韓國經營科學會誌
第29卷 第3號
2004年 9月

레벨횡단법의 확장에 대한 소고*

채경철** · 이승원**

An Extension of the Level Crossing Technique*

Kyung-Chul Chae** · Xeung-Won Yi**

Abstract

We demonstrate in this paper that the level crossing technique can be applied to such a system that not only the state vector is two-dimensional but its two components are heterogeneous. As an example system, we use the GI/G/c/K queue whose state vector consists of the number of customers in the system and the total unfinished work.

Keyword : GI/G/c/K, M/G/c/K, Queue Length Distribution, Unfinished Work

1. 서 론

레벨횡단법(level crossing technique)은 1977년에 등장했으며[3, 4], 그 간편성을 인정받아 이후 널리 활용되고 있다[5].

레벨횡단법의 대상은 주로 상태(state)가 일차원인 시스템이다. 예를 들면, 대기행렬 시스템의 부하량(unfinished work)([1], p.419 참조), 생산/재고 시스템의 재고수준[8], 댐(dam)의 수위[7] 등이 있는데, 이들은 시간의 함수로서 시간이 흐름에 따라 증가하고 감소한다.

레벨은 특정 상태를 의미한다. 예를 들어, '레벨 x'는 '부하량이 x', '재고수준이 x', '댐의 수위가 x' 등을 의미한다. 그리고, 레벨횡단법은 "안정상태(steady-state)에서 단위시간당 레벨 x를 거쳐서 내려가는 평균횟수(downcrossings)는 단위시간당 레벨 x를 거쳐서 올라가는 평균횟수(upcrossings)와 같아야 한다"는 사실을 방정식 형태로 표현한 것으로서, 이를 풀면 안정상태에서의 시스템의 상태에 대한 확률분포를 얻을 수 있다.

논문접수일 : 2003년 12월 1일 논문게재확정일 : 2004년 6월 11일
* 이 논문은 2002년도 학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-070-C00021).
** 한국과학기술원 산업공학과

최근에 레벨횡단법의 대상을 상태가 이차원인 시스템으로 확장한 논문을 Wu와 Posner[10]가 발표하였다. 이들이 분석한 시스템은 두 개의 대기행렬로 구성된 것으로서, 도착하는 고객이 부하량이 작은 대기행렬을 선택하는 시스템이다. 이들은 두 대기행렬의 부하량을 묶어서 이차원으로 상태를 정의했는데, 주목할 점은 상태 벡터의 성분(component) 두 개가 동질적(homogeneous)이라는 점이다.

본 논문의 목적은 상태 벡터의 성분이 이질적(heterogeneous)인 시스템도 레벨횡단법의 대상이 될 수 있음을 보이는 것이다(비고 : 이질적이란, 예를 들어, 이차원 상태 벡터의 성분 두 개 중에서 하나가 부하량이면 다른 하나는 부하량이 아닌 경우를 의미함). 본 논문에서 예제로 사용하는 시스템은 GI/G/c/K 대기행렬로서 상태 벡터는(안정상태에서의) 고객수와 부하량이다. 고객수는 서비스를 받고 있는 고객수와 대기중인 고객수를 합친 것이며, 부하량은 서비스를 받고 있는 고객들의 남은 서비스 시간과 대기중인 고객들이 차례가 되었을 때 받을 서비스시간을 합친 것이다. 레벨횡단법으로부터 연립방정식을 얻은 다음 이를 풀면 고객수의 확률분포를 얻을 수 있다.

동일한 결과를 얻기 위해서 Franken *et al.*[6]이 사용한 'Random Marked Point Process' 방법에 비해서 레벨횡단법은 월등히 간편하다. 아울러, 방정식과 해의 의미를 쉽게 이해할 수 있는 장점도 있다. 저자의 견해로는 부가변수법(supplementary variable technique)으로도 동일한 결과를 얻을 것으로 사료된다. 그렇지만 부가변수법 역시 레벨횡단법에 비해서 절차가 길고 복잡할 것으로 사료된다.

레벨횡단법에 의한 방정식은 사실상 국부균형방정식(local balance equation)이다([1], p.188 참조). 예를 들어 안정상태의 부하량을 X라 하자. 그러면, "레벨 x를 거쳐서 내려가는 단위시간당 평균횟수는 레벨 x를 거쳐서 올라가는 단위시간당 평균횟수와 같다"라는 표현은 "$\Omega=\{X>x\}$로부터 $\overline{\Omega}=\{X\le x\}$로 전이하는 단위시간당 평균횟수는 $\overline{\Omega}$로부터 Ω로 전이하는 단위시간당 평균횟수는 같다"를 의미한다.

이제, GI/G/c/K 대기행렬의 안정상태 고객수와 부하량을 각각 N과 X라 하자. 그러면, "$\Omega_n=\{N=n, X>x\}$로부터 $\overline{\Omega}_n=\{N=n, X\le x\}\cup\{N\ne n\}$으로 전이하는 단위시간당 평균횟수는 $\overline{\Omega}_n$으로부터 Ω_n으로 전이하는 단위시간당 평균횟수와 같다"로 레벨횡단법이 확장되는 것이다.

2. GI/G/c/K 대기행렬의 안정상태 고객수 분석

2.1 GI/G/c/K 대기행렬의 정의 및 표기법

총 c명의 서버(server)가 있는데, 각 서버는 고객을 한 명씩 전담해서 처리한다. 바쁘지 않은 서버가 있을 때 도착하는 고객은 도착 즉시 서비스를 받지만, 서버가 모두 바쁠 때 도착하는 고객은 한 줄로 서서 기다린 다음, 차례가 되면 서비스를 받는다. 서비스를 다 받은 고객은 즉시 시스템을 이탈한다. 단, 시스템에 총 K명의 고객이 있을 때 도착하는 고객은 차단(block)되는데, 편의상 차단되는 고객은 도착 즉시 이탈하는 것으로 간주한다.

고객들의 도착간(interarrival)시간들은 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는(i.i.d.) 확률변수인데 이들의 대표를 A라 하자. 차단되지 않은 고객들의 서비스시간들 역시 i.i.d. 확률변수인데 이들의 대표를 S라 하자. A와 S는 서로 독립이다.

안정상태의 부하량을 X라 하자. 반면에, 안정상태의 고객수는 세 가지로 정의하는데, N은 임의시점(또는 시간평균) 고객수이고 N^A는 도착하는 고객이 보는 고객수이며 N^D는 이탈하는 고객이 남기는 고객수이다(비고 : 도착하는 고객과 이탈하는 고객은 각각 N^A와 N^D에서 제외됨).

N, N^A, N^D의 확률분포를 다음과 같이 표기하자 :

$$p_n = Pr\{N=n\},\ \pi_n^A = Pr\{N^A = n\},$$
$$\pi_n^D = Pr\{N^D = n\},\ 0 \le n \le K.$$

본 논문에서는 편의상 p_n뿐만 아니라 π_n^A와 π_n^D도 '$0 \le n \le K$'에 대해서 정의한다. 이 경우 π_K^A는 도착하는 고객이 K명을 볼 확률이므로 이 고객은 차단되어 즉시 이탈하기 때문에 이탈할 때 남기는 고객수 역시 K명이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\pi_K^A = \pi_K^D \tag{1}$$

X의 분포를 다음과 같이 표현한다. 첫째로 N과 관련된 분포는

$$Pr\{X=0\} = Pr\{N=0\} = p_0 \tag{2.a}$$
$$f(n,x)dx = Pr\{N=n,\ x < X \le x+dx\},$$
$$x > 0,\ 1 \le n \le K \tag{2.b}$$

이다. 둘째로, N^A와 N^D에 관련된 분포는 편의상 다음과 같이 조건부 확률로 표현한다.

$$f^A(x|n)\,dx = Pr\{x < X \le x+dx \mid N^A = n\},$$
$$x > 0 \tag{3.a}$$
$$\overline{F}^A(x|n) = Pr\{X > x \mid N^A = n\},$$
$$\overline{F}^D(x|n) = Pr\{X > x \mid N^D = n\},\quad x > 0 \tag{3.b}$$

식 (3)에서 조건 '$N^A = n$'과 '$N^D = n$'은 다음을 의미한다. 도착하는 고객이 n명을 보는 경우 이때의 부하량이 $(x, x+dx]$에 속할 확률과 x를 초과할 확률이 각각 $f^A(x|n)dx$와 $\overline{F}^A(x|n)$인데, 도착하는 고객의 서비스시간은 x에 포함되지 않는다. 그리고, 이탈하는 고객이 n명을 남기는 경우 이때의 부하량이 x를 초과할 확률이 $\overline{F}^D(x|n)$이다. 편의상 식 (3)을 '$1 \le n \le K$'에 대해서 정의하면 식 (1)과 같은 이유로 다음을 얻는다.

$$\overline{F}^A(x|K) = \overline{F}^D(x|K),\ x > 0 \tag{4}$$

마지막으로, 조건부 기대치를 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_n^A = \int_0^\infty \overline{F}^A(x|n)dx = E[X|N^A = n] \tag{5.a}$$
$$\omega_n^D = \int_0^\infty \overline{F}^D(x|n)dx = E[X|N^D = n] \tag{5.b}$$

2.2 준비작업 : 발생률(rate)과 확률

도착간시간 A의 기대치 $E[A]$를 λ^{-1}로 표현하면 도착 발생률 λ는 단위시간당 도착하는 평균고객수를 의미한다. 또한, λ는 단위시간당 이탈하는 평균고객수인 이탈 발생률을 의미한다. 그리고, $\lambda\pi_n^A(\lambda\pi_n^D)$는 도착(이탈)할 때 n명을 보는(남기는) 고객들의 도착(이탈) 발생률이 된다, $0 \le n \le K$.

한 명씩 도착하고 한 명씩 이탈하는 시스템에서는 "$\lambda\pi_n^A = \lambda\pi_n^D$"가 성립한다. 따라서, GI/G/c/K 대기행렬에서는

$$\pi_n^A = \pi_n^D,\ 0 \le n \le K \tag{6}$$

가 성립하는데(식 (1) 참조), 이를 Burke의 정리라 부르기도 한다([1], p.276).

일반적으로 발생률은 단위시간당 어떤 사건이 발생하는 평균횟수를 의미한다. 그리고, 발생률에 무한소 길이의 시간 dt를 곱하면 '(안정상태에서) dt 동안에 사건이 한 번 발생할 확률'이 된다. 예를 들어, 도착(이탈) 발생률에 dt를 곱하면(안정상태에서) dt 동안에 한 명이 도착(이탈)할 확률이 되는데, 그 이유는 dt 동안에 두 명이상이 도착(이탈)할 확률은 한 명이 도착(이탈)할 확률에 비해서 무시할 수 있으므로 dt 동안에 도착(이탈)하는 평균고객수는 dt 동안에 한 명이 도착(이탈)할 확률과 일치하기 때문이다.

본 논문에서는 레벨횡단법에 의한 방정식을 표현할 때 발생률 대신(발생률에 dt를 곱한) 확률을 사용하겠는데 그 이유는 발생률보다 확률이 더 실감나기 때문이다.

2.3 GI/G/c/K 대기행렬에 대한 레벨횡단법

상태공간을 $\Omega_n = \{N=n,\ X > x\}$와 이의 여집합

인 $\overline{\Omega}_n = \{N=n,\ X \le x\} \cup \{N \ne n\}$으로 분할하자. 앞에서 언급했듯이, 본 논문에서는 "$\Omega_n \to \overline{\Omega}_n$ 전이 발생률은 $\overline{\Omega}_n \to \Omega_n$ 전이 발생률과 같다" 대신에 "(안정상태에서) dt 동안에 $\Omega_n \to \overline{\Omega}_n$ 전이가 발생할 확률은 dt 동안에 $\overline{\Omega}_n \to \Omega_n$ 전이가 발생할 확률과 같다"를 사용한다.

$n=1$ 경우, dt 동안에 $\Omega_1 \to \overline{\Omega}_1$ 전이가 발생할 확률은

$$f(1,x)\,dt + \lambda\pi_1^A \overline{F}^A(x|1)\,dt \tag{7.a}$$

이고, dt 동안에 $\overline{\Omega}_1 \to \Omega_1$ 전이가 발생할 확률은

$$\lambda\pi_1^D \overline{F}^D(x|1)\,dt + \lambda\pi_0^A Pr\{S > x\}\,dt \tag{7.b}$$

인데, 이에 대한 설명은 다음과 같다.

식 (7.a)에서 '$f(1,x)dt$'는 안정상태의 임의 관찰시점에서의 시스템의 상태가 Ω_1의 부분집합인 $\{N=1, x < X \le x+dt\}$에 속할 확률이다. 즉, 고객은 한 명이 있고 이 고객의 남은 서비스시간이 $(x, x+dt]$에 속할 확률이다. 남은 서비스시간은 dt 동안에 dt만큼 감소하므로 dt 시간 후의 상태는 '확률 1로' $\{N=1, x-dt < X \le x\}$에 속하게 되는데 이는 $\overline{\Omega}_1$의 부분집합이다(비고 : dt 동안에 새로 고객이 한 명 도착할 확률인 '$\lambda\pi_1^A dt$'는 '확률 1'에 비해서 무시할 수 있음).

식 (7)의 나머지 세 항에 대한 설명은 서로 비슷하다. '$\lambda\pi_1^A \overline{F}^A(x|1)\,dt$'는 $\{N=1, X > x\}(=\Omega_1)$일 때 dt 동안 한 명이 도착함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=2, X > x+S\}(\subset\overline{\Omega}_1)$가 될 확률이고, '$\lambda\pi_1^D \overline{F}^D(x|1)\,dt$'는 $\{N=2, X > x\}(\subset\overline{\Omega}_1)$일 때 dt 동안 한 명이 이탈함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=1, X > x\}(=\Omega_1)$가 될 확률이며, '$\lambda\pi_0^A Pr\{S > x\}dt$'는 $\{N=0\}(\subset\overline{\Omega}_1)$일 때 dt 동안 한 명이 도착하되 이 고객의 서비스시간이 x를 초과함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=1, X > x\}(=\Omega_1)$가 될 확률이다(비고 : dt 동안에 도착과 이탈이 모두 발생할 확률은 $(dt)^2$에 비례하므로 무시하였음).

$2 \le n \le K$ 경우, 바쁜 서버의 수를 m이라 하면

$$m = \min\{n, c\} \tag{8}$$

이다. 이 경우, dt 동안에 $\Omega_n \to \overline{\Omega}_n$ 전이가 발생할 확률은

$$\begin{aligned} f(n,x)\,m\,dt &+ \lambda\pi_n^A \overline{F}^A(x|n)\,dt \\ &+ \lambda\pi_{n-1}^D \overline{F}^D(x|n-1)\,dt \end{aligned} \tag{9.a}$$

이고, dt 동안에 $\overline{\Omega}_n \to \Omega_n$ 전이가 발생할 확률은

$$\begin{aligned} &\lambda\pi_n^D \overline{F}^D(x|n)\,dt + \lambda\pi_{n-1}^A [\overline{F}^A(x|n-1) \\ &+ \int_0^x Pr\{S > x-y\} f^A(y|n-1)\,dy]\,dt \end{aligned} \tag{9.b}$$

인데, 이에 대한 설명은 다음과 같다(비고 : $n=K$ 경우에는 식 (1)과 식 (4)에 의해서 '$\lambda\pi_K^A \overline{F}^A(x|K)dt$'와 '$\lambda\pi_K^D \overline{F}^D(x|K)dt$'가 서로 상쇄됨).

식 (9.a)에서 '$f(n,x)mdt$'는 임의 관찰시점에서의 상태가 Ω_n의 부분집합인 $\{N=n, x < X \le x+mdt\}$에 속할 확률이다. 그런데, 바쁜 서버 한 명이 dt 동안에 처리하는 부하량은 dt이므로(식 (8)로 정의된), m명의 바쁜 서버가 dt 동안에 처리하는 부하량은 mdt이다. 따라서, dt시간 후의 상태는 '확률 1로' $\{N=n, x-mdt < X \le x\}$에 속하게 되는데 이는 $\overline{\Omega}_n$의 부분집합이다.

식 (9.a)의 중간 항은 $2 \le n \le K-1$ 경우에는 식 (7.a)의 둘째 항에 해당되고, $n=K$ 경우에는 식 (9.b)의 첫째 항과 상쇄된다. 그리고, 식 (9.a)의 셋째 항인 '$\lambda\pi_{n-1}^D \overline{F}^D(x|n-1)\,dt$'는 $\{N=n, X > x+mdt\}(\subset\Omega_n)$일 때 dt 동안 한 명이 이탈함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=n-1, X > x\}(\subset\overline{\Omega}_n)$가 될 확률이다. 즉, 임의 관찰시점에서의 상태가 Ω_n의 부분집합인 $\{N=n, X > x+mdt,$ m명 중 1명의 남은 서비스 시간은 $(0, dt]\}$에 속함으로 인해서 dt 시간 후

의 상태는 $\overline{\Omega}_n$의 부분집합인 $\{N=n-1, X>x\}$가 될 확률인데, 이를 서비스가 끝나서 이탈하는 고객의 관점으로 표현한 것이 식 (9.a)의 셋째 항이다.

식 (9.b)의 첫째 항은 $2\le n\le K-1$ 경우에는 식 (7.b)의 첫째 항에 해당되고, $n=K$ 경우에는 식 (9,a)의 중간 항과 상쇄된다. 그리고, 식 (9,b)의 '$\lambda\pi^A_{n-1}\overline{F}^A(x|n-1)dt$'는 $\{N=n-1, X>x\}(\subset\overline{\Omega}_n)$일 때 dt 동안 한 명이 도착함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=n, X>x+S\}(\subset\Omega_n)$가 될 확률이고, '$\lambda\pi^A_{n-1}\int_0^x Pr\{S>x-y\}f^A(y|n-1)dydt$'는 $\{N=n-1, X\le x\}(\subset\overline{\Omega}_n)$일 때 dt 동안 한 명이 도착하되 이 고객의 서비스시간이 충분히 길어서 dt 후에는 $\{N=n, X>x\}(=\Omega_n)$가 될 확률이다.

전이확률로 표현된 식 (7)과 식 (9)를 dt로 나누면 전이 발생률로 표현된 식이 된다. (비고 : dt로 나눈 후에 남아 있는 dt가 있으면 모두 0으로 간주함.) 이에 식 (6)을 대입하되 편의상 π^A_n와 π^D_n를 모두 π_n으로 표현하면 다음을 얻는다.

$$f(1,x)=\lambda\pi_0 Pr\{S>x\}+\lambda\pi_1\{\overline{F}^D(x|1)-\overline{F}^A(x|1)\} \tag{10,a}$$

$$\begin{aligned} mf(n,x) &= \lambda\pi_{n-1}\int_0^x Pr\{S>x-y\}f^A(y|n-1)dy \\ &\quad -\lambda\pi_{n-1}\{\overline{F}^D(x|n-1)-\overline{F}^A(x|n-1)\} \\ &\quad +\lambda\pi_n\{\overline{F}^D(x|n)-\overline{F}^A(x|n)\}, \\ &\quad 2\le n\le K \end{aligned} \tag{10.b}$$

식 (10)을 x에 대해서 0에서 ∞까지 적분한 결과를 식 (5)로 표현하면(계산과정은 생략함)

$$p_1=\lambda\pi_0 E[S]+\lambda\pi_1(\omega^D_1-\omega^A_1) \tag{11.a}$$

$$mp_n=\lambda\pi_{n-1}\{E[S]-(\omega^D_{n-1}-\omega^A_{n-1})\}+\lambda\pi_n(\omega^D_n-\omega^A_n),\ 2\le n\le K \tag{11.b}$$

를 얻는데, $n=K$ 경우에는 식 (4)에 의해서 "$\omega^D_K=\omega^A_K$"이다(비고 : 식 (11)은 문헌 [2]의 식 (8) 및 문헌[6]의 식 (4.3.43)과 일치함).

2.4 M/G/c/K 대기행렬의 고객수 분포

GI/G/c/K 대기행렬의 특수한 경우로서 고객이 포아송과정으로 도착하는 M/G/c/K 대기행렬을 고려한다.

PASTA 속성[9]에 의한 "$\pi^A_n=p_n$"을 식 (11)에 대입하고 정리하면

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{\lambda\{E[S]-(\omega^D_{n-1}-\omega^A_{n-1})\}}{m-\lambda(\omega^D_n-\omega^A_n)},\quad 1\le n\le K \tag{12}$$

를 얻는데, 여기서 m의 정의는 식 (8)이고, "$\omega^D_0=\omega^A_0=0$"이며, "$\omega^D_K=\omega^A_K$"이다. 역시 PASTA 속성에 의해서 ω^A_n는 도착시점 뿐만 아니라 임의시점에 "$N=n$"일 때의 평균부하량이기도 하다. 그리고, p_0는 "$1=\Sigma^K_{n=0}p_n$"으로 구할 수 있다.

2.5 잔여도착간시간을 사용한 레벨횡단법

M/G/c/K 경우에는 "$\pi_n=p_n$"이므로 식 (11)만으로 식 (12)를 얻을 수 있었으나, GI/G/c/K 경우에는 "$\pi_n\ne p_n$"이므로 다른 한 벌의 방정식이 필요하다.

2.3절에서 정의한 $\Omega_n=\{N=n, X>x\}$ 대신에 $\Omega_n=\{N=n, X\le x\}$를 사용하면 결국 식 (11)을 다시 얻는다. 따라서, 부하량 대신에 다른 확률변수를 사용해야 되는데(부하량에 포함된), 잔여서비스시간에 대응하는 잔여도착시간을 사용하기로 하자.

표기를 새로이 정의하지 않기 위해서 식 (2)~식 (5)에 포함된 X를 이번에는 잔여도착간시간이라 하자. 단, 식 (5.b)의 $E[X|N^D=n]$는(ω^D_n 대신에) α_n으로 표현한다(비고 : "$E[X|N^A=n]=E[A]=\lambda^{-1}$"이므로 식 (5.a)는 불필요함).

상태공간을 $\Omega_n=\{N=n, X>x\}$와 이의 여집합인 $\overline{\Omega}_n=\{N=n, X\le x\}\cup\{N\ne n\}$으로 분할한다. 그러면, $1\le n\le K-1$ 경우, dt 동안에 $\Omega_n\to\overline{\Omega}_n$ 전이가 발생할 확률은

$$f(n,x)dt+\lambda\pi^{D}_{n-1}\overline{F}^{D}(x|n-1)\,dt \qquad (13.a)$$

이고, dt 동안 $\overline{\Omega}_n \to \Omega_n$ 전이가 발생할 확률은

$$\lambda\pi^{D}_{n}\overline{F}^{D}(x|n)dt+\lambda\pi^{A}_{n-1}Pr\{A>x\}dt \qquad (13.b)$$

인데, 이에 대한 설명은 다음과 같다.

식 (13.a)에서 '$f(n,x)dt$'는 안정상태의 임의시점에서의 상태가 $\{N=n, x<X\le x+dt\}(\subset\Omega_n)$일 확률이다. 즉, 고객은 n명이 있고 다음 고객이 도착할 때까지 남은 시간이 $(x, x+dt]$에 속할 확률이다. 따라서, dt 시간 후의 상태는 '확률 1로' $\{N=n, x-dt<X\le x\}(\subset\overline{\Omega}_n)$가 된다(비고 : dt 동안에 한 명이 이탈할 확률인 '$\lambda\pi^{D}_{n-1}dt$'는 '확률 1'에 비해서 무시할 수 있음).

식 (13.a)에서 '$\lambda\pi^{D}_{n-1}\overline{F}^{D}(x|n-1)dt$'는 $\{N=n, X>x+dt\}(\subset\overline{\Omega}_n)$일 때 한 명이 이탈함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=n-1, X>x\}(\subset\overline{\Omega}_n)$가 될 확률이고, 식 (13.b)의 '$\lambda\pi^{D}_{n}\overline{F}^{D}(x|n)dt$'는 $\{N=n+1, X>x+dt\}(\subset\Omega_n)$일 때 한 명이 이탈함으로 인해서 dt 후에는 $\{N=n, X>x\}(=\Omega_n)$가 될 확률이다.

식 (13.b)에서 '$\lambda\pi^{A}_{n-1}Pr\{A>x\}dt$'는 $\{N=n-1\}(\subset\overline{\Omega}_n)$일 때 dt 동안 한 명이 도착하되 그 다음 도착할 고객과의 도착간시간이 x를 초과할 확률이므로 dt 후의 상태는 $\{N=n, X>x\}(=\Omega_n)$가 된다(비고 : '$\lambda\pi^{A}_{n-1}dt$'는 $Pr\{N=n-1, 0<X\le dt\}$와 같음).

다음, $n=0$ 경우와 $n=K$ 경우를 고려한다. $n=0$ 경우에는 식 (13.a)와 식 (13.b)의 둘째 항이 존재하지 않는데, 이는 도착(이탈) 시에 '-1'명을 보는(남기는) 것이 불가능하기 때문이다.

$n=K$ 경우에는 식 (13.b)의 '$\lambda\pi^{D}_{K}\overline{F}^{D}(x|K)dt$'를 '$\lambda\pi^{A}_{K}Pr\{A>x\}dt$'로 대체할 수 있는데, 그 이유는 다음과 같다. '$\lambda\pi^{A}_{K}Pr\{A>x\}dt$'는 $\{N=K\}$일 때 dt 동안 고객 한 명이 도착하되 그 다음 도착할 고객과의 도착간시간이 x를 초과할 확률이다. 그런데, 도착시에 K명을 보는 고객은 차단되므로 도착 즉시 이탈하는데 이탈시에 남기는 고객수는 K명이며 이때 다음 고객이 도착할 때까지 남은 시간은 x를 초과하게 된다.

식 (13)을 dt로 나눈 다음 식 (6)을 대입하되 π^{A}_{n}와 π^{D}_{n}를 π_n으로 표현하면, '$0\le n\le K$'에 대해서

$$\begin{aligned} f(n,x) &= \lambda\pi_{n-1}[Pr\{A>x\}-\overline{F}^{D}(x|n-1)] \\ &\quad +\lambda\pi_n\overline{F}^{D}(x|K) \end{aligned} \qquad (14)$$

를 얻는데, $n=0$ 경우에는 "$\pi_{n-1}=0$"이고 $n=K$ 경우에는 "$\overline{F}^{D}(x|K)=Pr\{A>x\}$"이다.

식 (14)를 x에 대해서 0에서 ∞까지 적분한 결과를

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\infty \overline{F}^{D}(x|n)dx = E[X|N^D=n], \\ &\quad 1\le n\le K-1 \\ \alpha_K &= \int_0^\infty \overline{F}^{D}(x|K)dx \\ &= \int_0^\infty Pr\{A>x\}dx = E[A] \end{aligned}$$

로 표현하면 다음을 얻는다(단, $n=0$ 경우 $\pi_{n-1}=0$)(비고 : 이 결과는 문헌 [2]의 식 (9) 및 문헌 [6]의 식 (4.3.19)와 일치함).

$$\begin{aligned} p_n &= \lambda\pi_{n-1}\{E[A]-\alpha_{n-1}\}+\lambda\pi_n\alpha_n, \\ &\quad 1\le n\le K \end{aligned} \qquad (15)$$

이제, 식 (15)를 식 (11)과 연립으로 풀면 p_n과 π_n을 얻을 수 있으나 해가 방정식보다 더 복잡하므로 이를 생략한다.

3. 결 론

본 논문에서는 상태 벡터의 성분이 이질적인 시스템에 대해서도 레벨횡단법을 사용할 수 있음을 보임으로서 레벨횡단법의 적용 대상을 확장하였다.

예제로 사용된 GI/G/c/K 대기행렬 시스템에 대해서 두 가지의 상태 벡터를 정의했는데, 첫째는 고객수와 부하량의 벡터이고 둘째는 고객수와 잔여도착간시간의 벡터이다. 이들 두 가지에 레벨횡단법을 적용하여 두 벌의 방정식을 얻었으며, 이를 풀면 임의시점의 고객수 분포와 도착 또는 이탈시점의 고객수 분포를 얻을 수 있음을 보였다.

GI/G/c/K 대기행렬의 고객수 분포에 대한 방정식은 이미 알려져 있을 뿐더러[6], 방정식에 대한 해석까지 존재한다[2]. 다만, 레벨횡단법을 사용하면 다른 어떤 방법보다 월등히 쉽게 방정식을 얻을 수 있음을 본 논문에서 보였을 따름이다. 아울러, GI/G/c/K 대기행렬 이외의 다양한 시스템에 대해서도 레벨횡단법을 간편하게 활용할 수 있을 것이라는 점이 저자의 견해이다.

참 고 문 헌

[1] 이호우, 「대기행렬이론」, 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] 채경철, 김남기, 최대원, "GI/G/c/K 대기행렬의 고객수 분포 방정식에 대한 해석", 「대한산업공학회지」, 제28권, 제4호(2002), pp.391-397.

[3] Brill, P.H. and M.J.M. Posner, "Level Crossings in Point Processes Applied to Queues : Single-Server Case", *Operations Research*, Vol.25(1977), pp.662-674.

[4] Cohen, J.W., "On Up-and Downcrossings", *J. of Applied Probability*, Vol.14(1977), pp.405-410.

[5] Doshi, B., "Level-Crossing Analysis of Queues", *Queueing and Related Models* (Editors : U.N. Bhat et al.), Clarendon Press, Oxford, 1992, pp.3-33.

[6] Franken, P., D. König, U. Arndt and V. Schmidt, *Queues and Point Processes*, Wiley, New York, 1982.

[7] Kim, S. and E.Y. Lee, "A Level Crossing Approach to the Analysis of Finite Dam", *J. of Korean Statistical Society*, Vol.31, No.3(2002), pp.405-413.

[8] Perry, D. and B. Levikson, "Continuous Production/Inventory Model with Analogy to Certain Queueing and Dam Models", *Advances in Applied Probability*, Vol.21(1989), pp.123-141.

[9] Wolff, R.W., "Poisson Arrivals See Time Averages", *Operations Research*, Vol.30, No.2(1982), pp.223-231.

[10] Wu, P. and M.J.M. Posner, "A Level-Crossing Approach to the Solution of the Shortest-Queue Problem", *Operations Research Letters*, Vol.21(1997), pp.181-189.