

평판의 1차 고유진동수가 최대가 되는 점지지의 최적위치선정에 관한 연구

김문경[†] · 홍도관^{*}

(원고접수일 : 2004년 6월 7일, 심사완료일 : 2004년 10월 4일)

A Study on the Optimal Position Determination of Point Supports to Maximize Fundamental Natural Frequency of Plate

Moon-Kyung Kim[†] · Do-Kwan Hong^{*}

Abstract : The free vibration analyses of the isotropic and CFRP laminated composite rectangular plates with point supports at the fix edge is performed by FEM. We showed optimal position and mode shape of point supports that maximized fundamental natural frequency of the isotropic and CFRP laminated composite rectangular plates by each aspect ratio and the number of point supports.

Key words : CFRP(Carbon Fiber Reinforced Plastic : 탄소섬유강화 플라스틱), Point Support (점지지), Laminated Composite Plate(복합적층판)

1. 서 론

구조물에 있어서 지지점을 갖는 모델은 많이 있다. 이러한 지지점의 위치를 선정하는 문제는 지지점의 위치에 따라서 진동에 대한 특성을 결정하는 사항들과 관계가 있으며, 구조물의 1차 고유진동수를 최대화 시키는 설계를 필요로 하게 된다. 이 문제에 대한 연구로 Wang 등은 경계조건이 자유단인 사각판의 1차 고유진동수를 최대화하기 위한 최적 지지점 위치를 선정하는 문제를 다루었으며¹⁾, Son 등은 진동하는 구조물의 1차 고유진동수를 최대화하기 위한 경계조건의 최적화에 대해서 연구를 수행하였고²⁾, Tauchert 등은 강성

을 최대화하기 위한 적층된 평판의 설계를 하였다.³⁾ Hong 등은 원공이 없는 복합적층판과 원공을 갖는 복합적층판의 1차 고유진동수가 최대가 되는 적층설계에 관한 연구⁴⁾와 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적위치 선정에 관한 연구를 수행하였다.⁵⁾

본 연구에서는 유한요소법으로 진동해석 및 최적화 방법을 이용하여 종횡비(b/a)가 다른 사변이 고정된 SS400 구조용 압연강과 CFRP 복합적층판 평판 모델에서 점지지(개수 : 1~3)의 위치에 따른 평판모델의 1차 고유진동수가 최대가 되는 점지지 위치를 구하였다. 또한 평판모델의 1차 고유진동수가 최대가 되는 점지지 위치에서 모드형

[†] 책임저자(창원전문대학 자동차기계계열 기계설계전공), E-mail : mkkim@changwon-c.ac.kr, T : 055)279-5161

^{*} 한국전기연구원 메카트로닉스 연구그룹

상을 구하였다. 점지지의 적용시 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적 점지지 위치를 제안하였다.

2. 유한요소해석

2.1 유한요소해석

가. 유한요소모델의 구성

본 연구에서 사용된 모델은 등방성 재료인 SS400인 구조용 압연강과 이방성 재료인 T700 탄소섬유 프리프레그(T700 carbon fiber prepreg)를 사용한 CFRP 복합적층판을 사용하였다. Fig. 1은 종횡비(b/a)가 1, 1.5, 2인 구조용 압연강과 복합적층판을 나타내고 있다. Fig. 2는 복합적층 재료의 적층구조를 나타내며, 모델에 사용된 물성과 치수는 Table 1~2에 나타내었다.

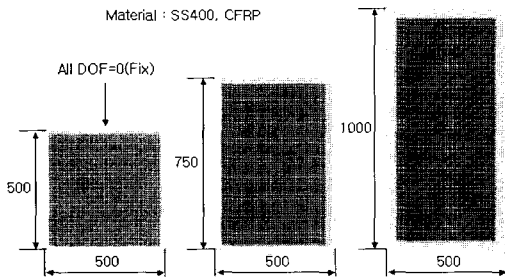


Fig. 1 Structure of SS400 and CFRP plate

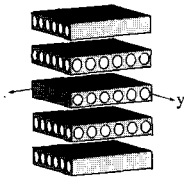


Fig. 2 Laminated construction

나. 경계조건

경계조건은 SS400 구조용 압연강과 CFRP 복합적층판의 사변을 완전 고정하여 해석을 수행하였다. 모델링과 해석은 상용 유한요소 해석 프로그램인 Ansys 8.0을 사용하였다. 해석에 사용된 요소는 6자유도 4절점 요소와 6자유도 8절점 요

소를 사용하였으며, 요소의 수는 종횡비에 따라서 2,601~5,000 개이고 절점의 수는 2,704~5,150 개를 사용하였다. CFRP 복합적층판의 총 적층판 수는 6 판으로 대칭형태로 적층하였으며, 1차 고유진동수가 최대가 되는 적층각인 $[0^\circ]$ 를 기준으로 하였다.

Table 1 Mechanical properties of CFRP

Mechanical property	Description
T700 carbon fiber prepreg	
ρ [kg/mm ³]	1.480E-06
E_1 [MPa]	112,156
E_2 [MPa]	8,109
G_{12} [MPa]	4,647
ν_2	0.33
SS400	
ρ [kg/mm ³]	7.959E-09
E [MPa]	204,080
ν	0.33

Table 2 Dimension of structure

Item list	Description (mm)
Length of structure (b)	500, 1000, 1500
Width of structure (a)	500
Thickness of plate	1

2.2 진동해석

유한요소해석에서 비감쇠 자유진동에 관한 지배방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

선형계에 대해서 자유진동은 다음과 같다.

$$\{u\} = \{u_0\} \cos \omega t \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$([K] - \omega^2[M])\{u_0\} = \{0\} \quad (3)$$

유용해를 갖기 위해서는 $\{[K] - \omega^2[M]\}$ 의 행렬식이 0이어야 한다.

$$|[K] - \lambda[M]| = 0 \quad (4)$$

여기서 $\lambda = \omega^2$ 이고, 고유치 문제 식 (4)에서 고유치 λ 는 계의 고유진동수를 나타내고, 고유벡터 u 는 모드형상을 나타낸다.

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}$ 는 등방성재료의 굽힘강성으로 무차원 진동수매개변수는 식 (5)와 같다.

$$\lambda_i = \frac{\omega a^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (5)$$

$D_{11} = \frac{E_1 t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$, $D_{22} = \frac{E_2 t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ 는 이방성재료의 굽힘강성으로 무차원 진동수매개변수는 식 (6)과 같다.

$$\lambda_i = \frac{\omega a^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}D_{22}}} \quad (6)$$

여기서, E_1, E_2 : 이방성재료의 탄성계수, E : 등방성재료의 탄성계수, t : 판의 두께, ν, ν_{12}, ν_{21} : 프와송비, a 는 판의 길이, ρ 는 밀도이다.

3. 최적설계

3.1 최적화의 정식화

Minimize :

$$f(x) = \frac{1}{f_{1st}} \quad (7)$$

식 (7)은 목적함수를 나타내며, 최적화의 과정은 목적함수를 최소화 하는데 있기 때문에 1차 고유진동수를 최대화하기 위하여 1차 고유진동수 (f_{1st})의 역수를 목적함수로 두고, 최적화를 수행하였다. 또한, 제한조건은 두지 않았기 때문에 비제약 최적화문제이다. 설계변수로는 점지지의 x, y 축 좌표 값을 설계변수로 하였으며, 설계변수의 범위는 평판의 크기를 벗어나지 않도록 설정하였다. 또한 CFRP 복합적층판의 경우, 적층각을 설계변수로 하여 1차 고유진동수가 최대가 되는 적층각을 구하였으며, 적층각의 범위는 -90° 에서 90° 사이의 범위를 벗어나지 않도록 설정하였다.

3.2 최적설계의 알고리즘

최적화를 수행하는 수치적인 방법의 알고리즘은 설계 공간의 한 점에서 목적 함수의 기울기를 구하여 설계가 개선되는 방향으로 탐색 방향을 결정 한 다음 그 방향에서 최적값을 얻을 수 있는 위치로 이동하고, 다시 이를 반복하여 최종적으로 최적 위치에 도달하는 구배법(gradient based method)을 이용하였다.

점 x^* 에서 x_i 에 관한 $f(x)$ 의 편도함수값을 c_i 로 표시하면, $f(x)$ 의 모든 편도함수값을 식 (8)과 같이 표현할 수 있다. n 개의 변수 x_1, x_2, \dots, x_n 의 함수 $f(x)$ 에 대한 점 x^* 에서의 경사도벡터는 편도함수값을 열벡터로 나열하고 이를 경사도벡터라고 하며 식 (9)과 같다. 경사도벡터(gradient vector)가 점 x^* 에서의 접평면에 수직하며 경사도벡터의 방향은 함수값의 최대증가 방향이 된다.

$$c_i = \nabla f(x^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

여기서,

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

이고,

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) + \beta \cdot d^{(k-1)} \quad (10)$$

$$\beta = \left(\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\nabla f(x^{(k-1)})} \right)^2 \quad (11)$$

i : 설계변수 갯수

k : 반복수

식 (10)은 탐색방향을 나타내는 공역경사방향을 보여주고 있으며, 현재의 최속강하방향은 직전 반복회에 사용된 척도화시킨 방향을 더하여 수정한다. 연속된 최속강하의 방향은 서로 수직하지 않다. 최속강하의 방향이 수직이 되면 수렴하기는

하나 느리게 만든다. 식 (11)은 척도계수를 나타내며 두 반복회에서의 목적함수 경사도벡터길이를 이용하여 정한다. 즉, 공액경사방향은 최속강하방향을 기울어지게 한 것이며 최속강하법의 수렴률을 급격히 향상시키는데 매우 효과적이다.

제약이 없는 최적화 문제에서 구배법으로는 공액경사도방법(conjugate gradient method)을 사용하였다. Fig. 3은 공액경사도방법의 알고리즘을 순서도로 나타내었다. 구배법은 단시간에 최적점을 찾을 수 있는 이점이 있지만, 국부해에 빠질 위험이 있기 때문에 정확한 해를 얻기 위해서 초기해를 여러 곳에 두어 그 중에서 상대적으로 목적함수가 최소가 되는 값을 구하는 최적화를 수행하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 CFRP 복합적층판의 최적적층각

사변이 고정된 CFRP 복합적층판의 적층각을 설계변수로 하여 1차 고유진동수가 최대가 되는 -90° 에서 90° 사이의 범위의 최적적층각을 구하였다. Table 3에 최적적층각을 나타내었으며 층형비(b/a)에 무관하게 모든 적층각이 $[0^\circ]$ 로 나타났다.

Table 3 Optimal ply angle of CFRP

Aspect ratio	No. of plies	Optimal ply angle
1	6	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{sym}$
1.5	6	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{sym}$
2	6	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{sym}$

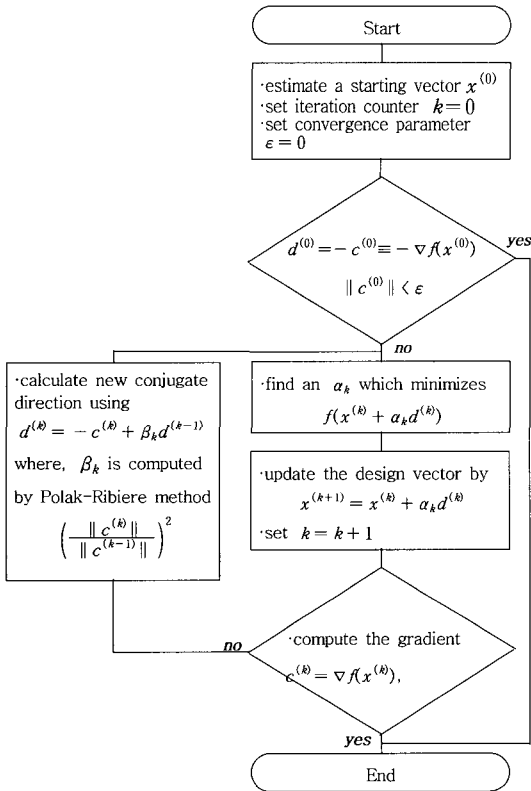


Fig. 3 Flow chart

Table 4 The optimum position of supporting points(SS400)

Aspect ratio (b/a)	No. of supporting	1		2		3	
		optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)	optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)	optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)
1	1	[50.0, 50.0]	76.82	[45.6, 54.9] [53.2, 46.8]	79.96	[33.8, 24.6]	104.81
						[55.5, 33.1]	
						[58.2, 17.8]	
1.5	1	[50.0, 50.0]	43.18	[49.9, 34.7] [66.9, 64.4]	70.05	[16.4, 65.4]	72.40
						[50.1, 57.7]	
						[75.0, 34.4]	
2	1	[50.0, 50.0]	32.34	[50.0, 65.2] [53.2, 34.6]	47.52	[42.0, 27.3]	67.87
						[50.0, 49.9]	
						[50.1, 72.8]	

Table 5 1st mode shape of the optimum position(SS400)

Aspect ratio(b/a)	No. of supporting	Mode shape			
		1	2	3	
1	1				
		1.5			
			2		

Table 6 The optimum position of supporting points(CFRP)

Aspect ratio(b/a)	No. of supporting	1		2		3		
		optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)	optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)	optimum position [x, y](%)	1st natural frequency (Hz)	
1	1	[50.3, 42.0]	61.30	[44.1, 41.1] [65.7, 70.6]	62.98	[40.7, 58.1] [44.1, 28.7] [69.0, 46.9]	87.95	
		1.5	[53.1, 47.2]	39.99	[47.4, 59.5] [80.5, 37.2]	45.18	[35.5, 64.1] [47.8, 30.5] [86.6, 47.4]	54.87
			2	[45.9, 57.2]	34.61	[43.7, 80.0] [56.1, 45.3]	40.22	[18.6, 22.9] [45.3, 48.8] [94.1, 33.5]

Table 7 1st mode shape of the optimum position(CFRP)

Aspect ratio(b/a)	No. of supporting	Mode shape		
		1	2	3
1	1			
	2			
	3			
1.5	1			
	2			
	3			
2	1			
	2			
	3			

4.2 최적 점지지 위치 및 모드형상

Table 4는 사변이 고정된 SS400 구조용 압연강의 종횡비(b/a)에 따른 평판 모델의 점지지 위치를 설계변수로 하여 1차 고유진동수가 최대가 되는 점지지 위치와 고유진동수를 나타내었으며, Table 5는 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 점지지 위치에서의 모드형상을 나타내었다.

Table 6은 사변이 고정된 CFRP 복합적층판의 종횡비(b/a)에 따른 점지지 위치를 설계변수로 하여 1차 고유진동수가 최대가 되는 점지지 위치와 고유진동수를 나타내었으며, Table 7은 1차 고유

진동수가 최대가 되는 최적의 점지지 위치에서의 모드형상을 나타내었다.

5. 결 론

본 연구에서는 사변이 고정된 SS400 구조용 압연강과 CFRP 복합적층판의 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 점지지 위치 결정과 CFRP 복합적층판의 적층각에 대한 최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 사변이 고정된 CFRP 복합적층판의 적층각

을 설계변수로 하여 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적 적층각은 중횡비(b/a)에 무관하게 모든 적층각이 $[0^\circ]$ 로 나타났다.

2. 사변이 고정된 SS400 구조용 압연강과 CFRP 복합적층판의 중횡비(b/a)와 점지지 개수(1~3)에 따른 평판 모델의 점지지 위치를 설계변수로 하여 평판의 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 점지지 위치와 고유진동수를 제시하였으며 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 점지지 위치에서 모드형상을 나타내었다.

참고문헌

[1] Wang, B. P., and Nomura, S., "Optimal support location for maximizing fundamental natural frequency of a free-free rectangular plate," Computer Aided Optimum Design of Structures : Recent Advances, edited by C. A. Brebbia and S. Hernandez, Springer-Verlag, Berlin, pp. 277-286, (1989)

[2] Son, J. H., and Kwak, B. M., "Optimization of boundary conditions for maximum fundamental frequency of vibrating structures," AIAA Journal, Vol. 31, No. 12, December, pp. 2351-2357, (1993)

[3] Tauchert, T. R. and Adibhtla, S., "Design of laminated plates for maximum stiffness," Journal of Composite Materials, Vol. 18, pp. 58-69, (1984)

[4] 홍도관, 김동영, 최경호, 안찬우, "진동을 고려한 원공복합적층판의 최적적층설계," 한국소음진동공학회, Vol. 13, No. 6, pp. 423-429, (2003)

[5] 홍도관, 안찬우, 김동영, 최석창, 박일수, "보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적위치 선정에 관한 연구," 한국소음진동공학회, Vol. 11, No. 1, pp. 89-95, (2001)

저 자 소 개



김문경 (金文經)

1964년 8월생, 1988년 부산대학교 기계공학과 졸업, 1992년 부산대학교 대학원 기계공학과 졸업(석사), 1998년 부산대학교 대학원 기계공학과 졸업(박사), 1997년~현재 창원전문대학 자동차기계계열 조교수



홍도관 (洪到瑄)

1972년 2월생, 1998년 동아대학교 기계공학과 졸업, 2000년 동아대학교 대학원 기계공학과 졸업(석사), 2004년 동아대학교 대학원 기계공학과 졸업(박사), 현재 한국전기연구원 메카트로닉스 연구그룹