에 대한 최적화

a, m, μ를 임의의 상수로 고정하였을 때, $\lambda(\lambda\geq 0)$의 변화에 따른 비용함수를 $C(\lambda|a,m)$으로

정의하자. $C(\lambda|a,m)$을 λ에 대해 미분하면,

$$C'(\lambda|a,m)=\frac{A(\lambda)}{\left[\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)\right]^2}, \tag{2.5}$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \left[\lambda^2(a+m)^2+\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+2\lambda(a+m)\right)\right]C_1-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}(\lambda a+\mu)(a+m)C_3 \\ &\quad +\left[\mu(a+m)^2+ae^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\frac{a^2}{2}\lambda-\mu\left(m+\frac{a}{2}\right)\right)\right]C_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

이다.

정리1. 만약 $\mu C_1+\left(\frac{a^2}{2}+am+m^2\right)C_2\geq(a+m)C_3$이면, 비용함수 $C(\lambda|a,m)$은 $\lambda=0$일 때 최소값 C_3를 가지며, $\mu C_1+\left(\frac{a^2}{2}+am+m^2\right)C_2<(a+m)C_3$이면 비용함수 $C(\lambda|a,m)$을 최소화하는 유일한 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 존재한다.

증명 i) $\mu C_1+\left(\frac{a^2}{2}+am+m^2\right)C_2\geq(a+m)C_3$라고 가정하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\geq \left[\lambda^2(a+m)^2+\lambda\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}(a+2m)+\mu^2e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)\right]C_1 \\ &\quad +e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left[\mu a^2\left(e^{\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)+\mu am\left(e^{\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)+\mu m\left(e^{\frac{\lambda a}{\mu}}-1-\frac{\lambda a}{\mu}\right)(m+a)\right]C_2. \end{aligned}$$

여기에 모든 실수 x에 대하여 $e^x-1\geq x$임을 이용하면,

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\geq \left[\lambda^2(a+m)^2+2\lambda\mu me^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right]C_1+\mu a\left(1-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right)(a+m)C_2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

따라서 모든 $\lambda\geq0$에 대하여, $A(\lambda)\geq0$이고 $C(\lambda|a,m)$은 $\lambda=0$에서 최소화된다.

ii) $\mu C_1+\left(\frac{a^2}{2}+am+m^2\right)C_2<(a+m)C_3$라고 가정하면, $\lim_{\lambda\to0}A(\lambda)<0$이다. 여기서

$$A'(\lambda) = 2\left[2\lambda(\alpha+m)^2+2e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\left((\mu-\lambda\alpha)(\alpha+m)-\mu\alpha e^{-\frac{2\lambda\alpha}{\mu}}\right)\right]C_1$$
$$+\alpha^2 e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\left(\alpha\left(1-\frac{\lambda\alpha}{2\mu}\right)+m\right)C_2+\frac{\lambda}{\mu}\alpha^2(\alpha+m)e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}C_3$$

이고, 조건 하에서 $(\alpha+m)C_3$ 대신 $\mu C_1+\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha m+m^2\right)C_2$를 대입하여 풀면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$A'(\lambda) > \left[2\lambda\left(\alpha^2\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\right)+\alpha m\left(2-e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\right)+m^2\right)+2\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\left(\alpha\left(1-e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\right)+m\right)\right]C_1$$
$$+\alpha^2 e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\left[\alpha+m+\frac{\lambda}{2\mu}(2m^2+\alpha(2m-\alpha+1))\right]C_2$$
$$> 0.$$

또, $\lim_{\lambda\to\infty} A(\lambda)=\infty$이므로 $A(\lambda^*)=0$인 유일한 해 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 존재하고, 이 값은 비용함수인 $C(\lambda|\alpha, m)$을 최소화한다. □

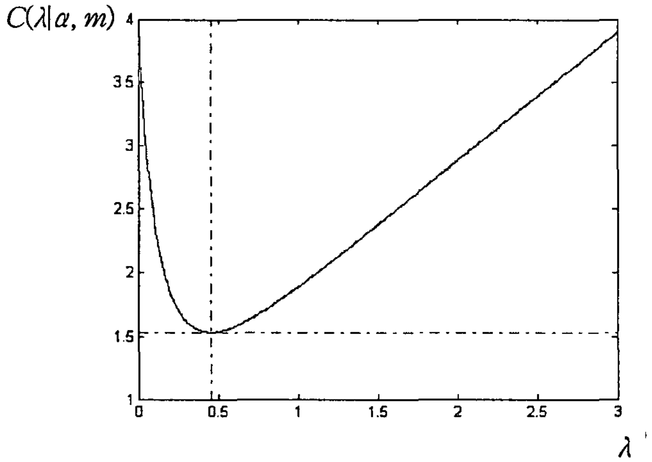


그림 2.1: $\mu C_1+\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha m+m^2\right)C_2<(\alpha+m)C_3$인 경우

그림 2.1은 비용함수 $C(\lambda|\alpha, m)$에 대한 예제 그래프로, $\mu=0.5$, $m=3.5$, $\alpha=1$, $C_1=1$, $C_2=0.2$, $C_3=4$로 주어졌으며, 이 경우 $\lambda=0.45$일 때 비용함수를 1.533으로 최소화함을 알 수 있다.

2.2. a에 대한 최적화

λ, m, μ를 임의의 상수로 고정하였을 때, $a(0\le a\le m)$의 변화에 따른 비용함수를 $C(a|\lambda,m)$으로 정의하자. $C(a|\lambda,m)$을 a에 대해 미분하면,

$$C'(a|\lambda,m)=\frac{B(a)}{\left[\mu e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}+\lambda(a+m)\right]^2}, \tag{2.7}$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} B(a) \;=\; & \left[e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\lambda\left(\frac{1}{2}\lambda a^2+\mu(2a+m)\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)\right)+\lambda^2\left(3am+\frac{3}{2}a^2+m^2\right)\right]C_2 \\ & -\lambda e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}(\lambda(a+m)+\mu)C_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

이다.

정리2. 만약 $mC_2\ge C_3$이면, 비용함수 $C(a|\lambda,m)$은 $a=0$일 때 $\dfrac{\lambda(\mu+\lambda m)C_1+\lambda m^2C_2+\mu C_3}{\mu+\lambda m}$를 최소값으로 가지며, $\left[\frac{1}{2}\lambda^2m^2\left(1+11e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-1\right)+3\lambda\mu m\right]C_2\le\lambda(2\lambda m+\mu)C_3$인 경우에는 $a=m$일 때 최소값 $\dfrac{\left(2\lambda^2m+\lambda\mu e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}\right)C_1+\left(2\mu me^{-\frac{\lambda m}{\mu}}+\frac{9}{2}\lambda m^2-2\mu m\right)C_2+\mu e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}C_3}{\mu e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}+2\lambda m}$를 갖는다. $\lambda m(2\lambda m+\mu)C_2<\lambda(2\lambda m+\mu)C_3<\left[\frac{1}{2}\lambda^2m^2\left(1+11e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-1\right)+3\lambda\mu m\right]C_2$인 경우에는 비용함수 $C(a|\lambda,m)$을 최소화하는 유일한 $a^*(0<a^*<m)$가 존재한다.

증명 i) $mC_2\ge C_3$라고 가정하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$B(a)\ \ge\ \left[e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\frac{1}{2}\lambda^2a^2+2\lambda\mu a+\mu\left(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)\right)+\lambda^2\left(\frac{3}{2}\lambda^2+am\left(3-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right)+m^2\left(1-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right)\right)\right]C_2$$

여기에 $e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\ge-\dfrac{\lambda a}{\mu}$임을 이용하면,

$$\begin{aligned} B(a)\ &\ge\ \left[e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\frac{1}{2}\lambda^2a^2+\lambda\mu a\right)+\lambda^2\left(\frac{3}{2}a^2+am\left(3-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right)+m^2\left(1-e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\right)\right)\right]C_2 \\ &>\ 0. \end{aligned}$$

따라서 모든 $0 \le a \le m$에 대하여, $B(a) \ge 0$이고 $C(a|\lambda, m)$은 $a=0$에서 최소화된다.

ii) $\left[\frac{1}{2}\lambda^2 m^2\left(1+11e^{\frac{\lambda m}{\mu}}\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-1\right)+3\lambda\mu m\right]C_2 \le \lambda(2\lambda m+\mu)C_3$라고 가정하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
B(a) \le & \left[e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\frac{1}{2}\lambda^2 a^2+\lambda\mu m+2\lambda\mu a\right)+\mu^2 e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)+\lambda^2\left(\frac{3}{2}a^2+3am+m^2\right)\right]C_2 \\
& -\frac{e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left[\frac{1}{2}\lambda^2 m^2+3\lambda\mu m+\mu^2 e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-\mu^2+\frac{11}{2}\lambda^2 m^2 e^{\frac{\lambda m}{\mu}}\right][\lambda a+\lambda m+\mu]C_2}{2\lambda m+\mu}.
\end{aligned}
$$

여기에 모든 실수 x에 대해 $e^x \ge x+1$임을 이용하면,

$$
\begin{aligned}
B(a) \quad \le \quad & e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left[\frac{1}{2}\lambda^2 a^2+\lambda\mu m+\lambda\mu a+e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(3\lambda^2 am+\frac{3}{2}\lambda^2 a^2+\lambda^2 m^2\right)\right]C_2 \\
& -\frac{e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left[\frac{1}{2}\lambda^2 m^2+2\lambda\mu m+\frac{11}{2}\lambda^2 m^2 e^{\frac{\lambda m}{\mu}}\right](\lambda a+\lambda m+\mu)C_2}{2\lambda m+\mu}
\end{aligned}
$$

이다. 여기서 분자의 부호가 음이므로 모든 $0 \le a \le m$에 대하여, $B(a) \le 0$이고 $C(a|\lambda, m)$은 $a=m$에서 최소화된다.

iii) $\lambda m(2\lambda m+\mu)C_2 < \lambda(2\lambda m+\mu)C_3 < \left[\frac{1}{2}\lambda^2 m^2\left(1+11e^{\frac{\lambda m}{\mu}}\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-1\right)+3\lambda\mu m\right]C_2$라고 가정하면,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} B(a) &= \lambda(\lambda m+\mu)(mC_2-C_3)<0 \\
\lim_{a\to m} B(a) &= \left[e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}\left(\lambda\left(\frac{1}{2}\lambda a^2+\mu(2a+m)\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}-1\right)\right)+\lambda^2\left(3am+\frac{3}{2}a^2+m^2\right)\right]C_2 \\
& \quad -\lambda e^{-\frac{\lambda a}{\mu}}[\lambda(a+m)+\mu]C_3 \\
& > 0.
\end{aligned}
$$

이다. 여기서

$$
\begin{aligned}
B'(a) = & \left[e^{\frac{-\lambda a}{\mu}}\left(\lambda\mu\left(3-2e^{\frac{-\lambda a}{\mu}}\right)-\frac{\lambda^3}{2\mu}a^2-\lambda^2(a+m)\right)+3\lambda^2(a+m)\right]C_2 \\
& +\frac{\lambda^2}{\mu}e^{\frac{-\lambda a}{\mu}}[\lambda(a+m)+\mu]C_3
\end{aligned}
$$

이고, 조건 하에서 C_3 대신 mC_2를 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$B'(\alpha) > \left[\lambda e^{\frac{-\lambda\alpha}{\mu}}\left(\frac{\lambda^2}{\mu}\alpha\left(m-\frac{1}{2}\alpha\right)+\mu\left(3-2e^{\frac{-\lambda\alpha}{\mu}}\right)\right)+\lambda^2\left(\alpha\left(3-e^{\frac{-\lambda\alpha}{\mu}}\right)+m\left(3+\frac{\lambda m}{\mu}e^{\frac{-\lambda\alpha}{\mu}}\right)\right)\right]C_2$$
$$> 0.$$

따라서 $B(\alpha^*)=0$인 유일한 해 $\alpha^*(0\le\alpha^*\le m)$가 존재하고, 이 값은 비용함수인 $C(\alpha|\lambda, m)$을 최소화한다. □

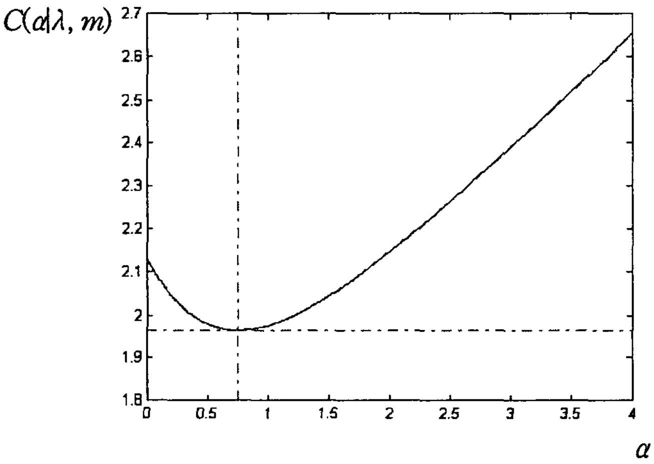


그림 2.2: $\lambda m(2\lambda m+\mu)C_2<\lambda(2\lambda m+\mu)C_3<\left[\frac{1}{2}\lambda^2m^2\left(1+11e^{\frac{\lambda m}{\mu}}\right)+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda m}{\mu}}-1\right)+3\lambda\mu m\right]C_2$인 경우

그림 2.2는 비용함수 $C(\alpha|\lambda, m)$에 대한 예제 그래프로, $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $m=5$, $C_1=1$, $C_2=0.2$, $C_3=4$로 주어졌으며, 이 경우 $\alpha=0.75$일 때 비용함수를 1.9652로 최소화함을 알 수 있다.

2.3. m에 대한 최적화

λ, α, μ를 임의의 상수로 고정하였을 때, $m(\alpha\le m<\infty)$의 변화에 따른 비용함수를 $C(m|\alpha, \lambda)$로 정의하자. $C(m|\alpha, \lambda)$를 m에 대해 미분하면,

$$C'(m|\alpha,\lambda)=\frac{D(m)}{\left[\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\lambda(\alpha+m)\right]^2} \quad (2.9)$$

이고, 여기서

$$D(m) = e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\left[2\lambda\mu(\alpha+m)+\lambda^2\left(\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha m+m^2\right)e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2-\lambda\mu C_3 \qquad (2.10)$$

이다.

정리3. 만약 $\left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2 \geq \lambda\mu C_3$이면, 비용함수 $C(m|\alpha,\lambda)$는 $m=\alpha$ 일 때, 최소값인 $\dfrac{\left(2\lambda^2\alpha+\lambda\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\right)C_1+\left(2\mu\alpha e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\frac{9}{2}\lambda\alpha^2-2\mu\alpha\right)C_2+\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}C_3}{\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+2\lambda\alpha}$를 가지며, $\left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2 < \lambda\mu C_3$인 경우에 비용함수 $C(m|\alpha,\lambda)$를 최소화하는 유일한 $m^*(\alpha < m^* < \infty)$가 존재한다.

증명 i) $\left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2 \geq \lambda\mu C_3$라고 가정하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} D(m) &\geq \left[2\lambda\mu m e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-2\lambda\mu\alpha e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-3\lambda^2\alpha^2+2\lambda^2\alpha m+\lambda^2m^2\right]C_2 \\ &= \left[2\lambda\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}(m-\alpha)+\lambda^2(m+3\alpha)(m-\alpha)\right]C_2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

따라서 모든 $m \geq \alpha$에 대하여, $D(m) \geq 0$이고 $C(m|\alpha,\lambda)$는 $m=\alpha$에서 최소화된다.

ii) $\left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2 < \lambda\mu C_3$라고 가정하면,

$$\lim_{m\to\alpha} D(m) = \left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2-\lambda\mu C_3 < 0$$

이고, $D(m)$은 2차항의 계수가 양수인 2차식이므로 $D(m^*)=0$인 유일한 해 $m^*(\alpha < m^* < \infty)$가 존재한다. 이 값은 비용함수인 $C(m|\alpha,\lambda)$를 최소화한다. □

그림 2.3은 비용함수 $C(m|\alpha,\lambda)$에 대한 예제 그래프로, $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $\alpha=0.5$, $C_1=1$, $C_2=0.2$, $C_3=4$로 주어졌으며, 이 경우 $m=1.7$일 때 비용함수를 1.592로 최소화함을 알 수 있다.

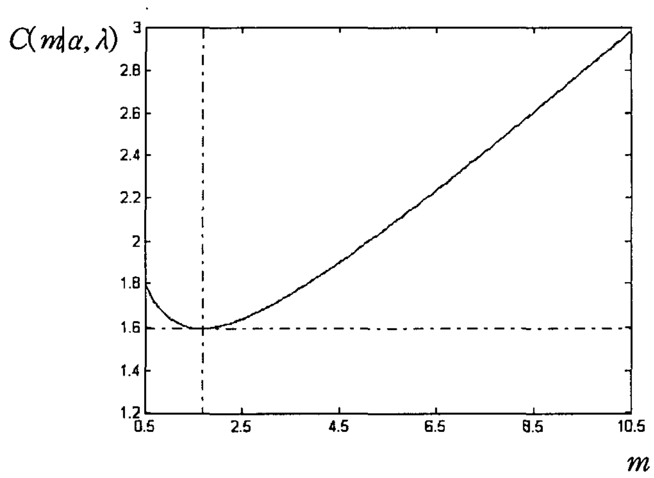


그림 2.3: $\left[4\lambda\mu\alpha+\frac{7}{2}\lambda^2\alpha^2 e^{\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\mu^2\left(e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}-1\right)\right]C_2 < \lambda\mu C_3$인 경우

참조. 비용함수를 미분한 $C(m|\alpha,\lambda)$의 분자인 $D(m)$은 m에 관한 2차식이므로 m^*는 근의 공식을 이용하여 구할 수 있다. 즉,

$$m^* = \frac{-\left(\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}+\lambda\alpha\right)C_2+\sqrt{C_2\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^2\alpha^2+\mu^2 e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}\right)C_2+\lambda\mu e^{-\frac{\lambda\alpha}{\mu}}C_3\right]}}{\lambda C_2}. \qquad \square$$

3. 결론

본 논문에서는 Baxter와 Lee(1987)가 소개한, 도착률 λ인 포아송 과정을 따라 오는 배달원에 의해 재고의 양이 적정수준 α 미만이면 지수확률변수 $Y > \alpha$ 만큼 배달되는 모형의 최적화가 연구되었다. 이전 연구에서 고려가 안 된 재고의 유지비용이 점검비용과 재고가 빈 상태에서의 손해비용에 추가되어, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 구하고, 이를 최소화하는 도착률 λ, 적정수준 α, 평균 배달량 m이 유일하게 존재함을 보였다. 따라서, 이들 값은 평균비용함수의 도함수 분자부분을 0으로 만드는 유일한 값이 되며, MATLAB 등을 이용하여 수치해석적인 방법으로 어렵지 않게 구할 수 있다. 앞으로, 배달량 Y의 분포를 일반적인 분포로 확장하는 연구, 평균비용함수를 도착률 λ, 적정수준 α, 평균 배달량 m에 대해 동시에 최소화하는 연구 등이 이루어지면 본 재고모형을 실제로 적용하는데 응용성이나 적용 폭이 더 커지리라 기대된다.

참고문헌

[1] Baxter, L. A. and Lee, E. Y.(1987). An inventory with constant demand and poisson restocking, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, Vol. 1, 203-210.

[2] Gavirneni, S.(2001). An efficient heuristic for inventory control when the customer is using (s, S) policy, *Oper. Res. Lett.*, Vol. 28, 187-192.

[3] Lee, E. Y. and Park, W. J.(1991). An inventory model and its optimization, *Kyungpook Math. J.*, Vol. 31, 143-150.

[4] Sethi, S. P. and Cheng, F.(1997). Optimality of (s, S) policies in inventory models with Markovian demand, *Oper. Res. Lett.*, Vol. 45, 931-939.

[5] Zheng, Y. S.(1991). A Simple proof for optimality of (s, S) policies in infinite-horizon inventory systems, *J. Appl. Probab.*, Vol. 28, 802-810.

[6] Ross, S. M.(1996). *Stochastic Processes*, 2nd ed, Wiley.

[2004년 8월 접수, 2004년 11월 채택]