

■ 論 文 ■

민감도 분석을 이용한 연속형 교통망설계모형의 개발

Development of a Continuous Network Design Model Based on Sensitivity Analysis

임 용 택

(여수대학교 교통물류시스템공학부 조교수)

목 차

I. 서론	2. 해석 알고리즘
II. 교통망설계모형	IV. 모형의 평가
1. 교통망설계모형의 구조	1. 교통망설계 예제
2. 기존 풀이 알고리즘	2. 설계변수로 용량을 고려한 경우
III. 연속형 교통망설계모형의 개발	V. 결론
1. 민감도를 이용한 연속형 교통망설계모형	참고문헌

Key Words : 연속형 교통망설계, 민감도(Sensitivity), Stackelberg게임, Cournot-Nash게임, Braess역설

요 약

교통망설계문제란, 교통시스템을 최적상태로 만들기 위한 최적의 설계변수를 결정하는 문제이다. 대표적인 교통망설계문제로는 도로를 신설하거나 확장하는 문제가 있으며, 이외에 교통신호시간의 결정, 교통정보의 제공, 혼잡통행료 부과, 새로운 교통수단의 도입 등 여러 교통정책분야가 교통망설계문제에 포함된다고 볼 수 있다. 일반적으로 교통망설계문제는 bi-level구조로 구축되는데, 기존 대부분의 연구들은 상위문제와 하위문제를 서로 협력없이(Noncooperative) 자신들만의 목적을 최적화시키는 Cournot-Nash게임형태로 구성하여 풀고 있으나, 실제 교통분야에서 다루는 문제들은 리더(leader)와 추종자(follower)가 존재하는 Stackelberg게임에 가깝다고 할 수 있다. 기존 bi-level 문제들이 Cournot-Nash게임형태로 구성되어 풀고 있는 이유는 Stackelberg게임으로 구성할 경우 풀기가 어렵기 때문이다.

이런 측면에서 본 연구는 리더와 추종자가 존재하는 Stackelberg게임으로 교통망설계문제를 구성하며, 설계변수값에 따른 통행자의 행태변화도 인지오차(perceived error)를 고려한 확률적 통행배정문제로 구성하여 좀 더 현실적인 결과를 도출하도록 한다. 제시된 모형을 풀기 위하여 민감도분석(Sensitivity analysis)을 이용하며, 설계문제의 해를 구하는 알고리즘도 제시한다. 또한, 이 기법을 일반 도로교통망(general transportation road network)에 적용할 수 있도록 민감도(sensitivity) 유도과정을 자세히 기술하였다. 개발된 모형을 평가하기 위하여 2개의 예제 교통망을 대상으로 모형을 적용한 결과, 합리적인 값들을 도출하고 있음을 확인할 수 있었다.

I. 서론

최근 교통망설계문제(Network Design Problem, NDP)에 대한 관심이 높아지고 있는데, 이는 교통시스템의 비용을 최소화시키려는 여러 교통정책들을 평가하는 도구로 교통망설계문제가 이용되기 때문이다. 즉, 교통망설계문제란, 교통시스템을 최적상태로 만들기 위한 최적의 설계변수를 결정하는 문제라 볼 수 있다. 기존에 연구되어진 교통망설계문제의 대표적인 분야는 도로를 신설하거나 확장하는 문제가 있으며, 이외에 최적 교통신호설계(Traffic Signal Control Problem), 교통정보의 제공문제(Traffic Information Provision Problem) 그리고 혼잡통행료 부과(Congestion Toll Levying Problem) 등도 교통망설계문제에 포함된다 고 볼 수 있다. 따라서, 교통망설계문제는 교통혼잡을 완화시키기 위한 제반 교통정책들을 결정하는 분야에 활용되고 있다.

교통망설계문제는, 설계변수가 연속형이나 이산형이나에 따라 연속형 교통망 설계 문제(Continuous NDP)와 이산형 교통망 설계 문제(Discrete NDP)로 구분되는데, 이산형의 경우, 도로 폐쇄, 새로운 대중교통 수단의 도입, 교량이나 터널, 고가도로 같은 새로운 도로나 철도 궤도의 건설 등이 있으며, 연속형의 경우, 도로 확폭(차로수)의 결정, 교차로에서의 신호 시간의 결정, 대중 교통 요금이나 혼잡통행료와 같은 사용자 부담금의 결정, 고속도로 램프 미터링율의 결정 등이 여기에 속한다.

일반적으로 교통망설계문제는 통행자의 행태를 반영하면서 특정 목적함수(예를 들어, 총 사회비용)를 최적화시키는 형태로 구성되기 때문에 비선형 비볼록(Nonlinear Nonconvex)문제가 되어 풀기가 어려워진다. 따라서 휴리스틱(heuristic)방법으로 원모형을 상위문제와 하위문제로 구분하여 Bi-level 프로그램으로 변환시켜 문제를 풀게 된다. 즉, 상위문제는 목적하는 특정함수를 최소화시키는 형태이며, 하위문제는 통행자의 행태를 반영하는 형태로 구축된다. 그런데, 상위문제와 하위문제를 구성할 때 각 문제들이 서로 협력없이(Noncooperative) 자신들만의 목적을 최적화시키는 형태로 구성하느냐, 아니면 리더(leader)와 추종자(follower)가 존재하여, 리더는 추종자의 행태를 알 수 있다는 가정하에 문제를 구성하느냐에 따라 모형식이 크게 달라지게 된다. 전자를 Cournot-Nash 게임이라고 하고 후자를 Stackelberg게임이라고 한다.

이들 게임에 대해서는 Fisk(1984), Yang et al. (1998) 등에 잘 설명되어 있으며, Fisk는 최소화문제를 통하여 Stackelberg게임이 Cournot-Nash게임보다 더 낮은 목적함수값을 갖는 해를 도출한다는 사실을 보여주었다. 이것은 상위문제인 리더가 하위문제인 추종자의 움직임을 알고 있다는 상황(cooperative) 하에서 문제를 풀기 때문인데, 이때 상위문제와 하위문제간에는 명시적인 함수형태가 존재하게 된다.

그런데, 앞에서 기술한 도로확장이나, 교차로 신호 시간결정, 혼잡통행료 부과 등 여러 교통정책의 경우, 일반적으로 교통운영자(리더)들은 이들 정책이 도입되었을 때 운전자(추종자)들이 어떻게 그들의 경로를 변경할 것인지를 알고 있다고 가정하는 것이 타당하기 때문에 Stackelberg게임이 된다. 즉, 교통분야에서 다루고자하는 제반 교통정책들은 교통운영자가 통행자의 행태를 알고 교통정책변수를 결정한다고 가정하는 것이 현실적이기 때문에, Cournot-Nash게임보다는 Stackelberg게임에 가깝다고 할 수 있다.

그러나 현재까지 제시된 대부분의 bi-level 문제들이 Cournot-Nash게임형태로 구성되어 풀고 있는데, 이는 Stackelberg게임으로 구성할 경우 풀기가 어렵기 때문이다. Cournot-Nash게임의 경우 여러 휴리스틱 기법들이 잘 개발되어 있지만, Stackelberg게임의 경우, 최근에야 일부 풀이 기법들이 제시되고 있다(Tobin et al., 1988; Suwansirikul et al., 1987; Yang, 1995; Yang 1997). 본 연구에서는 교통망설계문제를 리더와 추종자가 존재하는 Stackelberg게임으로 구성하며, 통행자의 행태도 확정적(deterministic)이 아닌 인지통행비용(Perceived travel cost)을 갖는 확률적 통행배정문제(Stochastic traffic assignment)로 구성한다. 풀이 알고리즘도 기존에 발표된 연구와는 달리 민감도분석(Sensitivity analysis)을 이용하여 Stackelberg게임의 해를 구하는 알고리즘을 제시한다. 따라서 기존 연구와는 모형의 구성과 풀이과정에 차이가 있다. 본 연구에서 개발된 모형은 2개의 예제 교통망에 적용하여 모형을 평가하고 시사점을 도출한다.

II. 교통망설계모형

1. 교통망설계모형의 구조

먼저, 본 연구에서 사용되는 주요 변수는 다음과 같다.

- x : 링크 교통량 벡타 $\{\dots, x_a, \dots\}$, $a \in A$
- c : 링크 통행비용 벡타 $\{\dots, c_a, \dots\}$, $a \in A$
- $p(c)$: 링크 선택확률벡타 $\{\dots, p_a^r(c), \dots\}$,
 $a \in A, r_s \in F$
- T : OD 통행수요 벡타 $\{\dots, T_{rs}, \dots\}$, $rs \in W$
- s : 설계변수 벡타 $\{\dots, s_b, \dots\}$, $b \in B$
- $u(s)$: 설계변수에 대한 건설비용벡타
 $\{\dots, u_b(s), \dots\}$, $b \in B$

여기서,

- A : 모든 링크집합
- B : 설계변수가 고려되는 링크집합, $B \subset A$
- F : 모든 기종점 집합

교통망설계문제의 상위문제는 여러 형태로 구성될 수 있는데, 현재까지 대표적으로 사용되는 목적함수는 건설비용을 포함한 총통행비용을 최소화시키는 문제로 구성되어 왔다. 여기서 건설비용이란 모형에서 도출된 최적 설계변수만큼 교통망을 변화시키는데 소요되는 비용(예를 들어 용량을 확장시키거나 혼잡통행료를 부과시키기 위한 시설의 설치비용 등)을 의미한다. 이 경우 상위문제는 식(1)과 같이 표현된다.

$$\text{minimize } Z(s, x) = x \cdot c(x, s) + u(s) \quad (1)$$

여기서,

- x, c : 링크 통행량벡타와 링크 통행비용벡타
- s : 설계변수(design parameter)
- $u(s)$: 건설비용벡타이다.

이외에 통행자의 수요변화를 고려하여 통행자의 잉여(consumer surplus)를 최대화시키는 형태로 모형을 구성할 수도 있다.

하위문제의 경우, 변경된 교통망에 따라 변화된 통행자의 경로선택행위를 반영해야 하기 때문에 통행배정(traffic assignment)모형이 하위문제가 된다. 대부분의 경우, 결정적 통행배정(deterministic traffic assignment)로 구성되며, Beckmann의 동등 수리 최소화문제(equivalent mathematical minimization program)나 다음과 같이 변동부등식(variation inequality)로 표현된다.

$$c(x)(x - y) \leq 0 \quad (2)$$

여기서,

- $c(x)$: 균형상태 통행벡타 x 의 통행비용벡타
- y : 가능해 통행벡타

하위문제 역시, 가변수요를 고려하여 구성할 수 있으며, 확률적 통행배정모형을 이용할 수도 있다.

2. 기존 풀이 알고리즘

위 교통망설계 문제를 풀기 위한 기법들이 그동안 꾸준히 개발되어 왔다. 이산형 교통망 설계문제의 경우, 투자 단위가 이산형이고 여러 대안들을 조합해서 풀어야 하는 조합 최적화문제(Combinatorial optimization problem)로 계산량이 과도한 NP-hard 문제로 알려져 왔다. 이산형 교통망설계문제의 대표적인 풀이 알고리즘으로는 분단 탐색법(Branch and bound method), 분할법(Decomposition method), 경험적 방법(Heuristic method) 등이 있으며 연속형 교통망설계문제의 경우, IOA(Iterative Optimization Assignment) 알고리즘, Equilibrium Decomposed Optimization(EDO) 알고리즘, Hooke-Jeeves 알고리즘, Sensitivity Analysis Based(SAB) 알고리즘 등이 있다. 이중 연속형 문제에 주로 사용되고 있는 방법이 IOA방법인데, 이 방법은 상위문제를 최적화시켜 구한 설계변수를 가지고 하위문제인 통행배정을 실시한후, 여기서 구한 통행량을 이용하여 다시 상위 설계변수를 결정하는 과정을 반복해서 수행한다. 이런 과정은 관측통행량을 이용한 기종점 통행행렬추정(OD matrix estimation)에 주로 사용되는 IEA(Iterative Estimation Assignment)와 동일한 기법이다. 즉, IOA는 상위문제와 하위문제가 서로 독립적으로 존재하면서 설계변수와 통행량을 서로 주고 받는 형태를 갖고 있어 Cournot-Nash게임형태이다. 이에 반해, 최근에 제시된 SAB알고리즘(Yang et al.,1994)은 상위문제에서 결정된 설계변수 변화에 대해 하위문제의 통행량변화를 민감도를 통해 수식화시켜 고려하기 때문에 Stackelberg게임이라고 볼 수 있다. 현재까지 개발된 교통망설계문제와 이의 풀이 알고리즘에 대해서는 Yang et al.(1998)에 잘 정리되어 있다.

이밖에 최근에는 교통망설계문제의 전역해를 구하려는 노력으로 시뮬레이션 기법의 일종인 모의 담금질(Simulated Annealing) 알고리즘이나 유전(Genetic)

알고리즘을 통하여 교통망설계문제를 풀려는 연구들도 진행되고 있으며 이들 기법에 대한 내용은 김재영 외(2000)에 기술되어 있다.

III. 연속형 교통망설계모형의 개발

본 연구에서 제시하는 교통망설계문제는 리더와 추종자가 존재하는 Stackelberg게임형태로 구축되며, 통행수요는 고정된 것으로 가정한다. 또한, 상위문제의 목적함수는 건설비용을 포함한 총통행비용(total travel cost)을 최소화시키며, 하위문제는 확률적 로짓 통행배정문제에 구성한다.

일반적으로 확률적 통행배정문제를 링크기반(link-based)으로 표현하면 다음과 같다.

$$x - p(c)T = 0$$

즉, OD 통행량에 해당링크의 통행선택확률을 곱하면, 그 링크의 통행량을 구할 수 있다. 따라서, 총 통행비용을 최소화시키는 설계변수 s 를 구하는 상위문제와 확률적 통행배정문제를 하위문제로 고려하게 되면 다음과 같은 bi-level 교통망설계문제가 된다.

[상위문제]

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_s \quad Z(s, x(s)) \\ & = \sum_{a \in A} x_a(s) \cdot c_a(x_a(s), s) + \sum_{b \in B} u_b(s) \end{aligned} \quad (3)$$

[하위문제]

$$x - p(c(x, s))T = 0 \quad (4)$$

또는,

$$x_a - \sum_{rs \in F} p_a^{rs}(c(x, s))T_{rs} = 0$$

subject to,

$$\sum_k f_k^{rs} = T_{rs}$$

$$x_a = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

여기서, f_k^{rs} 는 기종점 rs 간 경로 k 의 통행량이며, $\delta_{a,k}^{rs}$ 는 rs 간 경로 k 가 링크 a 에 속하면 1, 그렇지 않으면 0인 가변수이다.

상위문제에서 유의할 점은 링크 통행벡터 x 가 설계

변수 s 의 함수라는 것이다. 즉, 이것은 설계변수가 변함에 따라 도출되는 링크통행량의 변화를 상위문제에 고려한다는 것으로, 이는 리더가 추종자의 변화를 알고 상위문제를 결정한다는 Stackelberg게임형태로 상위문제가 구성되었음을 의미한다. 즉, 교통망설계문제에서 일반적으로 사용되는 상위문제인 식(1)과 같은 Cournot-Nash게임과 본 연구의 Stackelberg게임과의 차이를 분명히 알 수 있다.

여기서 문제가 되는 것은 링크 통행벡터 x 와 설계변수 s 의 관계를 어떻게 고려하느냐가 문제인데, 본 연구에서는 민감도분석(sensitivity analysis)을 통하여 이를 반영한다. 민감도를 이용하여 링크 통행량 x 와 설계변수 s 의 관계를 구하려는 연구는 Tobin et al.(1988)이 처음 제시하였으며, 이후 여러 교통분야에 적용되고 있다(Friesz et al.,1990; Yang and Yagar, 1994; Yang et al.,1994). 본 연구와의 차이는, 기존연구에서는 하위문제로 결정적(deterministic) 통행배정문제를 고려하여 근사적으로 민감도를 반영하지만, 본 연구에서는 링크 통행량과 설계변수와의 관계를 로짓모형을 이용하여 명확한 함수관계로 고려한다는 점이다.

1. 민감도를 이용한 연속형 교통망설계모형

1) 민감도 분석

먼저, 링크 통행비용함수의 변동(perturbation)에 대하여 고려해 보자. 하위문제인 확률적 통행배정문제(식(4))로부터 우리는 다음과 같은 새로운 함수를 설정할 수 있다.

$$f(x, s) \equiv x - p(c(x, s))T$$

여기서, $x^*(s)$ 를 설계변수 s 가 주어진 상태에서의 확률적 균형통행량이라고 정의하면

$$f(x^*(s), s) = 0$$

이 된다.

함수 f 가 변수 s 에 대하여 미분가능하다고 가정하고, $f(x, s)$ 를 $(x, s) = (x^*(s_0), s_0)$ 에서 1차 Taylor series로 확장하면 다음과 같다.

$$f(x, s) \approx f(x^*(s_0), s_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)}(x - x^*(s_0)) + \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)}(s - s_0) \quad (5)$$

식(5)에서 우변의 1차 편미분함수는 함수 $f(x, s)$ 를 각각 x 와 s 에 대해서 편미분한 것으로 다음과 같이 정의한다.

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)} \\ J_s = \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)} \quad (6)$$

초기 설계변수 s_0 가 주어진 상태에서 확률적 균형 통행량을 $x^*(s_0)$ 라 놓으면

$$f(x^*(s_0), s_0) = 0$$

가 되며, $x(s)$ 에 대하여 확률적 균형상태 $f(x(s), s) = 0$ 로 부터 식(5)는 다음과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$0 \approx 0 + J_x(x - x^*(s_0)) + J_s(s - s_0)$$

이를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$x(s) = x^*(s_0) + (-J_x^{-1}J_s)(s - s_0) \quad (7)$$

여기서,

$$J_x^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)} \right]^{-1} \\ J_s = \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{(x^*(s_0), s_0)} \quad (8)$$

식(7)은 설계변수 s 와 링크 통행량 x 간의 명시적인 관계를 나타낸다. 이 식으로부터 우리는 설계변수 s 에 대한 균형 링크 통행량의 민감도(sensitivity)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial x(s)}{\partial s} = -J_x^{-1}J_s \quad (9)$$

2) 일반 교통망에서의 민감도

자, 이제 일반적인 교통망에서 로짓 경로선택모형을

이용하여 민감도(식(9))를 구하는 방법을 살펴보자. 먼저, 경로 k 의 통행비용은 다음과 같다.

$$c_k = \sum_a c_a \delta_{ak}$$

여기서, c_a 는 링크 a 의 통행비용이며, δ_{ak} 는 경로 k 가 링크 a 에 속하면 1, 그렇지 않으면 0인 가변수이다. 따라서, 로짓 경로선택확률은 다음과 같이 표현된다.

$$p_k(c) = \frac{\exp(-\theta c_k)}{\sum_i \exp(-\theta c_i)} \quad i \in K(\text{pathset}) \quad (10)$$

여기서, 경로선택확률과 링크선택확률간에는 다음과 같은 관계가 존재한다.

$$p_a(c) = \sum_k p_k(c) \delta_{ak} \quad k \in K$$

식(7),(8)의 관계식을 구하기 위해서는 함수 f 에 대한 링크 통행량 x 와 설계변수 s 에 대한 다음과 같은 편미분 정보가 필요하다.

$$\frac{\partial f_b}{\partial x_a} = -\frac{\partial}{\partial x_a}(x_b - p_b(c)T) \\ = x_{ba} - \left(\frac{\partial p_b(c)}{\partial c_a} \frac{\partial c_a}{\partial x_a} \right) T \\ a, b \in \text{Linkset} \quad (11)$$

여기서, x_{ba} 는 Kronecker delta이고, $\frac{\partial c_a}{\partial x_a}$ 는 링크 비용함수가 결정되면 쉽게 구할 수 있으며, $\frac{\partial p_b(c)}{\partial c_a}$ 는 다음과 같이 변경될 수 있다.

$$\frac{\partial p_b(c)}{\partial c_a} = \frac{\partial}{\partial c_a} (\sum_k p_k(c) \delta_{bk}) = \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial c_a} \delta_{bk} \\ k \in K(\text{Pathset})$$

여기서, $\frac{\partial p_k}{\partial c_a}$ 는 식(10)의 로짓모형을 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial p_k}{\partial c_a} = -\theta [p_k \delta_{ak} - p_k (\sum_i p_i \delta_{ai})] \quad i \in K$$

따라서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_b(c)}{\partial c_a} &= \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial c_a} \delta_{bk} \\ &= -\theta \sum_k [p_k \delta_{ak} - p_k (\sum_i p_i \delta_{ai})] \delta_{bk} \end{aligned}$$

이며, 최종적으로 식(11)은 식(12)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_b}{\partial x_a} &= x_{ba} - \theta \left(\frac{\partial c_a}{\partial x_a} \right) \sum_k [p_k \delta_{ak} - p_k (\sum_i p_i \delta_{ai})] \delta_{bk} \cdot T \\ & \quad k, i \in K(\text{Pathset}) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $\delta_{ak}, \delta_{bk}, \delta_{ai}$ 는 $a, b \in k, a \in i$ 이면 1, 그렇지 않으며 0인 가변수이다.

위의 동일한 방법으로 $\frac{\partial f_b}{\partial s_a}$ 도 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_b}{\partial s_a} &= \frac{\partial}{\partial s_a} (x_b - p_b(c)T) = - \left(\frac{\partial p_b(c)}{\partial c_a} \frac{\partial c_a}{\partial s_a} \right) T \\ &= \theta \left(\frac{\partial c_a}{\partial s_a} \right) \sum_k [p_k \delta_{ak} - p_k (\sum_i p_i \delta_{ai})] \delta_{bk} \cdot T \end{aligned} \quad (13)$$

따라서, 식(12)와 식(13)을 이용하여 식(7)을 구할 수 있다.

3) 연속형 교통망설계모형의 구성

민감도를 통하여 식(7)이 구해짐에 따라 확률적 통행배정을 고려한 연속형 교통망설계문제를 구성할 수 있다. 건설비용은 다음과 같이 설정한다.

$$u_b(s) = Cw(s_b - s_{b0})^\alpha$$

여기서, s_b 와 s_{b0} 는 링크 b 의 설계변수와 초기 설계 변수값을 나타내며, Cw, α 는 파라메타이다. 따라서 앞에서 제시된 설계문제(식(3)과 식(4))는 다음과 같이 쓸 수 있다.

[상위문제]

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_s \quad Z(s, x(s)) \\ & = \sum_{a \in A} x_a(s) \cdot c_a(x_a(s), s) + \sum_{b \in B} u_b(s) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x_a(s) &= x_a^*(s_0) + (-J_x^{-1} J_s)(s - s_0) \\ u_b(s) &= Cw(s_b - s_{b0})^\alpha \end{aligned}$$

[하위문제]

$$x_a - \sum_{rs} p_a^{rs}(c(x, s)) T_{rs} = 0 \quad (15)$$

subject to,

$$\sum_k p_k^{rs} = T_{rs}$$

$$x_a = \sum_{rs} \sum_k p_k^{rs} \delta_{a,k}$$

2. 해석 알고리즘

본 연구에서 제시한 연속형 설계문제를 풀기 위한 알고리즘을 정리하면 다음과 같다. 알고리즘의 기본 원리는 하위문제와 상위문제의 풀이과정을 반복하게 되는데, 설계변수의 변화에 따른 링크 통행량의 변화를 민감도분석을 통하여 풀이과정에 반영하게 된다.

[단계0] 초기화

반복수 $n=0$, 초기설계변수 s^0

[단계1] $n = n + 1$

[단계2] s^{n-1} 을 이용하여 하위문제를 풀어 $x(s^{n-1})$ 산출

[단계3] 민감도값(J_x^{-1}, J_s) 계산후, 다음 식으로

$x(s^n, s^{n-1})$ 계산 :

$$x(s^n, s^{n-1}) = x(s^{n-1}) + (-J_x^{-1} J_s)(s^n - s^{n-1})$$

[단계4] 상위문제 $Z[s^n, x(s^n, s^{n-1})]$ 를 풀어 설계변수

s^n 결정

[단계5] 수렴성 검토

만약 $|s^n - s^{n-1}| < \epsilon$ 이면 정지, 그렇지 않으면

(단계1)로 진행

여기서, [단계2]의 하위문제와 [단계4]의 상위문제를 풀기 위한 방법은 여러 가지가 있다. 먼저, 상위문제의 경우, 다변수 비제약 비선형 최소화문제(Unconstrained nonlinear minimization program in multidimensions)로 Newton-Rapson방법, DFP(Davidon-Fletcher-Powell)방법, BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)방법 등이 있는데, 본 연구에서는 역행렬(inverse matrix)계산과정이 필요 없는 DFP방법을 이용한다.

1) 상위문제 풀이과정(DFP방법)

DFP방법의 풀이과정은 다음과 같으며 자세한 내용은 Bazaraa 외(1993)에 기술되어 있다.

[초기화]

초기값설정 s_1 , 초기 양정 대칭행렬 D_1
 $y_1 = s_1, k = j = 1$ 로 설정

[반복과정]

(단계1) 갱신(update)

- 1.1 만약 $|\nabla Z(y_j)| < \epsilon$ 이면 정지
 그렇지 않으면, $d_j = -D_j \nabla Z(y_j)$ 로 놓고
 $\min Z(y_j + \lambda d_j)$ 를 풀어 λ_j 를 구함
- 1.2 $y_{j+1} = y_j + \lambda_j d_j$
- 1.3 만약 $j < n$ (변수수)이면 (단계2)로 진행
 만약 $j = n$ 이면, $y_1 = s_{k+1} = y_{n+1}$ 후,
 $k = k + 1, j = 1$ 로 설정후 (단계1)로 진행

(단계2) 행렬계산(Matrix calculation)

2.1 D_{j+1} 계산 : $D_{j+1} = D_j + \frac{p_j p_j^T}{p_j^T q_j} - \frac{D_j q_j q_j^T D_j}{q_j^T D_j q_j}$

여기서, $p_j = \lambda_j d_j = y_{j+1} - y_j$
 $q_j = \nabla Z(y_{j+1}) - \nabla Z(y_j)$

2.2 $j = j + 1$ 후, (단계1)로 진행

2) 하위문제 풀이과정(직접로짓배정법)

하위문제인 확률적 통행배정문제의 경우도, 기존에 여러 방법들이 제시되어 있다. 대표적인 방법으로 Dial (1971)의 STOC기법이 있으며, 최근 경로기반(path-based) 기법들도 제시되고 있다(Akamatsu, 1996; Bell, 1995; Maher, 1998, 임용택, 2003). 이중 어떤 방법을 적용해도 좋으나, 본 연구에서는 모형의 적용이 간편한 직접로짓배정법(direct logit loading method; 임용택, 2003)을 사용하며 다음과 같다.

(단계0) 초기화

초기값설정 : 초기 경로통행비용 $\{c_k^{rs,0}(0)\}$,
 기준점 통행수요 T_{rs} , 파라메타 θ
 반복수 $n = 1$

(단계1) $\{c_k^{rs,n}\}$ 를 기초로 경로통행량($f_k^{rs,n}$)계산

$$f_k^{rs,n} = T_{rs} \frac{\exp(-\theta c_k^{rs,n})}{\sum_w \exp(-\theta c_w^{rs,n})}$$

(단계2) 경로통행비용 갱신

- 2.1 $\{f_k^{rs,n}\}$ 를 기초로 경로통행비용($c_k^{rs,n}$) 계산
- 2.2 동등 경로통행비용계산 :
 $C_k^{rs,n} = c_k^{rs,n} + \frac{1}{\theta} \ln(f_k^{rs,n})$

(단계3) 수렴성검토

$$\text{만약 } \frac{\max |C_k^{rs,n} - C_{k-1}^{rs,n}|}{\max_{w \in W} \{C_w^{rs,n}\}} < \epsilon,$$

$\forall k \neq p \in W(\text{path set})$ 이면, 정지
 그렇지 않으면, $n = n + 1$ 후 [단계1]로 진행

V. 모형의 평가

본 연구에서 제시된 연속형 교통망 설계모형을 평가하기 위하여 2개의 예제 교통망을 이용한다. 처음 예제는 2개의 링크(경로)로 이루어진 단순한 형태로 본 연구에서 제시된 교통망설계모형이 목적하는 결과를 도출하는지 평가하기 위한 것이며 두 번째 교통망은 좀 더 복잡한 형태로 링크 용량증가를 설계변수로 고려하여 분석한다.

1. 교통망설계 예제

1) 예제 교통망

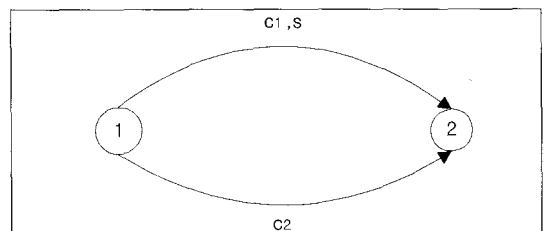
(그림 1)과 같은 단순한 교통망에 사용되는 각 링크의 통행비용은 다음과 같다.

$$c_1(x_1) = 1 + sx_1^2$$

$$c_2(x_2) = 2 + x_2$$

설계대상 구간은 링크1이며, 따라서 설계변수를 고려하지 않는 초기상태($s = s_0 = 1.0$)에서의 링크1의 통행비용은 $c_1(x_1) = 1 + x_1^2$ 이다. 기준점간 통행량은 1로 설정하며, 로짓모형의 파라메타는 $\theta = 0.5$ 로 가정한다. 또한 설계변수를 수행하는데 소요되는 비용(예를 들어 용량을 증가하는데 소요되는 비용)에 포함되는 파라메타는 각각 $Cw = 20, \alpha = 2$ 이다. 따라서 건설비는 다음과 같이 표현된다.

$$u_1(s) = 20(s-1)^2$$



(그림 1) 단순 예제교통망

2) 분석결과

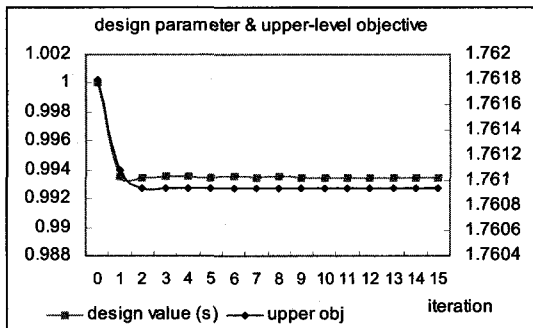
본 연구에서 제시한 모형을 단순 교통망에 적용한 결과가 <그림 2>, <그림 3>과 <표 1>에 나타나 있다. <그림 2>는 상위문제 목적함수값과 설계변수값의 변화를 보여주고 있는데, 반복횟수가 증가함에 따라 목적함수는 초기 1.7618에서 1.7610으로 감소(-0.11%) 하고 있으며, 설계변수도 초기 $s=1.0$ (설계변수의 영향이 없는 상태)에서 최종 $s=0.993458$ 로 안정적인 값에 도달하고 있다.

<표 1>은 링크 교통량과 민감도 그리고 통행비용에 대하여 설계변수를 고려하지 않은 초기상태의 경우(즉, $s=1.0$)와 최종적으로 모형을 통하여 산출된 경우($s=0.993458$)로 나누어 정리되어 있다. 먼저, 본 연구에서 개발한 모형이 사용자 균형에 도달했다는 사실은 동등 경로통행비용(equivalent path cost)을 통하여 알 수 있다. 본 연구와 같이 통행자의 행태를 확률적 균형상태로 고려한 경우, 일반적으로 각 경로의 통행비용은 동일하지 않으며, 대신 확률적 사용자 균형해에 도달하게 되면, 동등 경로통행비용이 동일하게 된다(Sheffi, 1985; 임용택, 2003). 여기서, 동등 경로 통행비용은 다음과 같이 정의된다.

동등 경로통행비용(equivalent path cost) :

$$C_k^s = c_k^s + \frac{1}{\theta} \ln(f_k^s)$$

여기서, c_k^s 는 기종점 rs 간 경로 k 의 통행비용이며, θ 는 양의 파라메타이고 f_k^s 는 경로 k 의 통행량이다. 표에서 보듯이 설계변수의 영향을 고려하지 않은 초기 상태나 설계변수가 도입된 경우 모두, 각 경로간 동등 경로통행비용이 동일하게 나타나 하위문제(lower level problem)의 해가 확률적 사용자균형상태에 수



<그림 2> 상위문제 목적함수와 설계변수값의 변화

<표 1> 단순 교통망 분석결과($\theta=0.5$)

(a) (설계변수의 영향이 없는 상태: 초기상태 $s=s_0=1.0$)

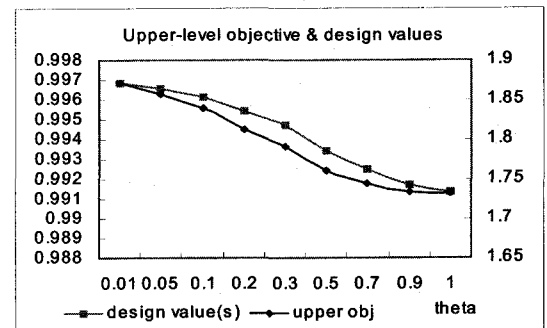
링크	통행량	민감도 $\left(\frac{\partial x_a}{\partial s}\right)$	통행비용	동등 경로 통행비용
1	0.621537	-	1.386308	0.435189
2	0.378463	-	2.378463	0.435189

(설계변수를 고려한 상태: 최종상태 $s=0.993458$)

링크	통행량	민감도 $\left(\frac{\partial x_a}{\partial s}\right)$	통행비용	동등 경로 통행비용
1	0.621772	-0.035997	1.384072	0.433709
2	0.378228	0.035997	2.378228	0.433709

렴했음을 보여주고 있다.

<표 1>에 나타나 여러 값들 중 민감도를 유의해서 살펴볼 필요가 있는데, 설계변수(s)값에 따른 각 링크의 민감도는 -0.035997과 0.035997로 나타나 있다. 이것은 링크1의 경우, 설계변수값이 1 단위증가하면 링크 통행량이 0.035997만큼 감소한다는 의미이며, 반대로 링크 2의 경우 0.035997 만큼 통행량이 증가함을 나타낸다. 본 예제와 같은 링크 통행비용함수를 갖는 링크1의 경우, 설계변수(s)가 증가하게 되면 링크 통행비용이 증가하게 되어 링크1에 배정되는 통행량은 감소하기 때문이다. 그러나 링크1의 경우 설계변수가 $s=1.0$ 에서 0.993458로 감소했기 때문에, 링크1의 통행량이 0.621537(설계변수를 고려하지 않은 상태)에서 0.621772로 증가(+0.038%)하고 있다. 즉, 본 예제와 같이 2개의 링크로 구성된 단순 교통망의 경우, 특정 링크의 설계변수값이 변화에 따라 각 링크들의 통행량변화가 동일한 수치로 반대방향으로 나타남을 알 수 있다.



<그림 3> θ 값의 변화에 따른 상위목적함수값과 설계변수의 변화

〈그림 3〉은 로짓모형의 스케일 파라메타(θ)값의 변화에 따른 상위 목적함수와 설계변수값의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 보듯이 θ 값이 커짐에 따라 목적함수 값이 점진적으로 감소하고 있는데, 이는 θ 값이 증가하여 결정적(deterministic) 통행배정 상태에 가까워짐에 따라 목적함수 값도 감소하고 있음을 보여주고 있다.

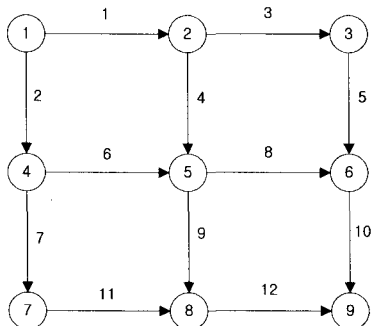
2. 설계변수로 용량을 고려한 경우

두 번째 예제는 〈그림 4〉와 같이 9개의 노드와 12개의 링크 그리고 6개의 경로로 이루어져 있다. 교통망의 각 링크별 입력자료는 〈표 2〉에 나와 있으며, 표에서 보듯이 외곽 링크인 링크3, 링크5, 그리고 링크7과 링크11은 내부 링크에 비해 상대적으로 적은 용량으로 설정하였다. 기준점쌍은 1개(노드1에서 노드9)이며, 통행수요는 100대로 설정한다 ($\theta=0.02$). 사용되는 링크 통행비용은 식(16)과 같은 BPR(Bureau of Public Road)통행비용을 사용하며, 설계변수로 용량증가를 고려하는 링크에는 링크용량에 설계변수를 추가하는 형태로 되어 있다. 따라서, 설계변수를 고려하지 않은 초기상태에서 $s_a=0$ 이 된다. 본 예제에서는 2개의 설계변수를 고려하는 경우와 3개의 설계변수를 고려하는 경우로 나누어 분석해 본다.

링크 통행비용함수 :

$$c_a = c_{a0} \left[1 + 0.15 \left(\frac{x_a}{Q_a} \right)^4 \right] \text{ 일반 링크}$$

$$= c_{a0} \left[1 + 0.15 \left(\frac{x_a}{Q_a + s_a} \right)^4 \right] \text{ 용량증가를 고려하는 링크} \quad (16)$$



〈그림 4〉 설계변수로 용량을 고려한 경우의 교통망

〈표 2〉 예제 교통망의 네트워크 입력자료

링크번호	초기 통행비용(c_{a0})	용량(Q_a)
1	12	35
2	10	35
3	15	20
4	10	35
5	15	20
6	10	35
7	15	20
8	10	35
9	10	35
10	12	35
11	15	20
12	10	35

1) 2개의 설계변수(링크6, 링크10)를 고려한 경우

링크6과 링크10의 용량증가를 설계변수로 고려한 경우에 대한 분석결과가 〈표 3〉과 〈표 4〉에 나타나 있다. 〈그림 5〉는 용량증가를 고려하지 않은 초기경우(즉, $s_a=0$)와 최종적으로 최적 용량크기가 결정된 경우의 각 링크별 통행배정량을 보여주고 있다.

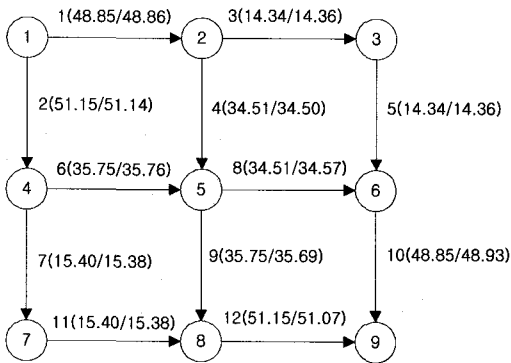
먼저, 〈표 3〉의 민감도를 살펴보면, 링크6의 경우 링크6과 링크10의 설계변수의 증가(즉, 용량증가)에 대하여 배정통행량이 증가함을 보여주고 있으나, 링크10의 경우, 링크6의 용량증가에 대해서는 통행량이 증가하지만, 링크10의 용량증가에 대해서는 오히려

〈표 3〉 설계변수에 대한 각 링크의 민감도

링크번호	$\frac{\partial x_a}{\partial s_6}$	$\frac{\partial x_a}{\partial s_{10}}$
1	-0.012794	-0.080154
2	0.040372	-0.211988
3	0.247200	0.880170
4	-0.036169	0.084235
5	-0.026262	0.030326
6	0.065149	0.139766
7	0.010775	1.144179
8	0.009549	0.044914
9	0.027923	0.134546
10	0.003091	-0.019392
11	-0.017086	0.348960
12	-0.007189	-0.406587

〈표 4〉 모형에서 도출된 결과

		초기상태(설계변수를 고려하지 않은 경우)	최종결과	비고
설계변수값 (용량증가량 : s_a)	링크6	0.0	0.013664	
	링크10	0.0	0.382983	
상위문제 목적함수값		6116.127441	6112.707520	0.056%감소
건설비용		0.0	2.934989	



〈그림 5〉 배정된 링크 통행량(초기배정량/최종배정량)

감소하고 있다. 이는 해당링크의 용량증가가 바로 그 링크의 통행량증가로 이어지는 않는다는 것을 보여 주고 있다. 그러나 〈그림 5〉에서 보듯이 전체적인 통행량은 용량증가를 고려하지 않은 경우와 비교해 볼 때 약간 증가했음을 알 수 있다.

본 예제의 최적 용량증가량(최적 설계변수값)과 상위문제의 목적함수값이 〈표 4〉에 나와 있다. 예상했듯이 링크6과 링크10의 최적 용량증가량이 각각 $s_6 = 0.013664$ 과 $s_{10} = 0.382983$ 로 나타났으며, 목적함수값도 6116.13에서 6112.71로 감소하였고 이때 건설비용은 2.93으로 나타났다.

2) 3개의 설계변수(링크5, 링크6, 링크10)를 고려한 경우

여기서는 앞의 예제에 링크5에 대한 설계변수를 추가한 경우에 대하여 살펴보자. 즉, 3개의 링크(링크5, 링크6, 링크10)에 대하여 용량증가를 고려하여 분석한 결과들이다. 〈표 5〉와 〈그림 6〉은 각 설계변수들에 대한 해당링크의 민감도와 초기 그리고 최종 통행배정량을 보여주고 있다. 〈표 6〉은 최종 결과를 정리한 표인데, 이 표에서 유의할 사항은 링크5가 설계링크로 추가됨에 따라 최종적으로 산정된 최적 용량증가량이 링크6의 경우 음의 값(negative value)로 결정된다는 사실이다. 즉, 이것은 링크6의 경우, 오히려

용량을 줄이는 것이 상위문제의 전체적인 목적함수값을 감소시킨다는 것으로 이를 통해 Braess의 역설(Braess' paradox)을 검지(detection)할 수 있다.

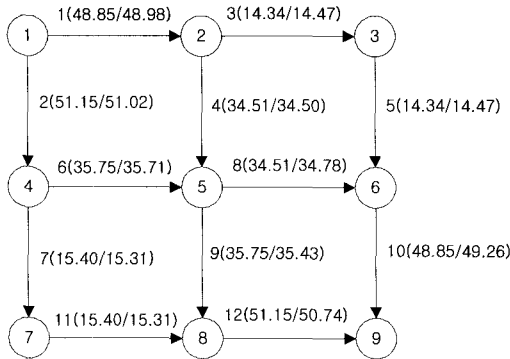
이런 현상은 〈표 5〉에서 보듯이 링크6에 대하여 링크5의 용량증가는 양의 통행량변화로, 나머지 링크6과 링크10의 용량증가는 음의 통행량변화로 나타나 오히려 링크6의 용량을 줄이는 게 전체적인 비용을 줄이게 된다. 즉 링크용량의 증가가 통행량의 증가로 이어지지 않고 반대로 나타나기 때문에 Braess's paradox가 되며, 이런 결과는 Yang(1997)에서도 찾아볼 수 있다. 이것은 상위문제인 리더의 시스템최적(system optimization) 상태를 찾기 위해 용량을 감소시키는 해가 나왔다고 볼 수 있다. 사실 많은 경우에 교통망을 확장하는 경우, Braess역설이 발생할 수 있음을 보여주고 있는데(Sheffi, 1985; Yang, 1997; Yang et al., 1998 참고), 본 연구의 결과도 이런 측면을 보인다고 할 수 있다. 따라서, 교통망 설계시 신중한 접근이 필요함을 알 수 있다.

〈표 5〉 설계변수에 대한 각 링크의 민감도

링크번호	$\frac{\partial x_a}{\partial s_5}$	$\frac{\partial x_a}{\partial s_6}$	$\frac{\partial x_a}{\partial s_{10}}$
1	-0.046033	0.146746	-0.160547
2	-0.270415	1.410046	-1.018507
3	-0.000339	0.135086	-0.000071
4	0.000339	-0.135086	0.000071
5	0.040456	-0.109789	0.112646
6	0.071824	-0.717401	-0.173787
7	-0.029576	0.120788	-0.151013
8	-0.011724	0.035798	0.171164
9	-0.000322	-0.080295	-0.193762
10	-0.007020	0.154011	0.203658
11	0.017395	-0.231300	-0.109157
12	-0.014076	0.062481	-0.147360

〈표 6〉 모형에서 도출된 결과

		초기상태(설계변수를 고려하지 않은 경우)	최종결과	비고
설계변수값 (용량증가량 : s_d)	링크5	0.0	0.334750	
	링크6	0.0	-0.955765	Braess Paradox 감지
	링크10	0.0	1.989180	
상위문제 목적함수값		6116.127441	5994.809082	1.98% 감소
건설비용		0.0	98.757576	



〈그림 6〉 배정된 링크 통행량(초기배정량/최종배정량)

V. 결론

본 연구에서는 확률적 통행자 행태를 고려하는 연속형 교통망설계문제를 개발하고 이의 풀이 알고리즘을 제시하였다. 기존 대부분의 교통망설계모형들이 Cournot-Nash게임형태로 구성되었는데 비해, 본 연구에서는 실제 교통운영에 적합한 Stackelberg게임형태로 문제를 구성하고, 이를 구현하기 위하여 민감도분석 기법을 도입하였다. 2개의 예제 교통망을 대상으로 평가한 결과 본연구의 결과가 합리적인 값들을 도출했음을 확인할 수 있었으며, 일부 Braess역설도 감지할 수 있었다.

본 연구와 관련된 향후 연구분야는 상당히 다양한데, 먼저 이론적인 측면에서 본 연구에서 감지된 Braess 역설이 발생하는 조건을 찾는 연구가 있다. Braess's paradox는 일반적으로 도로망의 기하구조나 OD통행수요와 관련된 현상으로, 도로망 구조와 관련해서는 Sheffi(1985)의 예제와 같이 혼잡 구간이 대칭적으로 존재하는 도로망에 이들을 연결하는 새로운 도로가 개설될 경우 발생하며, OD통행수요와 관련해서는 특정한 OD수요 범위내에서만 발생한다. 즉, OD수요가 아주 작거나, 매우 큰 경우에는 발생하지 않는 현

상이다(Yang et al, 1998). Yang et al.은 이런 Braess's paradox를 피하기 위하여 링크용량의 확장과 새로운 링크의 도입을 동시에 고려하는 혼합교통망설계(Mixed Network Design Problem, MNDP)를 제시한 바 있다.

또한, 본 연구에서는 다루지 못했지만, Stackelberg 게임과 기존 Cournot-Nash게임을 비교하는 연구가 있으며, 설계변수값의 변화에 따른 통행수요의 변화(elastic demand)를 고려하는 연구도 남아 있다. 본 연구에서 제시된 교통망설계모형을 적용하는 연구도 있는데, 도로의 확장뿐만 아니라 서론부에서 기술한 바와 같이 교차로 신호시간결정, 적정 혼잡통행로 결정, 고속도로 램프미터링을 결정 등 연속형 설계문제에 적용하는 분야도 남아 있다.

참고문헌

- 김재영·임강원(2000), 유전자 알고리즘을 이용한 변동부등식 제약하의 연속형 가로망 설계, 대한교통학회지, 제18권 제1호, 대한교통학회, pp.61~73.
- 임용택(2003), 확률적 로짓 통행배정모형의 해석 알고리즘, 대한교통학회지, 제21권 제2호, 대한교통학회, pp.95~105
- Akamatsu, T.(1996), Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment, Transportation Research 30B, pp.369~386.
- Bazaraa, M. S., H. D. Sherali, C. M. Shetty (1997), Nonlinear programming: theory and algorithms, 2nd ed., Wiley.
- Bell, M. G. H.(1995), Alternatives to Dial's logit assignment algorithm, Transportation Research 29B, pp.287~296.
- Fisk, C.S.(1984), Game theory and transpor-

- tation systems modeling, *Transportation Research* 18B, pp.301~313.
7. Friesz, T. L., Tobin, R. L., Cho, H.-J., Mehta, N. J.(1990), Sensitivity analysis based heuristic algorithms for mathematical programs with variational inequality constraints, *Mathematical programming* 48, pp. 265~284.
 8. Dial, R. B.(1971), A probabilistic multipath traffic assignment model with which obviates path enumeration, *Transportation Research* 5, pp.83~111
 9. Maher, M. J.(1998), Algorithms for logit-based stochastic user equilibrium assignment, *Transportation Research* 32B, pp.539~549.
 10. Sheffi Y.(1985), *Urban transportation networks*, Prentice-Hall.
 11. Suwansirikul, C., Friesz, T. L. and Tobin, R. L.(1987), Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous network design problem, *Transportation Science* 21, pp.254~264.
 12. Tobin, R. L., Friesz, T. L.(1988), Sensitivity analysis for equilibrium network flows, *Transportation Science* 22, pp.242~250.
 13. Yang, H., Yagar, S.(1994), Traffic assignment and traffic control in general freeway-arterial corridor systems, *Transportation Research* 28B, pp.463~485.
 14. Yang, H., Yagar, S., Iida, Y., Asakura, Y. (1994), An algorithm for the inflow control problem on urban freeway networks with user-optimal flows, *Transportation Research* 28B, pp.123~139.
 15. Yang, H.(1995), Heuristic algorithms for the bilevel origin-destination matrix estimation problem, *Transportation Research* 29B, pp.231~242.
 16. Yang H.(1997), Sensitivity analysis for the elastic-demand network equilibrium problem with applications, *Transportation Research* 31B, pp.55~70.
 17. Yang H., M. G. H. Bell(1998), Models and algorithms for road network design: a review and some new developments, *Transport Review* 18, pp.257~278.

✉ 주 작 성 자 : 임용택

✉ 논문투고일 : 2003. 11. 11

논문심사일 : 2004. 3. 7 (1차)

2004. 4. 7 (2차)

심사판정일 : 2004. 4. 7

✉ 반론접수기한 : 2004. 8. 31