2-수준계 Resolution V 최소 부분실험법의 최적성에 관한 연구

김상익
건국대학교 상경대학 응용통계학과

Study on the Optimality of 2-level Resolution V Minimal Fractional Factorial Designs

Sang Ik Kim
Dept. of Applied Statistics, Konkuk University

Key Words : Resolution V design, Partially balanced array, Optimality

Abstract

In this paper, we study the optimality of 2-level resolution V minimal fractional factorial designs which can be constructed by using a partially balanced array. Moreover the relative efficiencies of such designs are compared in the sense of three optimality criteria such as determinant(D)-optimality, trace(A)-optimality, and eigenvalue(E)-optimality criterion.

1. 서 론

산업현장에서 많이 사용되는 실험설계 기법 중의 하나인 요인실험법(factorial design)에서 인자(factor)의 수가 증가함에 따라 실험의 크기인 수준조합(혹은 처리조합)의 수는 현실적으로 수용할 수 없으리만큼 증가하게 된다. 이러한 경우 불필요한 교호작용(interaction effect)들을 상호 교락(confounding)시켜, 일부의 수준조합만을 선택하여 실험을 설계하는 부분(요인)실험법(fractional factorial design)이 사용된다. 이러한 부분실험법을 분류하는 방법으로 Box와 Hunter(1961)는 해상도(resolution)의 개념을 도입하였으며, 3인자이상의 교호작용이 모두 무시될 수 있는 경우 주효과와 2인자 교호작용 효과까지 분석이 가능한 실험법을 Resolution V 부분실험법이라 한다.

부분실험법의 설계방법에 대한 연구는 Finney(1945)에 의해 발표된 이후, 초기에는 Rao(1947)등에 의해 주로 직교배열(orthogonal array)을 이용하여 설계방법이 개발되었다. 직교배열을 이용하여 설계된 부분실험법에서는 추정된 효과들의 분산-공분산 행렬이 대각행렬(diagonal matrix)이 되어 추정된 효과들은 각각 확률적으로 독

립적인 관계를 갖게 되고 통계적으로 최적성을 만족하는 장점이 있다. 그러나 이러한 직교설계법은 실험의 크기가 커질 뿐 만 아니라 인자의 수나 혹은 각 인자의 수준 수에 따라 설계가 가능하지 않는 경우도 있게 되는 단점이 있다.

이러한 직교배열을 이용한 설계방법의 단점을 극복하는 방안으로 Chakravarti(1956)는 직교배열을 일반화한 부분균형배열(partially balanced array)을 이용하여 설계하는 방법을 제시하였으며, Bose와 Srivastava(1964)와 Srivastava(1965)는 모든 인자가 2개의 수준을 갖는 2-수준 요인실험법에서 부분균형배열에 의해 설계된 부분실험법의 통계적 성질을 규명하였다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 Kim(1992)은 2-수준 요인실험법에서 부분균형배열을 이용하여 실험의 크기가 최소인 해상도(resolution) V 부분요인실험법의 설계방법을 제시하였다.

그러나 직교배열을 이용하는 경우와는 달리 부분균형배열을 이용하여 설계된 부분실험법은 통계적 최적성을 만족하지 않게 되므로, 설계된 부분실험법의 최적성에 대한 평가가 수반되어야 한다. 본 연구에서는 Kim(1992)에 의해 제시된 부분실험법의 통계적 최적성을 여러 기준에 따라 고찰하여, 각 평가기준에 따른 최적부분실험법의 설계방법을 고찰하고, 설계 가능한 부분실험법들의 통계적 효율성을 규명하고자 한다.

2. Resolution V 부분실험법의 설계방법과 통계적 성질

먼저 Chakravarti(1956)에 의해 제시된 2-수준계의 부분균형배열을 정의하면 다음과 같다. 각 원소들이 0 혹은 1의 값을 갖는 ($m \times n$) 행렬(배열)로서 m개의 열(row)중 임의의 d 개의 열을 택한 ($d \times n$) 부분행렬($d \le m$)에서, $(x_1, x_2, \cdots, x_d)'$의 행(column)이 λ_l회 출현하고 (단, $x_i = 0$ 혹은 1 이며, $l = x_1 + x_2 + \cdots + x_d$), λ_l 값이 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$의 어떤 치환(permutation)에도 동일할 때, 이러한 행렬을 부분균형배열이라고 한다. 그리고 λ_l, $l = 0, 1, \cdots, d$ 를 부분균형배열의 지표값(index number)이라 한다.

따라서 2-수준계 ($m \times n$)부분균형배열은 d의 값과 지표값(index number)들인 $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$에 의해 결정되며 d의 값을 부분균형배열의 강도(strength)라고 한다. 그리고 λ_l 값이 모두 동일한 경우 부분균형배열은 직교배열이 된다(Raktoe, Hedayat, and Federer(1981)). 예를 들어 다음과 같은 (5×16)행렬은 $d = 4$이고 $\Lambda = \{1, 2, 1, 0, 1\}$인 부분균형배열이 된다.

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Srivastava(1965)는 2-수준계 부분균형배열에서 $d = 4$인 경우 각 행(column)을 수준조합으로 하였을 때, 부분균형배열은 resolution V 부분실험법이 됨을 규명하였다. 그리고 이러한 결과를 바탕으로 Kim(1992)은 다음과 같이 $d = 4$인 경우의 부분균형배열을 설계하여 실험의 크기가 최

소인 2수준 resolution V 부분실험을 설계하는 방법을 제시하였다.

인자의 수가 m개인 경우, 인자 A_i의 두 개의 수준을 $x_i=0$ 혹은 1로, 그리고 인자들의 수준조합(혹은 처리조합)을 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$으로 나타낼 때, $\sum_{i=1}^{m} x_i=0$ (혹은 m)을 만족하는 한 개의 수준조합과, $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$ (혹은 $m-1$) 이 되는 m개의 수준조합, 그리고 $\sum_{i=1}^{m} x_i=2$ (혹은 $m-2$)를 만족하는 $m(m-1)/2$개의 수준조합으로 구성되는 배열은 $d=4$인 부분균형배열이 되며, 결과적으로 이 배열은 해상도(resolution)V 부분실험법이 된다 (Kim(1992)).

따라서 인자의 수가 m인 경우 $\sum_{i=1}^{m} x_i=s_1$ ($s_1=0$ 혹은 m), $\sum_{i=1}^{m} x_i=s_2$ ($s_2=1$ 혹은 $m-1$), $\sum_{i=1}^{m} x_i=s_3$ ($s_3=2$ 혹은 $m-2$) 로 설계되는 부분실험법은 (s_1, s_2, s_3)의 값의 조합수와 같은 8개의 실험설계가 가능하게 된다. 그리고 이러한 부분균형배열의 지표값들은 다음과 같다 (Kim(1992)).

$$\lambda_0=\sum_{j=1}^{3}\binom{m-4}{s_j}, \quad \lambda_1=\sum_{j=1}^{3}\binom{m-4}{s_j-1},$$
$$\lambda_2=\sum_{j=1}^{3}\binom{m-4}{s_j-2}, \quad \lambda_3=\sum_{j=1}^{3}\binom{m-4}{s_j-3},$$
$$\lambda_4=\sum_{j=1}^{3}\binom{m-4}{s_j-4} \qquad (2.2)$$

예를 들어 식(2.1)의 부분균형배열은 $\sum_{i=1}^{5} x_i=5$ 를 만족하는 하나의 행과, $\sum_{i=1}^{5} x_i=1$을 만족하는 5개의 행, 그리고 $\sum_{i=1}^{5} x_i=2$ 를 만족하는 10개의 행으로 구성되어 있으므로, $(s_1, s_2, s_3)=(5,1,2)$인 경우의 부분균형배열이 된다. 따라서 각 행(column)이 수준조합을 의미할 때, 이 배열은 $n=16$개의 수준조합으로 이루어진 2^5 resolution V 부분실험법이 되고, $\Lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(1,2,1,0,1)$이 된다. 그리고 이렇게 부분균형배열을 이용하여 설계된 2수준 해상도(resolution) V 부분실험법의 특징을 요약하면 다음과 같다 (Srivastava(1965), Kim(1992)).

Resolution V 부분실험법에서는 한 개의 전체 모평균과 m개의 주효과, $\binom{m}{2}=m(m-1)/2$ 개의 2인자 교호작용 효과들이 추정 가능하여야 하므로 최소의 실험크기는 $n=1+m+\binom{m}{2}$ 이다. 따라서 앞에서 설계된 8개의 부분실험법은 수준조합의 수와 추정하여야 할 효과의 수가 같아지는 최소실험법(minimal design), 혹은 포화실험법(saturated design)이 된다. 그리고 주효과를 A_i, 2인자 교호작용 효과를 A_{ij}, 효과 θ의 추정량을 $\hat{\theta}$ 으로 표기할 때, 주효과 추정량들의 분산인 $Var(\widehat{A}_i)$

은 모두 같게 된다. 그리고 2인자 교호작용 효과의 추정량의 분산인 $Var(\hat{A}_{ij})$ 도 서로 같게 된다(그러나 $Var(\hat{A}_i)$와 $Var(\hat{A}_{ij})$이 항상 일치하지는 않는다).

3.부분실험법의 최적성 평가

Resolution V부분실험법에서 전체 모평균이 μ일 때 추정해야 할 효과들의 벡터를 $\beta' = (\mu, A_1, A_2, \cdots, A_m, A_{12}, A_{13}, \cdots, A_{m-1,m})$으로 표기하자. 그리고 n개의 각 수준조합에서 실험을 실시하여 관측된 관측값들의 벡터를 y 으로 나타낼 때, y의 기대값 $E(y)$에 대한 선형모형은 다음과 같다.

$$E(y) = X\beta \tag{3.1}$$

단, X는 $(n \times n)$ 계획행렬(design matrix)이고 $Var(y) = \sigma^2 I$ 로서 I 는 $(n \times n)$ 단위행렬(identity matrix)이다.

Resolution V 부분실험법에서는 2인자 교호작용까지 분석이 가능하므로, (3.1)식의 β은 추정가능(estimable)하게 되고 최소분산불편추정량 $\hat{\beta}$ 과 $\hat{\beta}$의 분산-공분산 행렬은 다음과 같이 된다.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$
$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} \tag{3.2}$$

그리고 설계된 실험계획법의 최적성을 평가하는데 일반적으로 사용되는 방법은 Kiefer(1959)가 제시한 다음과 같은 세 가지 평가값들이 이용된다. 먼저 정보행렬(information matrix)인 $V = (X'X)^{-1}$의 행렬식(determinant) 값인 $|V|$를 평가기준으로 사용하는 방법으로, $|V|$의 값이 최소가 되는 계획법을 D-최적(determinant-optimal)계획법이라고 한다. 그리고 V 의 대각합(trace)값을 기준으로 사용할 때, 대각합 값이 최소가 되는 계획법을 A-최적(average-optimal)계획법이라 하며, V의 고유값(eigenvalue)의 최대값을 평가기준으로 사용하여 고유값의 최대값이 최소가 되는 실험계획을 E-최적(eigenvalue-optimal)계획법이라고 한다.

Bose와 Srivastava(1964) 그리고 Srivastava(1965)는 부분균형배열을 이용하여 설계된 2수준 resolution V 부분실험법의 정보행렬의 구조를 부분균형배열의 성질과 연관시켜 연구하였다. 그 결과로 정보행렬은 최대로 6개의 서로 다는 고유값을 가지게 되고 고유값들은 부분균형배열의 지표값들의 함수형태가 됨을 규명하였다. 그리고 이러한 결과를 바탕으로 정보행렬의 대각합(trace) 값을 계산하는 알고리즘을 제시하여 대각합 값을 평가기준으로 사용할 것을 제안하였다.

그러나 이러한 평가방법과는 달리, 설계된 부분실험법의 D-최적성과 E-최적성을 평가하기 위해서는 정보행렬 V의 고유방정식(eigen-equation)을 유도하여 고유값들을 직접 계산하여야 한다. 특히 Srivastava와 Chopra(1971)는 정보행렬 V의 고유방정식을 유도하는 방법을 제시하였는데, 이

연구결과를 바탕으로 정보행 $V=(X'X)^{-1}$의 고유근을 δ 라 할 때 δ를 구하는 고유방정식을 직접 유도한 결과는 다음과 같다 (고유방정식의 자세한 유도 방법에 대해서는 Srivastava와 Chopra(1971)를 참고할 수 있다).

$$|V-\delta I|=(c_1\delta^3-c_2\delta^2-c_3\delta-1)\times(c_4\delta^2-c_5\delta+1)^p(c_6\delta-1)^q$$

단, $p=m-1$, $q=\frac{m(m-3)}{2}$

$$\begin{aligned}c_1=&\ \alpha_1^3-\frac{m(m-1)^2}{2}\alpha_3^3\\&+\frac{(m-1)(3m-8)}{2}\alpha_1\alpha_3^2\\&+(3m-5)\ \alpha_1^2\alpha_3\\&+\frac{(m-2)(m-3)}{2}\alpha_1^2\alpha_5\\&+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2}\alpha_1\alpha_3\alpha_5\\&-m\alpha_1\alpha_2^2-\frac{m(m-2)(m-3)}{2}\alpha_2^2\alpha_5\\&+2m\ \alpha_2^2\alpha_3+m(m-1)(m-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4\\&-\frac{(m-1)}{2}\alpha_1(2\alpha_2+(m-2)\alpha_4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_2=&\ 3\ \alpha_1^2+2(3m-5)\alpha_1\alpha_3\\&+(m-2)(m-3)\alpha_1\alpha_5\\&+\frac{(m-1)(3m-8)}{2}\alpha_3^2\\&+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2}\alpha_3\alpha_5-m\ \alpha_2^2\\&-\frac{(m-1)}{2}(2\alpha_2+(m-2)\alpha_4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_3=&\ 3\alpha_1+(3m-5)\alpha_3\\&+\frac{(m-2)(m-3)}{2}\alpha_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_4=&\ (\alpha_1-\alpha_3)\\&\times(\alpha_1+(m-4)\alpha_3-(m-3)\alpha_5)\\&-(m-2)(\alpha_2-\alpha_4)^2\end{aligned}$$

$$c_5=2\alpha_1+(m-5)\alpha_3-(m-3)\alpha_5$$
$$c_6=\alpha_1-2\alpha_3+\alpha_5 \tag{3.3}$$

그리고 식(3.3)에서 α_i 들은 부분균형배열의 지표값 λ_i 의 함수형태로서 다음의 관계식을 갖는다.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\lambda_0+4\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3+\lambda_4\\\alpha_2&=(\lambda_4-\lambda_0)+2(\lambda_3-\lambda_1)\\\alpha_3&=\lambda_4-2\lambda_2+\lambda_0\\\alpha_4&=(\lambda_4-\lambda_0)-2(\lambda_3-\lambda_1)\\\alpha_5&=\lambda_0-4\lambda_1+6\lambda_2-4\lambda_3+\lambda_4\end{aligned} \tag{3.4}$$

따라서 정보행렬이 고유값들은 식(3.3)의 $c_1\delta^3-c_2\delta^2-c_3\delta-1=0$ 의 근에 해당하는 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 와 $c_4\delta^2-c_3\delta-1=0$ 의 근인 δ_4,δ_5 그리고 $\delta_6=1/c_6$ 로 구해지며, δ_4 와 δ_5는 p개의 중근(multiplicity)을

갖게 되고, δ_6는 q 개의 중근을 갖는 형태가 된다. 그리고 3차 방정식과 2차 방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하면 최적성의 평가 값들은 계산하는 식은 다음과 같이 유도된다.

$$|V| = (\delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3)(\delta_4 \times \delta_5)^p (\delta_6)^q$$
$$= (1/c_1)(1/c_4)^p (1/c_6)^q$$

$$trace(V) = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + p(\delta_4 + \delta_5) + q\delta_6$$
$$= (c_2/c_1) + p(c_5/c_4) + q/c_6$$

고유값의 최대값

$$= \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6) \qquad (3.5)$$

본 연구에서는 식(2.2), 식(3.3), 식(3.4), 식(3.5)을 이용하여 인자의 수가 $4 \le m \le 10$인 경우, m 의 값에 따라 설계 가능한 8개의 부분실험법의 지표값들과 최적성 평가기준값들을 계산하였으며 그 결과는 <표1>에 정리되어 있다. 참고로 본 연구에서 사용된 컴퓨터 프로그램은 Mathematica Version 3.0이다.

계산 결과, 인자의 수가 m인 경우 (s_1, s_2, s_3)의 값에 따라 설계 가능한 8개의 부분계획법들은 식(3.6)과 같이 2개의 계획법으로 이루어진 4개의 쌍에서 모든 평가기준값들이 동일함을 알 수 있었다. 특히 각 쌍에서 두 개의 계획법들은 쌍대실험(dual design)으로 한 계획법은 다른 계획법에서 수준 0 은 수준 1 로, 수준 1은 수준 0으로 단순히 변환만 하면 설계될 수 있는 구조를 갖고 있으며, 계획법의 지표 값들은 순서가 서로 역순으로 바뀌게 된다. 그리고 <표1>에서 실험법의 효율성은 평가기준에 따른 최적실험법의 평가값을 각 실험법의 평가기준 값으로 나눈 값을 의미하며, 효율성 값이 1에 가까울수록 효율적인 실험계획이 된다.

$$\begin{cases} (0,1,m-2) \\ (m,m-1,2) \end{cases} \qquad \begin{cases} (m,1,m-2) \\ (0,m-1,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m,1,2) \\ (0,m-1,m-2) \end{cases} \begin{cases} (0,1,2) \\ (m,m-1,m-2) \end{cases} \qquad (3.6)$$

그리고 <표1>에서 보는 바와 같이 (s_1, s_2, s_3)의 값이 $(m,1,m-2)$ 혹은 $(0,m-1,2)$를 사용하여 설계된 실험법이 모든 평가기준에서 항상 최적이 되는 것을 알 수 있다. 또한 A-최적의 평가기준을 사용하는 경우, $(0,1,m-2)$ 혹은 $(m,m-1,2)$를 사용하여 설계된 계획법은 $m=4$인 경우를 제외하고는 최적실험에 대한 효율성이 0.57~0.89 정도가 되어 비교적 우수한 실험설계 방법이 됨을 알 수 있다. 그리고 $(0,1,2)$ 혹은 $(m,m-1,m-2)$를 사용하여 설계된 부분실험법은 모든 평가 기준에서 효율성이 떨어지는 설계 방법이 된다. 그리고 $(m,1,2)$ 혹은 $(0,m-1,m-2)$에 의해 설계된 계획법은 $m=4$ 인 경우에만 모든 평가 기준에서 최적실험법과 효율성이 동일하나 다른 경우에는 효율성이 비교적 낮은 계획법이 됨을 알 수 있다.

<표 1> 부분실험법의 최적성 평가값 및 효율성 계산값($4 \le m \le 10$)

m 및 평가기준 \ 설계방법			$(0,1,m-2)$ $(m,m-1,2)$	$(m,1,m-2)$ $(0,m-1,2)$	$(m,1,2)$ $(0,m-1,m-2)$	$(0,1,2)$ $(m,m-1,m-2)$
m=4	Λ		(1,1,1,0,0) (0,0,1,1,1)	(0,1,1,0,1) (1,0,1,1,0)	(0,1,1,0,1) (1,0,1,1,0)	(1,1,1,0,0) (0,0,1,1,1)
	D	D－값 1)	2.3283×10^{-10}	2.587×10^{-11}	2.587×10^{-11}	2.3283×10^{-10}
		효율성	0.1111	1.000	1.000	0.1111
	A	A－값 2)	4.375	1.486	1.486	4.375
		효율성	0.3397	1.000	1.000	0.3397
	E	E－값 3)	3.17116	0.25	0.25	3.17116
		효율성	0.0788	1.000	1.000	0.0788
m=5	Λ		(2,1,1,1,0) (0,1,1,1,2)	(1,1,1,1,1) (1,1,1,1,1)	(1,2,1,0,1) (1,0,1,2,1)	(2,2,1,0,0) (0,0,1,2,2)
	D	D-값	3.8549×10^{-19}	5.421×10^{-20}	2.4672×10^{-17}	8.8818×10^{-16}
		효율성	0.1406	1.000	0.2197×10^{-2}	0.6103×10^{-4}
	A	A-값	1.764	1.000	2.597	10.375
		효율성	0.5682	1.000	0.3851	0.0964
	E	E-값	0.856455	0.0625	0.466506	7.96863
		효율성	0.0730	1.000	0.1340	0.0078

1),2),3) : D-값은 $|V|$, A-값은 $trace(V)$, E-값은 고유값의 최대값을 의미한다.

4. 결론

본 논문에서는 2수준 요인실험법에서 인자의 수가 $4 \le m \le 10$ 인 경우, 부분균형배열을 이용하여 설계되는 resolution V 부분실험법의 최적성을 D-최적성, A-최적성, E-최적성의 평가기준값을 계산하여 비교 고찰하였다. 그 결과 부분균형배열을 설계할 때 (s_1, s_2, s_3) 의 값이 $(m,1,m-1)$ 혹은 $(0,m-1,2)$인 경우의 실험법이 모든 평가기준에서 최적 설계방법이 됨을 알 수 있었다. 또한 $(0,1,m-2)$ 혹은 $(m,m-1,2)$인 경우의 계획법도 비교적 우수한 부분실험 설계 방법이 되며, $(0,1,2)$ 혹은 $(m,m-1,m-2)$인 경우의 부분실험 계획은 가장 효율성이 떨어지는 실험계획으로 나타났다. 따라서 실험을 설계할 때, 인자들의 각 수준조합에서의 실험비용이나 실험의 난이도 뿐 만 아니라 실험계획의 통계적 최적성을 함께 고려하면, 실험의 크기가 최소이면서도 보다 효과적인 resolution V부분실험법을 설계할 수 있게 된다.

특히 본 연구에서 제시된 최적 부분실험법은 인자의 수가 많은 2수준계 스크리닝

<표 1>-계속

m 및 평가기준 \ 설계방법			$(0,1,m-2)$ $(m,m-1,2)$	$(m,1,m-2)$ $(0,m-1,2)$	$(m,1,2)$ $(0,m-1,m-2)$	$(0,1,2)$ $(m,m-1,m-2)$
m=6	Λ		(3,1,1,2,1) (1,2,1,1,3)	(2,1,1,2,2) (2,2,1,1,2)	(3,3,1,0,1) (1,0,1,3,3)	(4,3,1,0,0) (0,0,1,3,4)
	D	D-값	9.9615×10^{-29}	1.5938×10^{-29}	2.1176×10^{-24}	2.1176×10^{-22}
		효율성	0.160	1.000	0.7526×10^{-5}	0.7526×10^{-7}
	A	A-값	1.625	1.152	4.885	21.625
		효율성	0.6982	1.000	0.2358	0.0533
	E	E-값	0.549342	0.07791	0.79279	16.9262
		효율성	0.1418	1.000	0.0983	0.0046
m=7	Λ		(4,1,13,3) (3,3,1,1,4)	(3,1,1,3,4) (4,3,1,1,4)	(1,2,1,0,1) (1,0,1,2,1)	(2,2,1,0,0) (0,0,1,2,2)
	D	D-값	1.8808×10^{-39}	3.2653×10^{-40}	1.4024×10^{-32}	3.1554×10^{-30}
		효율성	0.1736	1.000	0.2328×10^{-7}	0.1035×10^{-8}
	A	A-값	2.024	1.486	8.649	40.375
		효율성	0.7342	1.000	0.1718	0.0368
	E	E-값	0.64730	0.11111	1.23737	31.933
		효율성	0.1717	1.000	0.0898	0.0035
m=8	Λ		(5,1,1,4,6) (6,4,1,1,5)	(4,1,1,4,7) (7,4,1,1,7)	(10,5,1,0,1) (1,0,1,5,10)	(11,5,1,0,0) (0,0,1,5,11)
	D	D-값	2.1399×10^{-51}	3.9305×10^{-52}	6.6638×10^{-42}	2.9387×10^{-39}
		효율성	0.1837	1.000	0.5898×10^{-10}	0.1337×10^{-12}
	A	A-값	2.719	1.942	14.244	69.250
		효율성	0.8912	1.000	0.13634	0.02804
	E	E-값	0.94403	0.16711	1.80384	55.2455
		효율성	0.17701	1.000	0.09264	0.00303
m=9	Λ		(6,1,1,5,10) (10,5,1,1,6)	(5,1,1,5,11) (11,5,1,1,5)	(15,6,1,0,1) (1,0,1,6,15)	(16,6,1,0,0) (0,0,1,6,16)
	D	D-값	1.3749×10^{-64}	2.6317×10^{-65}	2.1818×10^{-52}	1.7106×10^{-49}
		효율성	0.1914	1.000	0.1206×10^{-12}	0.1538×10^{-15}
	A	A-값	3.648	2.504	22.036	111.250
		효율성	0.6864	1.000	0.1136	0.0255
	E	E-값	1.39446	0.25	2.49373	89.492
		효율성	0.1793	1.000	0.10025	0.00279
m=10	Λ		(7,1,1,6,15) (15,6,1,1,7)	(6,1,1,6,16) (16,6,1,1,6)	(21,7,1,0,1) (1,0,1,7,21)	(22,7,1,0,0) (0,0,1,7,22)
	D	D-값	4.8744×10^{-79}	9.6284×10^{-80}	4.8017×10^{-64}	6.223×10^{-61}
		효율성	0.1975	1.000	0.2005×10^{-15}	0.1547×10^{-18}
	A	A-값	4.788	3.165	32.397	169.750
		효율성	0.6610	1.000	0.09769	0.01865
	E	E-값	1.98565	0.36207	3.30778	137.674
		효율성	0.1823	1.000	0.10946	0.00263

(screening)실험이나, 최소의 실험횟수로 2인자교호작용까지 분석하고자 하는 다구찌(Taguchi)실험법 등에서 유용하게 사용될 수 있다.

그리고 본 연구에서 고찰한 부분실험법은 실험의 크기와 추정하고자 하는 효과의 수가 같은 포화실험법(saturated design)이 된다. 따라서 일부 혹은 모든 수준 조합에서 반복실험을 하여 여러 개의 관측값을 얻지 않는 경우, 관측값의 수와 분석하고자 하는 모수들의 수가 같게 되어 실험오차의 평가가 불가능해지므로 일반적인 분산분석법의 F-검정법에 의해서는 통계적인 유의성 검정을 실시할 수 없게 된다.

반복실험을 하지 않는 경우의 분석방법으로는, 변동양의 크기가 작은 요인들을 오차항에 합쳐서 분석하는 풀링방법(pooling method)이나, 혹은 변동양의 크기를 순서대로 나열한 후 변동양이 큰 일부의 요인만을 유의적인 요인으로 판단하는 파레토 분석방법(Pareto analysis method)등이 사용될 수 있다. 그리고 부분균형배열을 이용하여 설계된 최적실험법은 직교배열을 이용하여 설계된 계획법과 유사한 성질이 있는 Srivastava(1965)의 연구결과를 이용하면, Daniel(1959)에 의해 제시된 추정된 효과들에 대한 정규확률그림(normal probability plot)분석방법도 사용될 수 있다.

참고문헌

[1] Bose, R.C., and Srivastava, J.N.(1964), "Analysis of Irregular Factorial Fractions", *Sankhya, Ser.A.*, Vol. 26, 117-144.

[2] Box,G.E.P., and Hunter, J.S. (1961), "The 2^{k-p} Fractional Factorial Design I", *Technometrics*, Vol. 3, 311-351.

[3] Chakravartie, I.M.(1956), "Fractional Replications in Asymmetrical Factorial Designs and Partially Balanced Arrays", *Sankhya*, Vol. 17, 143-164.

[4] Daniel, C.(1959), "Use of Half-Normal Plots in Interpreting Factorial Two-Level Experiments", *Technometrics*, Vol.17, 210-221.

[5] Finney, D.J.(1945). "The Fractional Replication of Factorial Arrangements", *Annals of Eugenics*, Vol. 12, 291-301.

[6] Kiefer, J.(1959, "Optimum Experimental Designs", *Journal of Royal Statistical Society, Ser.B.*, Vol. 21, 272-304.

[7] Kim, S. I.(1992), "Minimal Balanced 2^t Fractional Factorial Designs of Resolution V and Taguchi Method", *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 5, 19-28.

[8] Raktoe, B.L.,Hedayat, A., and Federer, W.T.(1981). *Factorial Designs*, Wiley, New York.

[9] Rao,C.R.(1947), "Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays", *Journal of Royal Statistical Society, Ser.B.* Vol. 9, 128-140.

[10] Srivastava, J.N.(1965). "Optimal Balanced 2^m Fractional Factorial Designs", *S.N. Roy Memorial*

Volume, Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute.

[11] Srivastava, J.N., and Chopra, D.V. (1971). "On the Characteristic Roots of the Information Matrix of 2^m Balanced Factorial Designs of Resolution V, with Applications", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 42, 722-734.