

파스칼의 삼각형, 계차수열 및 행렬의 연계와 표현

김 의 표 (부산대대학원)
황 석 근 (경북대학교)

I. 서 론

NCTM(2000)에서는 학교 수학교육의 주요 요소로 “학교 수학을 위한 원칙과 표준(Principles and Standards for School Mathematics)”을 제안하고 있다. 이 표준은 5개의 ‘내용표준’과 5개의 ‘과정표준’으로 구성되어 있는데, 과정표준으로는 문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 연계, 표현 등이 있다.

이 논문은 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 이 항계수로 나타내는 문제를 중심으로 파스칼의 삼각형, 계차수열, 행렬 사이의 ‘연계’와 ‘표현’에 관련된 논의를 주된 내용으로 한다.

학생들이 수학을 학습할 때, 여러 가지 수학적 아이디어를 연계하여 학습하는 것이 그 이해가 깊고 오래간다. 이 연계라는 것은 다양한 수학적 내용 사이에서는 물론이고, 수학과 수학 이외의 과목의 주제 또는 수학과 일상의 일 또는 경험 사이에도 일어날 수 있다.

수학이란 서로 무관한 내용들이 한데 모여 이루어진 것이 아니고 오히려 계통성이란 연계의 고리에 서로 얹히어 있는 내용들로 구성된 학문이다. 그러므로 적절한 연계는 개념의 명확한 이해의 가장 근본적인 바탕이 된다. 이러한 관점에서 볼 때 수학 수업에 있어서 개념과 개념 사이에나 교육과정 전반에 산재해 있는 내용들 사이의 연계를 부각시켜 가르칠 필요성이 더욱 선명해진다.

수학에서 표현은 내용 못지않게 중요한 것으로 오랜

기간 동안 학교 수학의 주요한 부분이 되어 왔다. 수학적 아이디어의 표현 방식은 사람들로 하여금 그 아이디어를 이해하고 수용하게 하는데 근본적이고 중요한 요인 이 된다. 아무리 훌륭한 수학적 아이디어라고 해도 그것이 적절한 외형을 갖추지 못하면 사람들의 이해를 기대하기 어렵다. 오늘날 아무 의심 없이 사용하고 있는 여러 가지 간결하고 이해하기 쉬운 수학적 표현은 오랜 세월을 지나면서 다듬어진 결과이다.

표현이란 것은 수학적 개념이나 관계를 어떤 형태로 표지하는 행위 내지는 그 형태 자체라고 말할 수 있다. 더욱이 이 용어는 외적 내적으로 관찰 가능한 과정과 결과를 동시에 의미한다. 표현은 학생들이 수학 개념과 관계의 이해를 돋는 데는 물론이고 수학적 의사소통, 추론, 수학 개념 사이의 연계, 실생활에의 응용 등에 필수적인 요소이다. 그러므로 수학적 아이디어를 조직하고 기록하며 그로써 더 깊고 쉽게 이해하기 위해서는 훌륭한 표현법을 만들고 기록하는 일이 필요하다.

수열의 일반항을 이항계수의 일차결합으로 표현하는 것은 Stirling 수의 도입, 고정된 자연수에 대하여 자연수의 k 제곱을 일반항으로 하는 수열의 부분합 구하기 등 여러 가지 문제에 유용하게 사용된다.

이 논문에서는 수열의 일반항을 이항계수의 일차결합으로 표현하는 문제를 중심으로 첫째, 서로 무관하게 보이는 수학적 개념인 파스칼의 삼각형, 계차수열, 행렬 사이에 들어 있는 연계를 모색하고, 둘째, 수열과 계차수열 및 파스칼 삼각형의 새로운 표현을 시도하여 이에 대한 보다 폭넓고 쉬운 이해를 도모하였다. 수열의 일반항을 이항계수의 일차결합으로 표현하는 문제는 현재까지 알려진 설명방식이나 그에 연관된 표현 기법으로는 고등학교 수업에 다루기에는 다소 어려운 내용으로 보인다. 그러나 이 논문에서는 이를 충분히 고등학교 수업 소재로

* 2004년 4월 투고, 2004년 9월 심사 완료.

* ZDM분류 : D44

* MSC분류 : 97D40

* 주제어 : 파스칼 삼각형, 파스칼 행렬, Γ-법칙, 계차수열, 계차행렬

활용할 수 있도록 다른 기초지식 없이 소위 Γ-법칙과 귀납법만을 사용하여 쉽고 간단한 방법으로 이를 증명하였다

II. 파스칼 삼각형의 행렬 표현과 Γ-법칙

고등학교 수학 I(최봉대 외, 2003)을 비롯한 현행 고등학교 교과서와 Tucker(1995), Roberts(1984), Jackson & Thoro(1990) 등 다수의 저서에서 파스칼의 삼각형을 <그림 1>과 같이 이등변 삼각형으로 표현하고 있다. 그런가하면 Brualdi(1999)는 파스칼의 삼각형을 <그림 2>와 같이 직각 삼각형으로 표현하였다.

		1				
		1	1			
		1	2	1		
		1	3	3	1	
		1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1	

<그림 1> 파스칼의 삼각형 1

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

<그림 2> 파스칼의 삼각형 2

편의상 논문에서는 이항계수 ${}_n C_r$ 을 $\binom{n}{r}$ 로 쓰기로 한다. $r > n$ 일 때는 $\binom{n}{r} = 0$ 으로 약속한다. $\binom{n}{r}$ 은 n -집합¹⁾의 r -부분집합의 개수를 나타내며 $r > n$ 일 때는 r -부분집합이 없으므로 이 약속은 고등학생들이 쉽게 수용할 수 있는 자연스런 확장이다. 황석근 외 (2001)는 이항계수를 <그림 3>과 같이 배열하여 이를 파스칼

1) 원소의 개수가 n 인 집합을 n -집합이라고 한다.

행렬이라고 불렀으며, 파스칼의 삼각형은 이 행렬의 0이 아닌 수 부분이다. 여기서 유의할 것은 행 번호, 열 번호가 모두 0, 1, 2, … 와 같이 0부터 시작한다는 점이다.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	…
0	1	0	0	0	0	0	…
1	1	1	0	0	0	0	…
2	1	2	1	0	0	0	…
3	1	3	3	1	0	0	…
4	1	4	6	4	1	0	…
5	1	5	10	10	5	1	…
:	:	:	:	:	:	:	⋮

<그림 3> 파스칼 행렬

파스칼의 정리로 알려진 등식

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad (2.1)$$

은 파스칼 행렬에서 <그림 4>와 같이 ‘임의의 Γ-자로 인접한 세 개의 수 중 위의 두 수의 합은 아래의 수와 같다’와 같이 말로 서술될 수 있으며 이러한 뜻에서 ‘Γ-법칙’이라고 한다(황석근 외, 2001).

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

<그림 4>

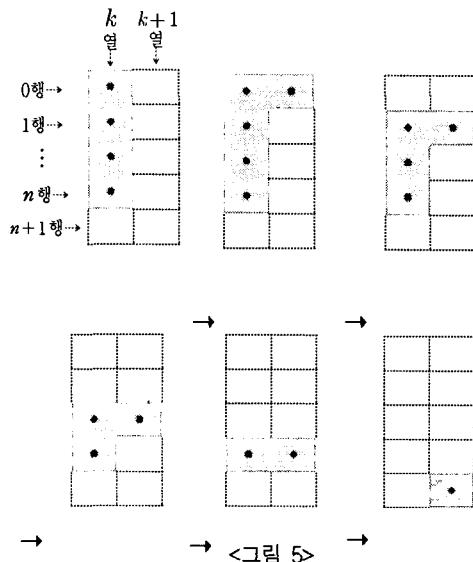
Γ-법칙이란 말은 이론바 Bruner(1974)의 EIS이론에 나오는 3개의 표현수단(활동적 표현, 상징적 표현, 영상적 표현) 중 영상적 표현에 해당 될 수 있으며 Γ이라는 글자의 모양과 연계하여 세 수 사이의 관계를 간단하고 쉽게 시각적으로 이해하고 기억하기에 편리하도록 고안된 용어이다.

Γ-법칙이란 말은 (2.1)의 뜻을 이해하고 기억하는데

용이할 뿐만 아니라 이항계수와 관련된 여러 가지 문제를 이해하는데도 편리한 도구의 역할을 한다. 일례로 등식

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad (k \geq 0) \quad (2.2)$$

는 $\binom{0}{k+1} = 0$ 이라는 사실에 유의하면 Γ -법칙에 의존하여 다음 <그림 5>와 같이 간단히 설명된다.



III. 파스칼 삼각형의 행렬 표현과 Γ -법칙

이 논문에서는 수열을 0행부터 시작하는 것으로 한다.

수열 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ 에 대하여

$$a_{1i} = a_{i+1} - a_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

라 할 때, $(a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots)$ 를 \mathbf{a} 의 제 1계 계차수열이라 하고 $\Delta\mathbf{a}$ 로 나타낸다. $\Delta\mathbf{a}$ 의 계차수열을

$$\Delta^2\mathbf{a} = (a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots),$$

$\Delta^2\mathbf{a}$ 의 계차수열을

$$\Delta^3\mathbf{a} = (a_{30}, a_{31}, a_{32}, \dots), \dots$$

와 같이 나타내고 이들을 각각 \mathbf{a} 의 제 2계 계차수열, 제 3계 계차수열, …이라고 하고 계차수열을 <그림 6>과

같이 배열한 것을 계차표라고 한다.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	…
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}		…
a_{20}	a_{21}	a_{22}			…
a_{30}	a_{31}				…

<그림 6>

계차수열의 이와 같은 배열은 현행고등학교 교과서나 Brualdi(1999)에서 채택하고 있는 방법이다. 계차표의 가장 왼쪽 대각선에 있는 수를 위에서부터 차례로 읽어서 얻은 수열 $\mathbf{b} = (a_0, a_{10}, a_{20}, \dots)$ 를 \mathbf{a} 의 쌍대수열이라고 한다.

이 절에서는 수열의 일반항과 쌍대수열 사이의 관계에 대하여 논의하는 바 수학교육적 관점에서 그 설명과정의 변화와 전개를 관찰한다. 다음 정리는 널리 알려진 사실이다.

정리 1. 수열 (a_0, a_1, a_2, \dots) 의 쌍대수열이 (c_0, c_1, c_2, \dots) 일 때

$$a_n = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + c_2 \binom{n}{2} + \dots \quad (3.1)$$

등식 (3.1)은 제 2종 Stirling 수¹⁾를 정의하는데 사용될 수 있으며 자연수의 같은 거듭제곱의 합을 구하는 데 유용하다.

Brualdi(1999)는 $c_{p+1} = c_{p+2} = \dots = 0$ 인 경우 (3.1)을 다음과 같이 설명하고 있다. 여기서는 그 골격만 소개한다.

방법 1.1. (Brualdi(1999))

(i) 수열 $(f_0, f_1, f_2, \dots), (g_0, g_1, g_2, \dots)$ 에 대하여, α, β 가 상수일 때,

$$h_n = \alpha f_n + \beta g_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

라고 하면

$$h_{pn} = \alpha f_{pn} + \beta g_{pn}, \quad (p \geq 0)$$

2) n -집합을 k 개의 공집합이 아닌 부분집합으로 가르는 방법 수 $S(n, k)$ 를 제 2종 Stirling 수라고 한다.

이 성립한다. 단, h_{pn} , f_{pn} , g_{pn} 은 각각

(h_0, h_1, h_2, \dots) , (f_0, f_1, f_2, \dots) ,
 (g_0, g_1, g_2, \dots) 의 제 p 계 계차수열의 일반항이다.

(ii) a_n 이 n 에 관한 p 차 다항식이면 제 $(p+1)$ 계 이상의 계차수열은 $(0, 0, \dots)$ 이다.

(iii) 이를테면 $(c_0, c_1, c_2, \dots) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ 일 경우 이를 써서 다음과 같이 계차표의 일부를 만들 수 있다.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots \\ 0 & 1 & * & * & \cdots \\ 1 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

<그림 7>

제 5계 이상의 계차수열이 모두 $(0, 0, \dots)$ 이므로 a_n 으로서 n 에 관한 4차 다항식을 찾아본다.

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$ 이므로 a_n 이 n 에 관한 4차 다항식이라면 n 에 관한 방정식 $a_n = 0$ 은 $0, 1, 2, 3$ 을 근으로 가지므로

$$a_n = \alpha n(n-1)(n-2)(n-3).$$

$a_4 = 1$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{4!}$ 이고, 따라서

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \binom{n}{4}.$$

이와 같이 생각하면 $c_p = 1$, $c_i = 0$ ($i \neq p$)일 경우

임을 알 수 있다. 계차표는 가장 왼쪽 대각선에 의해서 완전히 결정된다는 사실과 (i)에 의하여 (3.1)이 성립됨을 안다. 위의 방법 1.1은 (iii)에서 (ii)를 근거로 하여 a_n 이 n 에 관한 4차식일 것이라는 예상에 의존하였으며,

이 예상을 바탕으로 $a_n = f(n)$ 이라할 때,

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$$

이므로 $x, x-1, x-2, x-3$ 이 $f(x)$ 의 인수라는 대

수적 추론을 이용하고 있다. 이에 반하여 다음에서 우리는 계차수열과 파스칼의 삼각형 및 행렬과의 ‘연계’를 통하여 보다 직접적이고 시각적인 설명법을 소개하고자 한다. 이 설명을 위하여 지금부터 수열을 세로벡터 꼴로

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

와 같이 쓰기로 하고 이를 간단히 $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ 로 나타내기로 한다. 수열 a 의 제 1계 계차수열을 a 의 왼쪽에 쓰고 $i=1, 2, \dots$ 에 대하여 제 $(i+1)$ 계 계차수열을 a 의 계차행렬이라고 하자.

이를테면, $a_n = n^2$ 인 수열 $(0, 1, 4, 9, \dots)$ 의 계차행렬은

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \cdots & 0 & 2 & 5 & 4 \\ \cdots & 0 & 2 & 7 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

이고, 파스칼 행렬의 제 3열

$$(0, 0, 0, \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \dots)^T$$

의 계차행렬은

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \cdots & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ \cdots & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

로서 파스칼 행렬의 0열, 1열, 2열, 3열로 된 부분행렬의 왼쪽에 모든 성분이 0이 오도록 행렬을 확장한 것이다. 수열 a 의 계차행렬의 가장 윗 행의 성분을 오른쪽에서 왼쪽으로 읽어서 얻는 수열이 곧 a 의 쌍대수열이다. 계차행렬에서도 역시 Γ 자로 인접한 세 성분에 대하여 위의 두 성분의 합은 아래의 성분과 같게 되어 Γ -법칙이 성립한다. 이와 같이 성분 사이에 Γ -법칙이 성립하는 행렬을 Γ -행렬이라고 한다.

A, B 가 Γ -행렬이라고 하자. A 의 Γ -자로 인접한 세 성분 중 위의 두 성분을 a, a' , 아래의 성분을 a'' 라 하고, 대응되는 B 의 성분을 각각 b, b', b'' 라 하면

$$a + a' = a'', \quad b + b' = b''$$

이므로 $(a + a') + (b + b') = a'' + b''$ 이다. 그러므로 Γ -행렬의 합은 Γ -행렬이다. 이제 (3.1)을 설명하는 다른 방법을 살펴보자.

방법 1.2.

(i) 쌍대수열이 $(0, 0, 0, a, 0, \dots)^T$ 인 수열의 일반 항을 살펴보자. 행렬 (3.2)를 a 배하면

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & a(0) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & a(1) & a(1) & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & a(2) & a(2) & a(2) & 0 \\ \cdots & 0 & a(3) & a(3) & a(3) & a(3) \\ \cdots & 0 & a(4) & a(4) & a(4) & a(4) \\ \cdots & 0 & a(5) & a(5) & a(5) & a(5) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

이것은 수열 $(0, 0, 0, a(3), a(4), \dots)^T$ 의 계차행렬이다. 따라서 쌍대수열이 $(0, 0, 0, a, 0, \dots)^T$ 인 수열의 제 n 항은 $a(n)$ 이다. 다음 Γ -행렬의 합을 살펴보자.

$$+ \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a(0) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a(1) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a(2) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a(3) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a(0) \\ \cdots & 0 & 0 & .0 & b(0) & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & b(1) & b(1) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & b(2) & b(2) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & b(3) & b(3) \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & b(4) & b(4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 & c(0) & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & c(1) & c(1) & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & c(2) & c(2) & c(2) \\ \cdots & 0 & 0 & c(3) & c(3) & c(3) \\ \cdots & 0 & 0 & c(4) & c(4) & c(4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

이 합의 가장 윗 행은 $(\dots, 0, d, c, b, a)$ 이고 가장 오른쪽 열은

$$\begin{bmatrix} a(0) + b(0) + c(0) + d(0) \\ a(1) + b(1) + c(1) + d(1) \\ a(2) + b(2) + c(2) + d(2) \\ a(3) + b(3) + c(3) + d(3) \\ a(4) + b(4) + c(4) + d(4) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

이다.

Γ -행렬의 합은 Γ -행렬이므로 $(a, b, c, d, 0, \dots)^T$ 를 쌍대행렬로 갖는 행렬의 제 n 항은

$$a\binom{n}{0} + b\binom{n}{1} + c\binom{n}{2} + d\binom{n}{3}$$

이다. 이와 같이 생각하면 (3.1)이 성립함을 알 수 있다.

방법 1.2는 방법 1.1 보다 간단하고 시각적이지만 여기에는 Γ -행렬, 수열의 개념이 연계되어 있고, 계차표를 행렬로 나타내었을 때의 잇점을 드러낸다.

계차행렬의 특징을 이용한 다음 방법을 살펴보자.

방법 1.3. n 에 관한 귀납법으로 증명한다.

(i) $n = 0$ 일 때 $a_0 = c_0 = c_0\binom{n}{0}$ 이므로 (3.1)이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 (3.1)이 성립한다고 가정하자.

수열 $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ 의 제 1계 계차수열이 $(b_0, b_1, b_2, \dots)^T$ 라고 하면 $a_{k+1} = b_k + a_k$.

귀납법 가정에 의하여

$$a_k = c_0\binom{k}{0} + c_1\binom{k}{1} + c_2\binom{k}{2} + \dots$$

한편 $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ 의 계차행렬에서 최우측 열을 없애고 남은 행렬은 $(b_0, b_1, b_2, \dots)^T$ 의 계차행렬이므로 $(b_0, b_1, b_2, \dots)^T$ 의 쌍대수열은

$$(c_1, c_2, c_3, \dots)^T$$

이다. 따라서 다시 귀납법 가정에 의하여

$$b_k = c_1\binom{k}{0} + c_2\binom{k}{1} + c_3\binom{k}{2} + \dots$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= c_0\binom{k}{0} + c_1(\binom{k}{0} + \binom{k}{1}) + c_2(\binom{k}{1} + \binom{k}{2}) \\ &+ \dots \\ &= c_0\binom{k+1}{0} + c_1\binom{k+1}{1} + c_2\binom{k+1}{2} + \dots \end{aligned}$$

이고 (3.1)이 증명되었다.

정리 1은 수열의 일반항이 이항계수로 표현됨을 보여주고 있다. 다음 정리는 수열의 부분합도 이항계수로 표현될 수 있음을 말한다.

정리 2. 수열 $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ 의 쌍대수열이 $(c_1, c_2, c_3, \dots)^T$ 라고 하고

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

라고 하면

$$s_n = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + c_2\binom{n+1}{3} + \dots$$

(3.3)

이를 설명하여 보자.

방법 2.1. (Brualdi, 1999)

정리 1에 의하여

$$a_0 = c_0\binom{0}{0} + c_1\binom{0}{1} + c_2\binom{0}{2} + \dots$$

$$a_1 = c_0\binom{1}{0} + c_1\binom{1}{1} + c_2\binom{1}{2} + \dots$$

⋮

$$a_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \dots$$

변끼리 더하면 (2.2)에 의하여 (3.3)를 얻는다.

이 방법은 간결하고 쉽지만 정리 1 및 (2.2)에 의존한다. 계차행렬을 관찰하여 (3.3)를 얻는 다른 방법이 있다.

방법 2.2. 수열 $(a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ 의 계차행렬의 오른쪽에 $(0, s_0, s_1, s_2, \dots)^T$ 를 붙여 만든 행렬

$$\left[\begin{array}{ccccc} \dots & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ * & * & a_1 & s_0 & \\ * & * & a_2 & s_1 & \\ * & * & a_3 & s_2 & \\ & & & & \vdots \end{array} \right]$$

은 $(0, s_0, s_1, s_2, \dots)^T$ 의 계차행렬이고

$(0, s_0, s_1, s_2, \dots)^T$ 의 쌍대수열은

$(0, c_0, c_1, c_2, \dots)^T$ 이다. 따라서 정리 1에 의하여 (3.3)을 얻는다.

IV. 계차행렬의 응용

피보나치 수열

$$(F_0, F_1, F_2, \dots)^T = (0, 1, 1, 2, 3, \dots)^T$$

의 계차행렬은

$$\begin{bmatrix} \dots & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \dots & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \dots & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ \therefore & \vdots \end{bmatrix}$$

따라서 $(F_0, F_1, F_2, \dots)^T$ 의 쌍대수열은 $(-F_0, F_1, -F_2, F_3, \dots)$ 이고, 정리 1에 의하여

$$F_n = F_0 \binom{n}{0} + F_1 \binom{n}{1} - F_2 \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n+1} F_n \binom{n}{n}$$

(4.1)

고정된 자연수 n 에 대하여 수열

$(\binom{n}{n}, \binom{n+1}{n}, \binom{n+2}{n}, \dots)^T$ 의 계차행렬은 Γ -법칙에 의하여

$$\begin{bmatrix} \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ \dots & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+1}{n} \\ \dots & \binom{n+2}{n-2} & \binom{n+2}{n-1} & \binom{n+2}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $(\binom{n}{n}, \binom{n+1}{n}, \binom{n+2}{n}, \dots)^T$ 의 쌍대수열은 $(\binom{n}{n}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \dots)^T$ 이다.

그러므로 정리 1에 의하여

$$\begin{aligned} \binom{n+m}{n} &= \binom{n}{0} \binom{m}{0} + \binom{n}{1} \binom{m}{1} + \binom{n}{2} \binom{m}{2} + \dots \\ &= \binom{n}{0} \binom{m}{0} + \binom{n}{1} \binom{m}{1} + \binom{n}{2} \binom{m}{2} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

특히 $m = n$ 일 때는

$$\binom{2m}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots$$

(4.3)

(4.1), (4.2), (4.3)은 잘 알려진 등식으로서 그 증명 방법도 다양하다. 본 논문에서는 이 등식들에 대한 Γ -행렬을 이용하는 새로운 증명법을 제시하고 있다. 이와 같

이 이항계수와 관련된 많은 등식은 계차행렬의 성질을 이용하여 증명할 수 있다.

V. 결 론

수학적 사고력의 가장 중요한 요소는 결정적 사고(critical-thinking)와 창조적 사고(creative-thinking)이다. 결정적 사고란 문제 상황의 여러 국면을 조사하고, 관계를 찾고, 평가하는 사고를 말하며 창조적 사고는 독특하고 반영적인 것으로서 다양한 부수적 효과를 기대할 수 있는 것이다(Krulic S. & Rudnick J.A., 1999: pp.138-145). Krulic S. & Rudnick(1999)에 의하면 학생들의 결정적 사고와 창조적 사고를 함양하기 위하여 교사는 Polya의 문제해결 4단계(문제의 이해, 계획수립, 계획실행, 반성)를 확장할 필요가 있다. 답을 구했다고 문제가 종결지어지는 것은 아니다. 교사는 답 너머로 문제의 확장을 시도해야 한다. 그 중 두 가지가 '다른 방법으로 접근하기'와 '조건 바꾸기'이다.

이 논문에서는 계차행렬의 개념을 도입하여 수열의 일반항을 이항계수로 표현하는 여러 가지 다른 방법을 제시하였다. 특히 방법 2.1 및 방법 2.2는 Γ -법칙이외의 다른 지식의 바탕 없이 쉽게 이해할 수 있는 것이어서 정리의 내용을 영재교육 교실은 물론 일반 고등학교 교실 수업에 활용할 수 있을 것이다.

더욱이 이 논문에서 전개된 일련의 논의는 창의적인 수학적 추론과정의 모델로 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 또 그 내용은 실제로 고등학생들에게는 결코 쉽지 않은 것이지만 고등학생들이 충분히 접근 할 수 있는 내용으로 가다듬어진 것은 Γ -법칙이나 수열을 세로로 써서 계차행렬로써 관찰한 표현 문제에 기인하여, 적절한 영상적 표현이 어떤 어려운 수학문제를 접근 가능한 쉬운 대상으로 바꾸어 줄 수 있다는 것을 보여주었다.

참 고 문 헌

- 최봉대 외 5인 (2003). 고등학교 수학 I, 서울:중앙교육
진흥연구소.
황석근 · 이재돈 · 김익표 (2001). ENV이산수학, 서울:블
랙박스.

- Bruardi, R. A. (1999). *Introductory combinatorics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Bruner J. (1974). *Toward a theory of instruction*, New York: Harvard University Press.
- Jackson, B. W. & Thoro, D. (1989). *Applied combinatorics with problem solving*, New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Krulic S. & Rudnick J. A. (1999). *Introduction tasks to improve critical- and creative-thinking skills*,
- Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12, Reston, VA: NCTM.
- NCTM. (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: Author.
- Roberts, F. S. (1984). *Applied combinatorics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Tucker, A. (1995). *Applied combinatorics*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

The connections and representation of Pascal Triangles, Difference sequences and Matrices

Kim, Ik Pyo

Department of Mathematics, Edu., Pusan University, Pusan 609-735, Korea

E-mail : kimikpyo7@hotmail.com

Hwang, Suk Geun

Department of Mathematics, Edu., Kyungpook University, Daegu 701-011, Korea

E-mail : sghwang@knu.ac.kr

It is well-known in the literature that the general term of a sequence can be represented by a linear combination of binomial coefficients. The theorem and its known proofs are not easy for highschool students to understand.

In this paper we prove the theorem by a pictorial method and by a very short and easy inductive method to make the problem easy and accessible enough for highschool students.

* ZDM classification : D44

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key Words : Pascal triangle, Pascal matrix,
 \neg -law, difference sequence, difference matrix