

공압 제진 시스템의 해석과 설계: I. 모델링과 전달을 계산 알고리즘

문준희[#], 박희재^{*}

Analysis and Design of a Pneumatic Vibration Isolation System: Part I. Modeling and Algorithm for Transmissibility Calculation

Jun Hee Moon[#] and Heui Jae Pakh^{*}

ABSTRACT

This paper is the first of two companion papers concerning the analysis and design of a pneumatic vibration isolation system. The design optimization of the pneumatic vibration isolation system is required for the reduction of cost, endeavor and time, and it needs modeling and calculation algorithm. The nonlinear models are devised from the fluid mechanical expression for components of the system and the calculation algorithm is derived from the mathematical relationship between the models. It is shown that the orifice makes the nonlinear property of the transmissibility curve that the resonant frequency changes by the amplitude of excited vibration. Linearization of the nonlinear models is tried to reduce elapsed time and truncation error accumulation and to enable the transmissibility calculation of the system with multi damping chambers. The equivalent mechanical models generated by linearization clarify the function of each component of the system and lead to the linearized transfer function that can give forth to the transmissibility exactly close to that of nonlinear models. The modified successive under-relaxation method is developed to calculate the linearized transfer function.

Key Words : Vibration isolation (진동 절연), Modeling (모델링), Simulation (시뮬레이션), Linearization (선형화), Equivalent mechanical model (등가 기계 모델), Transmissibility (전달율)

1. 서론

산업 현장에서 가장 많이 쓰이는 공압 제진 시스템은 산업의 정밀화에 따라 그 수요가 늘어나고 있지만, 아직도 해석과 설계가 경험적인 방법이나 실험적인 방법에 크게 의존하고 있으므로 최적 설계를 달성하려면 많은 비용과 노력과 시간이

요구된다. 또한, 최적의 설계를 위해서는 정확한 시스템의 해석이 반드시 필요하나 공압 시스템 모델의 해석이 복잡하여 이로 인한 한계가 설계 기술 개발을 곤란하게 하고 있다.

본 연구는, 기존에는 실험에 의존하던 공압 제진 시스템의 최적 설계를 위해서 공압 제진 시스템의 동적인 특성을 정확하게 표현하는 모델을 구

접수일: 2003 년 9 월 18 일; 게재승인일: 2004 년 8 월 13 일

[#] 교신저자: 서울대학교 마이크로 열 시스템 연구센터

E-mail: junmoon@snu.ac.kr Tel: (02) 880-1680

^{*} 서울대학교 기계항공공학부

성하는데 목표를 두고 있다. 이 목적을 이루기 위해서 공압 제진 시스템의 각 요소들을 역학적 구성 방정식을 이용하여 모델링을 하였으며, 각 요소들 간의 상호관계 및 관계식을 이용하여 해석 알고리즘을 구성하여 시뮬레이션을 수행하였다.

또한, 본 논문에서는 공압 제진 시스템 중에서 공압이 사용되는 부분에 중점을 두었다. 제진대 위의 평판(platform)은 그 자체의 강성이 크기 때문에 고주파의 공진주파수를 갖게 되며, 또한 여러 개의 제진대 다리(leg)에 의해 발생하는 회전 운동(roll)으로 인해 저주파 영역에서도 여러 개의 공진 주파수가 발생하게 되는 등 실제 사용되는 공압 제진대에서는 더욱 다양한 요소들을 고려해야 한다. 본 연구에서는 공압 제진 시스템의 원래의 목적인 고유진동수를 최대한 낮춤으로 제진 성능을 향상시키는 것에 초점을 두고 100 Hz 이상의 고주파 영역은 관찰하지 않았으며, 여러 개의 고유진동수가 발생하지 않도록 한 개의 공압 제진 장치(제진대 다리)를 대상으로 연구를 진행시켰다.

2. 공압 제진 시스템의 비선형 모델링 및 시뮬레이션

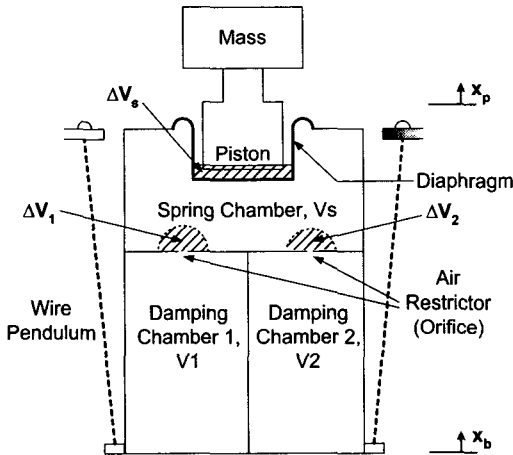


Fig.1 Schematic of a pneumatic vibration isolator

공압 제진대에는 섬유로 강화한 공기 튜브를 제진 장치로 사용하는 시스템도 있지만, 튜브 고무의 두께로 인해 미세 진동의 절연이 잘 안 되므로,² 공기의 밀봉과 피스톤의 원활한 움직임을 위해 고무막을 사용하였다. Fig.1의 제진장치 단면도

에서, 탄성 공기방, 여러 개의 감쇠 공기방, 그 공기방들 사이의 오리피스, 고무막, 하중이 공압에 의해 지지될 수 있도록 고무막 위에 닿아 있는 피스톤, 수평 제진 성능을 갖도록 하는 강선 진자 등의 구성을 보여준다.

2.1 공압 제진 시스템의 각 요소들의 모델링 2.1.1 공기방(Air Chamber)

이상기체와 실제기체 사이의 차이는 압축성 인자(compressibility factor) Z를 통해 관찰할 수 있다.

$$Z = \frac{PV}{nRT} \quad (1)$$

여기서, P와 V, T는 각각 기체의 압력과 체적, 온도이고, n은 기체의 몰 수이며, R은 일반 기체 상수(universal gas constant, 8.31441 J/mol/K)이다. 압력 7×10^5 Pa, 온도 287~307 K인 범위 내에서 Z값은 1을 기준으로 하여 0.1%의 오차범위 안에서 변화한다.¹ 공압 제진대의 작동 압력과 온도는 공기의 임계 압력/온도와 큰 차이가 있기 때문에 이상기체방정식이 사용될 수 있다.

또한, 공압 시스템이 작동할 때 주위와 열교환을 할 수 있는 시간이 무척 짧기 때문에 단열 과정을 거친다고 가정한다. 공압 방진대에서 발생하거나 손실되는 열은 기체의 부피 팽창과 압축으로 인해 생기게 된다. 이 과정이 기계적인 진동과 같이 짧은 시간에 일어날 경우 열의 유출입이 없다고 볼 수 있다.²

공기방 내부의 열역학적인 상태는 균일하다고 본다. 공기방의 크기와 소리의 속도가 공기방 안의 공기의 상태가 균일해지는데 걸리는 시간을 결정한다. 예를 들어, 300 mm의 공기방이 열역학적 상태가 균일해 지는데 걸리는 시간은 그 거리를 음속으로 나눈 시간이 되어 8.746×10^{-4} sec가 된다. 일반적인 크기의 공기방의 경우 그 시간은 0.1 ms 이하 수준이므로 공기방 내부의 열역학적 상태가 불균일해 지려면 1 kHz 이상의 진동이 가진 되어야 하는데, 그 정도의 가진에 대해서는 공압에 의해 이미 충분한 정도의 감쇠(attenuation)가 이루어진다. 따라서, 오리피스 통과 유량 정도의 오리피스 주위 부피를 제외하고는 공기방 내부는

단일한 압력과 온도로 기술할 수 있다.

부피 변화가 있는 밀봉된 공기방은 기계적인 스프링과 같이 거동하며, 공기방의 부피와 압력간의 관계는 단열과정의 기체방정식으로 기술될 수 있다.

2.1.2 오리피스(Orifice, Air Restrictor)

오리피스에 통과하는 유량이 무척 적기 때문에 유체가 층류이며 이에 따라서 오리피스 양단의 압력차와 유량의 관계가 선형적이라는 전제하에 많은 연구가 진행되어 왔다. 하지만, 칼날 모양의 오리피스(sharp edged orifice)를 통과한 공기는 층류이거나 충분히 발달된(fully developed) 유체가 아니다. Washio³ 는 그의 연구에서 오리피스의 양단을 왕복 운동하는 유체는 그 유량의 크고 작음에 상관없이 양단의 압력차가 통과 유량의 제곱에 비례하는 관계를 보이고 있음을 밝혔다.

일반적인 오리피스(Sharp-edge orifice)의 유량식⁴ 을 공기방에 대해서 변형시킨 형태는 다음과 같다.

$$\dot{\Delta V} = \frac{C_d A_2}{\sqrt{1 - (A_2 / A_1)^2}} \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \quad (2)$$

여기서, A_1, A_2 는 각각 파이프와 오리피스의 단면적이며, P_1, P_2 는 입구와 출구에서의 압력이고 C_d 는 송출계수(discharge coefficient)이다. ΔV 는 공기방의 부피의 시간적인 변화율이다. 송출계수의 계산을 위해서 여러 가지 보정식이 있으나, 이는 파이프에 대한 오리피스의 지름비 β 와 레이놀즈 수 Re_D 의 함수이다. 공압 제진대의 경우, β 값이 0.02 이하의 값을 가지기 때문에 송출계수의 값이 레이놀즈 수에 종속되지 않고 0.65 정도의 일정한 값을 가진다.⁴

공압 제진대의 경우 고유진동수와 같은 진동수로 가진할 경우, 탄성공기방의 체적 변화가 가장 크게 되어, 오리피스 통과 유량도 가장 많아지게 된다. 시뮬레이션에 의해서 얻은 결과로는, 진폭을 아주 크게 잡아 100 μm 로 하고, 공기방에 의한 고유진동수인 2 Hz 로 가진한 경우에도 두 공기방의 최대 압력차가 600 Pa 정도가 되어 P_2 / P_1 이 0.998 이 된다. 공압 제진대의 작동 범위 내에서 식(2)는 P_2 / P_1 가 0.99 이상일 때 0.6%의

오차를 보이므로⁴ 식(2)를 사용하는 것이 타당하다.

2.1.3 고무막 (Elastomeric Diaphragm)

고무막은 스프링과 댐퍼로 간주하였다. 그 계수의 값은 각각 K_{dp} 와 C_{dp} 이다.

2.1.4 공압

시뮬레이션에서의 가진주파수 및 진폭 범위는 일반적인 진동의 범위로 잡았으며, 진폭은 0.01 μm ~ 2 mm, 가진 주파수는 0.1 ~ 100 Hz 로 정하였다.

공기마운트를 가진하는 것은 바닥의 진동에 의한 것이므로 바닥이 가진되는 것을 가정하여야 한다. 바닥가진은 공기마운트 전체를 움직이므로 피스톤과 공기방 사이의 상대변위, 공기의 가속도에 의한 압력구배를 발생시킨다.

먼저 압력 구배를 고려하면, 식(3)과 같다.

$$\Delta P_G = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} + k \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3)$$

상하방향의 가진이므로 k 방향성분만 고려하면 압력 구배는 중력과 가진가속도에 의해 결정된다. 중력에 의한 항은 오리피스의 길이가 상대적으로 아주 짧아서 무시할 수 있으므로, 가진 가속도에 의한 항만 고려하여 윗 공기방의 가장 아랫 부분과 아래 공기방의 가장 윗부분의 압력 차이를 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta P_G &= \Delta P_{G,upper} - \Delta P_{G,lower} \\ &= \rho \cdot a_{air} \cdot (h_{upper} / 2 + h_{lower} / 2) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, ρ 는 공기의 밀도이고, a_{air} 는 공기의 가속도이며, h_{upper}, h_{lower} 는 각각 위/아래 공기방의 높이이다.

이 압력구배는 순수하게 진동의 가속도에 의존하는 값이므로 진동의 주파수와 진폭이 커질수록 큰 값을 갖게 된다. 따라서, 심한 가진 상태인 가진 주파수가 100 Hz 이고 진폭이 100 μm 이며 위,아래 공기방의 길이를 크게 잡아 400 mm 로 하였을 때, 식(4)에 의해서 압력 구배 ΔP_G 는 9.48 Pa 라는 결과를 얻을 수 있다. 압력구배를 고려하지

않고 동일한 조건에서 2.3 절에서 개발된 알고리즘으로 시뮬레이션을 수행한 결과, 양 공기방의 최대 압력차는 4 kPa 정도로 ΔP_G 의 400 배 가량의 값을 가진다. 따라서, 압력 구배는 고려하여야 할 조건이 아님을 알 수 있다.

2.2 모델 상호 간의 관계식

바닥의 변위는 직접 피스톤을 움직이지 않고 먼저 공압 체진대 전체를 움직이게 된다. 피스톤과 바닥의 변위에 따른 탄성 공기방의 부피 변화는 다음과 같다.

$$\Delta V_s = A_p(x_p - x_b) \quad (5)$$

여기서 x_p , x_b 는 각각 피스톤과 바닥의 변위이고, A_p 는 피스톤의 면적, ΔV_s 는 탄성 공기방의 부피 변화량이다. 이러한 탄성 공기방의 부피 변화는 탄성 공기방의 압력의 변화 ΔP_s 를 가져온다. 단일 과정의 기체 방정식으로부터 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\Delta P_s = P_0 \left(\left(1 + \frac{\Delta V_s - \sum_i \Delta V_i}{V_s} \right)^{-k} - 1 \right) \quad (6)$$

ΔP_s 는 탄성 공기방의 압력 변화량이고, ΔV_i 는 i 번째 감쇠 공기방의 부피 변화량이며, k 는 공기의 비열비(specific heat ratio, 1.4)이다. 감쇠 공기방에 대해서 i 라는 아래 첨자를 사용한 이유는 여러 개의 감쇠 공기방을 가지는 시스템에 대해서도 적용 가능하도록 하기 위해서이다. 또한, 공기방의 평균 공압 P_0 은 다음과 같다.

$$P_0 = P_{at} + \frac{M \cdot g}{A_p} \quad (7)$$

P_{at} 는 대기압(ambient atmospheric pressure), M 은 하중의 질량, g 는 중력 가속도이다.

피스톤에 가해지는 외력은 공압에 의한 지지력과 고무막에 의한 지지력에 의해 형성된다. 평형 상태에서 균형이 깨진 경우의 변화량에 대한 피스톤의 운동방정식은 다음과 같다.

$$f_{dp} + f_s = M\ddot{x}_p \quad (8)$$

고무막에 의한 지지력의 변화량 f_{dp} 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{dp} = K_{dp}(x_b - x_p) + C_{dp}(\dot{x}_b - \dot{x}_p) \quad (9)$$

여기서 K_{dp} , C_{dp} 는 각각 고무막의 탄성 계수와 감쇠 계수이다.

탄성 공기방의 공압 변화에 의한 지지력의 변화량 f_s 은 다음과 같이 표현된다.

$$f_s = A_p \Delta P_s \quad (10)$$

탄성 공기방의 압력 ΔP_s 는 i 번째 감쇠 공기방의 압력 ΔP_i 와 그 공기방을 연결하는 오리피스 통과시의 압력 강하량 $\Delta P_{ori,i}$ 를 합한 것과 같다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta P_s = \Delta P_i + \Delta P_{ori,i} \quad (11)$$

오리피스에 의한 분압은 식(2)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta P_{ori,i} = -B_{ori,i} (\dot{\Delta V}_i)^2 \text{sign}(\dot{\Delta V}_i) \quad (12)$$

$$\text{여기서 } B_{ori,i} = \frac{1}{2C_d^2 A_{ori,i}^2} \frac{P_0}{RT} \quad (13)$$

$\dot{\Delta V}_i$ 는 i 번째 감쇠 공기방 부피의 시간에 대한 변화율이다. 식(12)는 압력이 압력차가 부피 변화량의 제공에 비례한 비선형 미분방정식으로서 공압제진 시스템의 비선형적인 성질을 주도하는 식이 된다.

또한, 부피가 V_i 인 감쇠 공기방의 압력 변화는 다음과 같다.

$$\Delta P_i = P_0 \left(\left(1 + \frac{\Delta V_i}{V_i} \right)^{-k} - 1 \right) \quad (14)$$

2.3 시뮬레이션 알고리즘

공압 체진 시스템의 거동을 모사하기 위해서 2.2 절에서 정리한 관계식을 가지고 비선형 해석

알고리즘을 개발하였다. 알고리즘은 다음과 같다. 바닥 가진이 들어오면 바닥의 운동이 제진대 전체를 움직이고 제진대는 강체와 같기 때문에 그 자체는 강체 운동을 하지만 피스톤에 달린 하중은 자체의 관성으로 인해 멈춰 있으려 한다. 그것은 탄성 공기방의 부피변화를 일으키고 이것은 탄성 공기방의 압력 변화를 가져와 감쇠 공기방과의 압력차에 의해서 오리피스 통과 유량이 발생한다. 오리피스를 통과한 유량은 감쇠 공기방의 부피와 압력을 변화시키며, 다시 오리피스 통과 유량과 탄성 공기방의 체적을 변화시키고, 이는 피스톤에 가해지는 압력의 변화를 가져온다.

비선형 미분 방정식의 계산을 위한 수치 해법으로 Runge-Kutta Method 를 사용하였으며, 샘플링 간격을 0.001 초로 하여 MATLAB/Simulink 프로그램으로 계산을 수행하였다. 시뮬레이션에 사용된 공압 제진 시스템의 사양은 Table 1 과 같다.

Table 1 Specifications for simulation and experiment

Part	Value
Spring chamber volume, V_s	$2.60 \times 10^{-5} m^3$
1 st Damping chamber volume, V_1	$3.44 \times 10^{-4} m^3$
Orifice area, A_{ori}	$1.77 \times 10^{-8} m^2$
Payload, M	56.3 Kg
Piston area, A_p	$1.61 \times 10^{-3} m^2$
Damping coefficient of diaphragm, C_{dp}	50 N·s/m
Stiffness of diaphragm, K_{dp}	$4.52 \times 10^3 N/m$

2.4 비선형 시뮬레이션 결과

시간 영역에서 시뮬레이션 결과를 표현하는 것이 시스템의 특성을 좀 더 직감적으로 이해할 수 있게 해주지만, 너무 많은 데이터를 필요로 하기 때문에 시스템의 특성의 효과적인 관찰을 위해서 전달율을 사용한다.

선형 시스템에서 전달율은 전달함수를 통해 쉽게 구할 수 있지만, 공압 시스템은 비선형이기 때문에 전달함수를 구할 수 없으므로 시뮬레이션의 입력과 출력 신호를 처리하여 전달율을 구한다. 사용된 식은 실험에서 사용하는 전달율 식과 같으며, 식(15)과 같이 표현된다.

$$Transmissibility = \frac{G_{io}}{G_{ii}} \tag{15}$$

여기서, G 는 Cross spectral density 를 가리키며, 아래 첨자 i 와 o 는 각각 입력과 출력 신호를 의미한다. 전달율을 구하기 위한 테이터로는, Table 1 의 사양을 가진 모델로 10 초간 시뮬레이션을 수행한 결과의 입력과 출력 신호를 사용하였다. 계산된 결과는 Fig.2 와 같다.

시뮬레이션 결과를 통해 관찰되는 공압 제진대의 전달율 곡면의 전체적인 특징은 다음과 같다. 진폭이 크고 진동수가 높은 경우, 오리피스 통과 유량이 커지게 되므로 감쇠는 더욱 커져 두 공기방 사이의 유체의 흐름이 억제되어 탄성 공기방만 존재하는 것과 같은 효과를 나타낸다. 이러한 특성은 시뮬레이션 결과에서 위 공기방에 의한 탄성과 고무막의 탄성만을 고려했을 때의 고유진동수인 5.5Hz 에서 공진하는 것을 통해 선명하게 관찰된다.

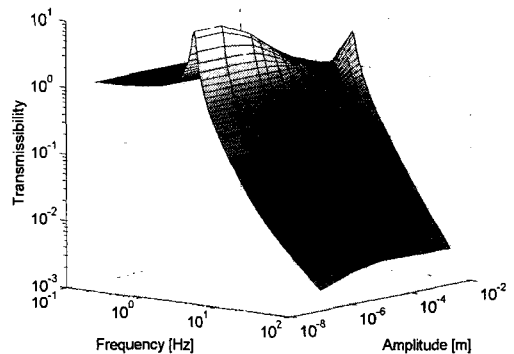


Fig.2 Transmissibility of the pneumatic vibration isolator obtained by nonlinear simulation

반면에 진폭이 작고 진동수가 낮은 경우, 오리피스 통과 유량이 적어서 감쇠가 거의 없고 탄성 공기방과 감쇠 공기방 사이의 유량의 흐름이 자유로워 두 공기방을 합친 크기의 공기방만이 존재하는 것과 같은 효과를 나타낸다. 이러한 성질은 두 공기방을 합친 크기의 공기방의 탄성과 고무막의 탄성만을 고려했을 때의 고유진동수인 2 Hz 부근에서 공진하는 것을 통해서 명확히 관찰된다.

3. 모델의 선형화

2 장에서 공압 제진 시스템을 모델링하고, 비선형 미분 방정식의 형태로 표현되는 관계식들을 수치적인 방법을 통해 시뮬레이션을 수행하였다. 이러한 방법은 모델의 타당성을 밝히는 데는 유용하나 많은 반복 수치계산에 의한 계산 오차가 많아 계산된 전달율 곡선의 요철이 심하며, 계산시간 또한 많이 소요된다. 또, 다중 감쇠 공기방을 고려할 경우, 계산량의 급증으로 거의 해석이 불가능하다. 이러한 단점을 보완하기 위해 모델의 선형화를 시도하였다. 이는 기존의 연구⁵에서 발견되는 선형식을 사용하는 것과는 달리 등가 에너지 방법을 통하여서, 비선형 해석의 계산 결과와 같은 결과를 낼 수 있는 선형식을 구함으로 선형화를 이룬 것이다. 그 결과로 계산 속도가 크게 향상되었으며, 계산 오차가 감소하여 향후 다중 감쇠 공기방을 고려한 공압 제진 시스템의 최적화 알고리즘에도 사용할 수 있게 되었다. 그뿐 아니라 공압 제진대의 각 요소의 등가 기계 모델을 만드는 것을 통해 각 요소의 물리적 의미를 명확히 하는 효과도 얻게 되었다.

3.1 등가 선형화 계수

오리피스스의 감쇠력은 유량의 제곱에 비례하기 때문에 비선형 미분 방정식으로 나타내게 된다. 하지만, 공압 제진대의 바닥 가진과 테이블 위의 응답이 모두 정현 파형을 가진다고 보면 등가 에너지 방법(Equivalent Energy Method)을 통해 선형적인 식으로 나타낼 수 있다.

등가 에너지 방법이란 비선형 시스템을 한 주기 움직였을 때 소요되는 에너지와 선형 시스템을 한 주기 움직일 때 소요되는 에너지를 같다고 놓고 선형 시스템의 계수의 값을 정하는 방법이며⁶, 공압 제진 시스템의 i 번째 오리피스에 대해서, 식 (12)로부터 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\oint B_{eq,i} \cdot \dot{\Delta V}_i d(\Delta V_i) = \oint B_{ori,i} \cdot \left(\dot{\Delta V}_i \right)^2 \cdot \text{sign}(\dot{\Delta V}_i) d(\Delta V_i) \quad (16)$$

여기서 $B_{eq,i}$ 는 등가 선형화 계수이며, $\text{sign}()$ 는 부호를 반환하는 함수이다. 운동이 정현파 운동이므로 부피의 변화량 ΔV_i 는 다음과 같이 나타

낸다.

$$\Delta V_i = |\Delta V_i| \sin \omega t \quad (17)$$

여기서 $|\Delta V_i|$ 는 진폭, ω 는 각속도, t 는 시간을 의미한다. 식(17)을 식(16)에 대입하면 다음과 같이 등가 선형화 계수 $B_{eq,i}$ 를 얻을 수 있다.

$$B_{eq,i} = \frac{8}{3\pi} \omega |\Delta V_i| B_{ori,i} \quad (18)$$

따라서 식(12)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\Delta P_{ori,i} = -\frac{8}{3\pi} \omega |\Delta V_i| B_{ori,i} \cdot (\dot{\Delta V}_i) \quad (19)$$

3.2 등가 기계 시스템

오리피스의 감쇠를 등가의 선형화 계수로 나타냄을 통해 전체의 시스템을 유체-동역학적인 관계식에서 동역학적인 관계식으로 변환하게 되었다. 등가의 기계 시스템으로 변환을 하는 것은 각 요소들의 물리적인 의미를 명확하게 하고, 열역학 관계식과 유체역학 관계식, 동역학적인 관계식을 동시에 고려할 수 있게 한다.

등가 시스템을 만드는 데는 동역학적인 질량-스프링-댐퍼 시스템을 기준으로 하였다. 구체적으로 기술하면, 오리피스 통과 공기의 부피는 피스톤의 단면적으로 나누어서 등가 변위로 만들었고, 공기방의 압력의 변화량은 피스톤의 단면적을 곱하여 등가의 힘으로 변환시켰다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_i = \Delta V_i / A_p \quad (20)$$

$$f_s = A_p \cdot \Delta P_s \quad (21)$$

$$f_i = A_p \cdot \Delta P_i \quad (22)$$

따라서, 이를 오리피스 관계식에 대입하면 다음과 같이 오리피스에 의한 분압 $\Delta P_{ori,i}$ 에 해당하는 등가 기계 힘 $f_{ori,i}$ 을 얻는다.

$$f_{ori,i} = -C_{eq,i} \dot{x}_i \quad (23)$$

여기서 i 번째 오리피스에 의한 등가 감쇠 계수 $C_{eq,i}$ 는 다음과 같다.

$$C_{eq,i} = \frac{8}{3\pi} A_p^3 B_{ori,i} \omega |x_i| \quad (24)$$

식(24)에서 보여주는 등가 감쇠 계수의 수학적 표현을 통해 오리피스에 의한 감쇠의 특성을 발견할 수 있다. 감쇠 계수가 진동수의 크기와 진폭의 크기에 비례한다는 것이다. 즉 진동수가 높아지고 진폭이 커질수록 오리피스에 의한 감쇠력은 커진다는 것이다. 이는 2.4 절에서의 비선형 모델에 의해 생성된 전달을 곡선의 관찰 내용과 일치한다.

또, 공기방에 의한 등가 탄성 계수는 식(6)에 대해서 테일러 전개를 하는 것을 통해 구한다. 공기방의 전체 체적에 비해 체적 변화량은 아주 미세하므로, 테일러 전개를 한 식에서 1 차 이상의 항에 의한 값은 무시할 수 있을 정도로 작기 때문에 1 차항만 고려하여도 비교적 정확한 압력변화를 얻을 수 있다. 따라서 식(6)을 다음과 같은 선형식으로 나타낼 수 있으며,

$$\Delta P_s = \frac{kP_0}{V_s} (-\Delta V_s + \sum_i \Delta V_i) \quad (25)$$

위의 식에 식(5), (20), (22)를 대입하면 다음과 같다.

$$f_s = -K_s(x_p - x_b - \sum_i x_i) \quad (26)$$

여기서 탄성 공기방에 의한 등가 탄성 계수 K_s 는 다음과 같다.

$$K_s = \frac{kA_p^2 P_0}{V_s} \quad (27)$$

이와 같은 방법을 감쇠 공기방에 적용하면 식(14)에서

$$\Delta P_i = \frac{kP_0}{V_i} (-\Delta V_i) \quad (28)$$

이고, 식(20), (21)을 대입하면

$$f_i = -K_i x_i \quad (29)$$

이다. 여기서 i 번째 감쇠 공기방의 등가탄성계수 K_i 는 다음과 같다.

$$K_i = \frac{kA_p^2 P_0}{V_i} \quad (30)$$

이렇게 각 요소들을 등가의 기계적인 요소로 나타내면 전체 시스템은 Fig. 3 과 같은 등가 기계 모델로 나타낼 수 있다.

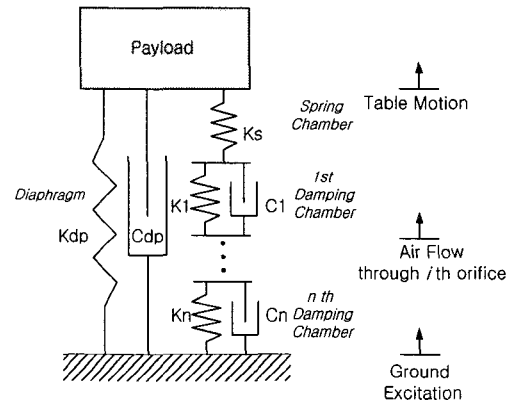


Fig.3 Equivalent mechanical model of the pneumatic vibration isolation system

등가 기계 시스템은 크게 다음과 같이 기술될 수 있다. 고무막에 의한 등가 스프링과 등가 댐퍼는 질량에 병렬로 연결이 되어 있고, 탄성 공기방의 등가 스프링도 질량에 병렬로 연결되어 있다. 이는 질량을 받치는 힘이 이러한 세 가지 요소에 의해 형성된다는 것을 잘 반영하고 있다. 그리고, 탄성 공기방의 등가 스프링은 여러 개의 감쇠 공기방의 등가 스프링 및 등가 댐퍼와 직렬로 연결되어 있다. 이는 탄성 공기방이 질량을 떠 받치는 등가 힘이 각 감쇠 공기방의 등가 스프링과 등가 댐퍼에 의한 합력과 같다는 의미이다. 이는 실제 시스템에서 탄성 공기방 내부의 공압이 각 감쇠 공기방 내부의 공기방의 공압의 크기에 오리피스에 의한 압력 강하량을 더한 값과 같다는 유

체역학적인 관계와 잘 일치한다. 실제로 유체역학적인 관계식과 동역학적인 관계식을 이용하여 구성된 전달 함수가 등가 기계 시스템을 이용하여 구성된 전달 함수와 같아진다는 것을 수식의 전개 를 통해 보일 수 있다. 또한, 등가 기계 시스템에 감쇠 공기방이 쉽게 첨가될 수 있듯이 이러한 방법으로 구성된 전달함수는 감쇠 공기방이 다수인 경우에도 사용할 수 있다.

고무막의 탄성계수는 하중의 크기에 상관없이 일정한 값을 갖는데 비해 공기방의 탄성계수는 식 (7), (26), (29)와 같이 하중에 의해 달라진다. 즉, 하중이 커지면 공기방에 의한 등가탄성계수가 커지 나, 고무막의 탄성계수는 일정한 값을 가지므로, 전체 시스템의 고유진동수는 질량과 공기방만을 고려한 고유진동수에 가깝게 접근한다. 반대로, 하중이 작아지면 공기방의 탄성계수도 함께 작아지 므로 전체 시스템의 고유진동수는 질량과 고무막 만에 의한 고유진동수에 접근하게 된다. 이러한 성질로 인해 실제 예측되는 결과는, 하중이 작을 때는 고유진동수가 커지다가 하중이 클수록 일정 한 값에 수렴하는 결과가 된다. 이는 단일 공기방 을 갖는 상용 고무 스프링 제작사의 제품 카탈로 그의 내용과 일치한다.⁷

3.3 공압 제진 시스템의 비선형성을 반영하 는 전달 함수의 구성

전달 함수의 구성을 위해서 공압 제진 시스템 의 지배 방정식을 라플라스 변환을 통해 대수적으 로 표현한다. 식(8), (9), (23), (26), (29)의 라플라스 변환식은 다음과 같다. 변위와 연관한 계수들이 대문자화한 것은 라플라스 변환을 한 것을 의미한 다.

$$F_{dp} + F_s = s^2 M X_p \quad (31)$$

$$F_{dp} = -(K_{dp} + sC_{dp})(X_p - X_b) \quad (32)$$

$$F_{ori,i} = -sC_{eq,i} X_i \quad (33)$$

$$F_s = -K_s \left(X_p - X_b - \sum_i X_i \right) \quad (34)$$

$$F_i = -K_i X_i \quad (35)$$

또, 식(11)을 등가 힘으로 변환하고 다시 라플라스 변환을 수행하면 다음과 같다.

$$F_s = F_i + F_{ori,i} \quad (36)$$

위의 식들을 이용하여 바닥의 변위 X_b 에 대한 피스톤의 변위 X_p 의 전달함수를 구하는 과정은 다음과 같다.

먼저 식(31)과 식(36)에서 F_s 를 소거한 식에 식(32), (33), (35)를 대입하면 다음과 같다.

$$X_i = -\frac{s^2 M X_p + (K_{dp} + sC_{dp})(X_p - X_b)}{sC_{eq,i} + K_i} \quad (37)$$

한편, 식(31)에 식(32)와 식(34)를 대입하면

$$K_s \sum_i X_i = s^2 M X_p + (K_{dp} + sC_{dp} + K_s)(X_p - X_b) \quad (38)$$

을 얻을 수 있고, 식(37)을 식(38)에 대입하면 다음과 같은 전달 함수를 얻게 된다.

$$\frac{X_p}{X_b} = \frac{1}{1 + \frac{s^2 M}{K_{dp} + sC_{dp} + \frac{1}{\frac{1}{K_s} + \sum_i \frac{1}{K_i + sC_{eq,i}}}}} \quad (39)$$

식(39)에 식(13), (24)를 대입하고, 주파수 영역 에 대한 복소 표현으로 바꾸면 다음과 같은 전달 함수가 된다.

$$\frac{X_p}{X_b} = \frac{1}{1 + \frac{-\omega_n^2 M}{K_{dp} + j\omega_n C_{dp} + \frac{1}{\frac{1}{K_s} + \sum_i \frac{1}{K_i + j\omega_n^2 |X_i| C_{c,i}}}}} \quad (40)$$

$$\text{여기서, } C_{c,i} = \frac{8}{6\pi} \frac{A_p^3}{C_d^2 A_{ori,i}^2} \left(\frac{P_0}{RT} \right) \quad (41)$$

위의 전달 함수식(40)에 포함되어 있는 $|X_i|$ 를

알기 위해서는 또 하나의 식이 필요하며, 그것은 식(33), (35)를 식(36)에 대입하여 나온 식을 식(32)와 함께 식(31)에 대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$X_i = -\frac{-\omega^2 M \frac{X_p}{X_b} + (j\omega C_{dp} + K_{dp}) \left(\frac{X_p}{X_b} - 1 \right)}{K_i + j\omega_n^2 C_{c,i} |X_i|} X_b \quad (42)$$

3.4 수정된 SOR 방법을 이용한 전달함수의 계산

식(40)를 식(42)에 대입하면, 전달율을 구하는 식의 개수는 감쇠 공기방의 개수와 같게 된다. 그런데 이 식은 아직 결정되지 않은 감쇠 공기방의 등가 변위 값들을 참조하며, $X_i = 0$ 인 점에서 미분 불가능인 비선형 복소 방정식이다.

따라서, 다음과 같은 방법으로 해를 얻는 것이 가능하다: 실수부와 허수부를 나누어 두 개의 식으로 만들고, 미분 불가능인 점을 피하여 수행하는 Newton 방법을 사용하여 수치적으로 근을 구할 수 있다. 하지만 Newton 방법은 실제적인 면에 있어서 다음의 두 가지 이유로 연산 횟수가 너무 많아서 적용이 곤란해 진다: 복소 변수가 들어가는 연산이라 실수부와 허수부로 나누어 계산을 하여야 하므로 식의 개수가 2 배로 늘어나게 되며, 비선형 Newton 방법에서 사용할 Jacobian Matrix 는 무척 복잡하여 많은 연산을 필요로 하게 된다.⁸

감쇠 공기방이 하나인 경우에는 식(40)를 대입한 식(42)의 우변을 계산하여 좌변에 대입하고, 이 값을 다시 다음 반복 계산에 사용하는 반복 해법으로 해를 구하는 것이 가능하다. 하지만, 감쇠 공기방이 여러 개가 되면 각 감쇠 공기방의 등가 변위의 초기값을 임의로 줄 때에, 반복 계산 과정에서 발산하는 경우가 발생한다.

그러므로 Relaxation 방법의 하나인 SOR (Successive Over Relaxation)을 수정하여 사용하고자 한다. 기존의 SOR 에서는 연립 방정식 중에서 이전에 계산되어 나온 변수 값을 다음 식에 대입하는 방법을 사용하지만, 본 연구에서 개발된 전달함수는 비선형성이 강하여 발산되기 쉬우므로 수렴성의 향상을 위해 각 식에 대해 반복 과정을 거쳐 변수 값이 원하는 상대 오차의 범위 안에 들어오도록 하여야 다음 식의 계산에서 이전 식에서

계산된 변수값을 대입할 수 있도록 하였다. 이러한 점이 기존의 SOR 에서 수정된 점이다.

또한, 반복 대입의 과정의 수렴성을 향상시키기 위해 1 이하의 가속변수(Acceleration Parameter)를 사용하는 Under Relaxation 방법을 쓴다. 식(42)이 선형적인 식이 아니므로 선형 방정식에 사용되는 가속 변수를 결정하는 식을 사용할 수 없으므로 가속 변수의 구체적인 값을 결정하는 것은 시행착오에 의해서 가장 적절한 값을 결정한다. 실제 연산을 수행한 결과, 감쇠 공기방이 하나인 경우는 0.75, 감쇠 공기방이 두개인 경우는 0.69 의 가속변수를 사용할 때, 가장 빠른 수렴을 함을 발견할 수 있었다. Relaxation 과정은 식(43)을 이용하였으며, α 는 가속 변수이고, n 은 반복 회수이다.

$$X_i|_{n+1} = (1-\alpha)X_i|_n + \alpha X_i|_{n+1} \quad (43)$$

본 연구에서 개발된 해법을 정리하면 다음과 같다: 식(40)에서 X_b 와 X_i 의 초기값으로 가진 진폭을 입력하여 얻은 전달율 값을 다시 식(42)의 우변에 대입하여 계산한 후, 가속 변수를 적용하여 X_i 를 얻는다. 이와 같은 과정을 반복하여 한 개의 감쇠 공기방에 대해 수렴한 값을 얻으면 이를 다시 다른 공기방에 대해 적용하여 수렴할 때까지 같은 과정을 반복한다. 전체적으로 등가 변위 X_i 가 수렴 허용 오차 안에 들어오면 프로그램을 종료한다. 수렴의 판단기준으로는 이전 계산 값과 다음 계산 값의 상대 오차가 10^{-6} 이하가 되도록 하였다

3.5 비선형 해법과의 비교

Table 1 의 사양을 가진 공압 체진대에 대하여 선형화한 방법에 의한 전달율 계산 결과를 Fig.4 에 도시하였다. Fig.2 와 비교하면 거의 같은 모양이나 전달율 계산에서 계산 오차의 감소로 곡면이 부드러워졌음을 발견할 수 있다.

고유진동수의 경우는 작은 진폭에서의 고유진동수는 비선형 해석 결과가 1.98 Hz 가 나왔으며, 선형 해석 결과가 2.00 Hz 로 1.01 %의 오차를 보이며, 큰 진폭에서의 고유진동수는 비선형 해석 결과가 5.50 Hz 이고, 선형화한 해석 결과가 5.41 Hz 로서 1.64 %의 오차를 보인다. 또한 전달율의 크기는 대부분의 영역에서 0.1% 이하의 오차를

보이며, 가장 크게 차이가 나는 영역인 공진주파수일 때의 전달율도 작은 진폭에서는 7.19 %의 오차를 보이고, 큰 진폭에서는 1.97 %의 오차를 보이므로 선형화한 전달을 계산 방법을 사용하는 것이 비선형 해석과 큰 차이가 없음을 알 수 있다. (비교결과는 모두 비선형 해석 결과를 기준으로 하였으며, 상대오차로 나타내었다.) 관찰되는 약간의 차이는 다음의 이유에서 발생하는 것으로 추정된다: 선형화 과정에서 공압 제진대의 응답 파형이 정현파라고 가정하였는데 비선형 해석 결과의 응답 파형은 정현파와 약간 다른 것에서 오는 등가감쇠계수 오차, 비선형 시뮬레이션에서의 많은 계산량으로 인한 계산오차의 누적 등.

계산 결과를 그래프로 출력하는 시간까지 합한 총 수행시간은, 펜티엄 4 프로세서를 장착한 1.4 GHz PC로 연산을 수행했을 경우, 비선형 해석이 2759.1 초, 선형화 해석이 1.3229 초이었다. 선형화 해석에 의한 계산이 0.048 % 정도로 계산시간이 줄어들었음이 확인되었다.

의 비선형적인 특성인, 전달율 곡면에서 공진점이 진폭에 따라서 다른 곳에서 나타나는 현상을 일으킴을 밝혔다.

- (4) 계산오차의 감소, 다중 감쇠 공기방의 고려 가능, 계산 시간의 단축을 위해 비선형 모델의 선형화를 시도하여서, 등가 에너지 방법을 통해 등가 기계 모델을 완성하였다.
- (5) 등가 기계 모델에 따라 공압 제진대의 각 요소들이 전체시스템에 미치는 영향이 명확히 규명되었고 전달 함수를 구성하였다.
- (6) 본 연구에서 개발된 수정된 successive under-relaxation 방법에 의해 전달율을 계산하였으며, 계산 결과가 비선형 모델에 의해 계산된 전달율과 아주 근사함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 산하 서울대 마이크로 열 시스템 연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

1. Gas Encyclopedia, L'air Liquide, Elsevier, Netherland, pp.6,67-68, 1976.
2. Erin, C. and Wilson, B., "An improved model of a pneumatic vibration isolator: theory and experiment," Journal of Sound and Vibration, Vol.218, No.1, pp.81-101, 1998.
3. Washio, S., Konishi, T., Nishii, K., Tanaka, A., "Research on Wave Phenomena in Hydraulic Lines (9th Report, Experimental Investigation of Oscillatory Orifice Flows)," Bulletin of the JSME, Vol. 25, No. 210, pp.1906-1913, 1982.
4. Doebelin, E., Measurement Systems : Application and Design, 4th Ed., McGraw-Hill, pp.566, 1990.
5. Popov, G. and Sankar, S., "Modelling and Analysis of Non-linear Orifice Type Damping in Vibration Isolators," J. Sound and Vibration, Vol.183, No.5, pp.751-764, 1995.
6. Tse, Francis S., Mechanical Vibration, 2nd Ed., Allyn and Bacon, 1978.
7. Firestone Airmount Isolator Catalog, 1996.
8. Burden, Richard L., Numerical Analysis, 6th Ed, ITP, 1997.

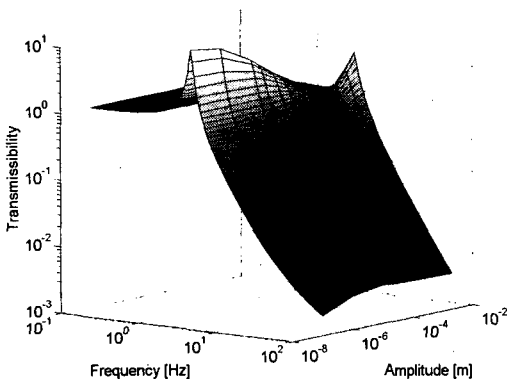


Fig.4 Transmissibility of the pneumatic vibration isolator obtained by linearized transfer function

4. 결론

- (1) 공압 제진 시스템의 성능에 영향을 미치는 주요 요소들의 비선형 모델을 제안하였다.
- (2) 수립된 모델 상호 간의 관계식을 수식화하고, 전달율 계산 알고리즘을 역학적인 관계에 따라 완성하여 비선형 시뮬레이션을 수행하였다.
- (3) 오리피스스의 비선형 모델은, 공압 제진 시스템