한국정밀공학회지 제21권 제10호 (2004년 10월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 21, No. 10, October 2004.

3차원 유연구조물에 대한 구조-제어 통합설계

박중현#

Structure-Control Combined Design for 3-D Flexible Structure

Jung-Hyen Park#

ABSTRACT

A combined optimal design problem of structural and control systems is discussed by taking a 3-D flexible structure as an object. We consider a minimum weight design problem for structural system and disturbance suppression problem for the control system. The conditions for the existence of controller are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMI). By minimizing the linear sum of the normalized structural objective function and control objective function, it is possible to make optimal design by which the balance of the structural weight and the control performance is taken. We showed in this paper the validity of combined optimal design of structural and control systems.

Key Words : Combined optimal design (통합최적설계), Descriptor system form (디스크립터형식), H^{∞} control (H^{∞} 제어), 3-D flexible structure (3 차원유연구조물), LMI (선형행렬부등식)

1. 서론

종래, 고도의 기계구조물을 설계하는 경우에 있어, 먼저 구조설계를 하여 원하는 동특성을 얻을 수 없는 경우에 제어시스템 설계를 실시, 원래의 구조에 부가하여 종합적으로 소망의 동특성을 취득하는 시스템 설계방법을 취하여왔다. 이 설계방법은 구조-제어 시스템이 개별적으로 설계되어지는 사실로부터 구조-제어 시스템 개별최적설계라고 불리어진다. 최근, 경량화, 컴팩트화가 요구되는 우주구조물 등의 유연구조물을 설계함에 있어, 구조-제어 시스템은 서로 쌍방의 시스템 동특성에 영향을 끼치기 때문에, 구조-제어 시스템을 상호 고려하여 설계하는 것이 제어 시스템을 고려한 구조로써, 개별설계보다도 우수한 구조 동특성을 가진 구조설계가 가능하다고 생각되어진다. 이러한 설계법은 구조-제어 시스템이 동시에 설계되어지는 사실로부터 구조-제어 시스템 통합최적설계라고 불리어지고 있으며, 관련연구가 활발히 행하여지고 있다.[1,2]

일반적으로 이러한 문제는 설계대상을 상태방정식으로 기술하여 취급해왔다. 본 논문에서는 설계대상의 표현에 있어 디스크립터 형식을 사용한다. 디스크립터 형식은 시스템에 나타나는 변수사이의 동적, 정적 관계의 자연스러운 기술을 가능하게 함으로써, 변수간의 결합 및 물리정수의 배치에 유래하는 구조시스템의 더욱 우수한 모델링을 가능하게 한다. 또한, 제어 시스템 설계분야에

☞ 접수일: 2003년 3월 29일; 게재승인일: 2004년 6월 11일
교신저자, 신라대학교 자동차기계공학과
Email sky@silla.ac.kr Tel. (051) 309-5727

있어 선형행렬부등식(LMI)을 이용하는 설계법이 유용하다는 인식이 최근 깊어지고있다. 통합최적 설계문제에 있어서도 설계문제의 모델링에 LMI의 이용 필요성은 높다고 생각된다.

본 연구에서는, 3차원 유연 구조물을 유한요소법에 의해 모델링화 한 것을 설계대상으로 하여 구조-제어 시스템의 통합최적설계문제를 다룬다. 구조시스템의 평가함수는 구조중량이며, 제어시스템의 평가함수는 전체 페루프시스템의 외란에서 제어출력까지의 전달함수의 H^{∞} norm 이다. 통합최적설계문제의 평가함수는 정규화 되어진 구조-제어시스템 평가함수의 가중인자포함 선형합으로 한다. 이 평가함수를 최소화 함으로써 구조중량과 제어성능의 균형이 잡힌 최적설계가 가능하다고 생각되어진다. 최적설계문제에 있어서의 설계변수로는 트러스 부재의 단면적을 채용하여, 수치 시뮬레이션을 통하여 본 설계법의 유효성을 보인다.

2. 시스템 정식화 및 H^{∞} 제어문제

본 논문에서는, 재질 및 구조적 배치는 변화하지않는 n 개의 부재로부터 구성되는 입체 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유한요소법에 의해 모델링하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M(a)\ddot{q}+D(a)\dot{q}+K(a)q=L_1w+L_2u \tag{1}$$

여기서 $M(a),D(a),K(a)$ 는 각각 질량, 감쇠, 강성 행렬, q,L_1,w,L_2,u 는 절점변위벡터, 외란입력배치 행렬, 외란입력, 조작입력배치행렬, 조작입력이다. 그리고 $a=[a_1\cdots a_n]^T$ 는 설계변수인 트러스 부재단면적 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 의 벡터이다.

다음으로, x 디스크립터변수, z 제어출력, y 관측출력으로 하여, 식(1)을 디스크립터 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$E\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u \tag{2}$$

$$z=C_1x+D_{12}u \tag{3}$$

$$y=C_2x+D_{21}w \tag{4}$$

$$E=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(a)\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K(a) & -D(a)\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ L_1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ L_2\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix} q \\ \dot{q}\end{bmatrix}$$

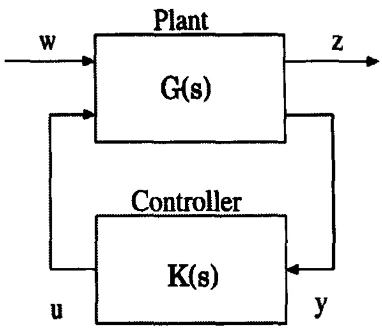


Fig. 1 H_{∞} Control system

본 연구에서 사용하는 디스크립터 방정식은 제어대상 시스템의 물리변수, 물리적구조를 보존가능하기때문에, 실제 시스템과 같이 자연스러운 표현이라고 말할 수 있다. 디스크립터 방정식과 비교하여, 식(1)의 운동방정식을 상태방정식으로 변환하면

$$\dot{x}=A_sx+B_{1s}w+B_{2s}u$$

$$A_s=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M(a)^{-1}K(a) & -M(a)^{-1}D(a)\end{bmatrix}$$

$$B_{1s}=\begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_1\end{bmatrix},\ B_{2s}=\begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_2\end{bmatrix}$$

와 같이 표현되어, 질량 행렬인 $M(a)$ 가 역 행렬 $M(a)^{-1}$ 의 형태로 나타난다. 일반적으로, 질량행렬의 요소 한 개가 변화하는 경우에도 역 행렬의 모든 요소가 변화하므로, 구조시스템의 요소변경은 상태방정식 계수행렬의 변경에 복잡하게 나타난다 그러므로, 디스크립터 형식이 상태방정식보다 시스템 모델링에 있어 우수한 표현이라고 말할 수 있다.[3]

본 연구에서는 외란의 영향을 억제하기 위하여 H^{∞} 제어시스템을 설계한다. H^{∞} 제어문제란, Fig. 1 과 같은 페루프시스템의 외란입력 w 에서 제어출력 z 까지의 전달함수행렬 T_{zw} 의 H^{∞} norm 이, 어떤 주어진 $\gamma>0$ 에 대하여 다음의 식을 만족하는 내부안정인 H^{∞} 콘트롤러 $K(s)$ 를 구하는 문제이다.[4]

$$N=\|T_{zw}\|_{\infty}<\gamma \tag{6}$$

주파수영역에서 정의되어진 식(6)의 사양은 다음과 같이 시간영역에서 표현가능하다.

$$\int_0^{\infty} z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} w^T(t)w(t)dt \qquad (7)$$

식(7)의 우변이 시스템에 대한 외란의 영향을 나타내므로, N 값이 작을수록 외란에 의한 진동의 영향을 억제하는 것이 가능하다.

디스크립터 시스템에 대한 H^{∞} 제어문제에 대해 고찰해보자. 식(2)에 대한 H^{∞} 콘트롤러를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} E\dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{aligned} \qquad (8)$$

여기서 x_k 는 관측기에 의한 디스크립터 변수의 추정치이다. 주어진 $\gamma > 0$ 에 대하여, 페루프 시스템을 내부안정으로 하며 식(6)의 norm 조건을 만족하는 H^{∞} 제어기가 존재하기위한 필요충분조건은, 다음식을 만족하는 X, Y 가 존재하는 것이다.[5]

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T & I \\ I & Y^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^T & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (9)$$

$$\begin{bmatrix} B_2^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AX + X^TA^T & B_1 & X^TC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1X & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2^{\perp T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \qquad (10)$$

$$\begin{bmatrix} C_2^{\perp T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y^TA + A^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \qquad (11)$$

여기서 $B_2^{\perp}, C_2^{\perp}$ 는

$$B_2^{\perp} = \begin{bmatrix} B_2 & B_2^{\perp T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_2^{\perp T}\begin{bmatrix} C_2^T & C_2^{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

를 만족하는 행렬이다.

3. 통합설계문제

본 연구에서는 구조시스템에 대한 최소중량설계문제와 제어시스템의 외란에 의한 영향 억제문제를 설계목적으로 생각한다. 대상구조물로써 트러스 구조물을 채용하면 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬은 트러스 부재 단면적의 함수로 모델링이 가능하다.[6,7] 구조 평가함수를 전체구조중량, 제어 평가함수를 H^{∞} norm 으로 한다.

최적설계문제에서의 평가함수 J 를 정규화 되어진 구조중량 W 와 H^{∞} norm N 의 선형합으로 하여 다음식과 같이 정의한다.

$$J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \qquad (12)$$

w_W, w_N 은 구조, 제어시스템의 평가함수에 대한 가중인자이며($w_W + w_N = 1$), W_0, N_0 는 단일 단면적 초기 구조에서의 구조중량과 H^{∞} norm 의 값이다. 설계변수로 부재단면적 a 를 채용하여 식(12)을 최소화함으로써, 구조중량과 제어성능의 균형잡힌 최적설계를 실현가능 하게한다.

H^{∞} 제어문제는 모든 경우에 있어 해가 존재하지는 않기 때문에, 가해조건을 설계문제의 제약조건으로 고려할 필요성이 있다. 여기서 H^{∞} 제어문제의 가해성에 대한 식(9)~(11)조건을 본 연구에서의 통합최적화문제 제약조건으로 사용한다. 결과적으로, 본 연구에서의 최적설계문제를 다음과 같이 기술한다.

$$\min_a J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0}$$
$$\text{subject to} \begin{cases} \text{Eq. (9) is satisfied.} \\ \text{There exists } X \text{ in Eq. (10).} \\ \text{There exists } Y \text{ in Eq. (11).} \end{cases} \qquad (13)$$

그리고, 설계변수에 대하여 다음과 같은 제약조건을 정의한다.

$$a^{\min} \leq a \leq a^{\max} \qquad (14)$$

$a^{\min}, a^{\max}$ 는 부재 단면적의 하한값, 상한값이다. 최적화문제를 실행하는 방법으로는 비선형문제에 대한 심플렉스법을 이용한다.[8]

4. 수치 시뮬레이션

Fig. 2 에 보이는 3 차원 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유연구조물인 3 차원 트러스 구조물은 이하와 같은 무차원화 되어진 사양을 가진다고 가정한다.

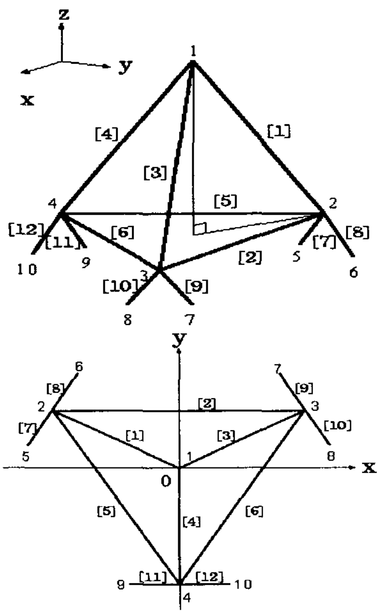


Fig. 2 3-D truss structure

장부재 길이	$(a_l : l = 1,\cdots,6)$	10
단부재 길이	$(a_s : s = 7,\cdots,12)$	$2\sqrt{2}$
밀도	(ρ)	1.0
종탄성계수	(E)	10^4

Fig. 2 의 구조물에서는, 절점 5,6,7,8,9,10 은 각각 x, y, z 방향에 고정되어 있다. 절점 1 의 x, y, z 방향에 센서가 배치되어 절점 1 의 변위를 측정한다. 또한, 절점 1 에는 액츄에이터가 x, y, z 방향에 배치되어 제어입력을 가하는 것으로 한다. 외란은 절점 2,3,4 의 y 방향으로 작용한다고 가정한다. 감쇠특성은 다음과 같이 정의한다.

$$D(a) = 0.001M(a) + 0.001K(a) \tag{15}$$

구조 평가함수인 구조중량 W 는 부재의 밀도, 길이, 단면적을 ρ_i, l_i, a_i 라고 하면, 다음과 같이 계산된다.

$$W(a) = \sum_{i=1}^{12} \rho_i l_i a_i \tag{16}$$

제어 시스템의 평가함수는 폐루프 시스템의 외란입력에서 제어출력까지의 전달함수 H^∞ norm N 이며, 이 값이 작을수록 외란에 의한 진동의 영향을 억제하는 것이 가능하다. H^∞ 최적제어문제의 해는 H^∞ 준(準)최적제어문제를 반복해서 푸는 방법으로 구할 수 있다. 즉, 외란에서 제어출력까지의 전달함수를 안정화하는 제어기가 존재한다면, 충분히 값이 큰 γ 에대하여 H^∞ 준최적제어문제는 해를 가진다. γ 값을 충분히 작게 취하면 해는 존재하지 않는다. 그 경계에서 H^∞ 최적제어문제의 해가 주어지므로 수치해석의 이분법에 의하여 구할 수 있다. 이것을 γ 이터레이션이라고한다. 본 연구에서는 트러스 부재의 단면적에 관한 함수인 대상 시스템을 구성하여, 다음 구간에서 γ 이터레이션을 이용하여 H^∞ 최적제어문제의 해를 구하여 그 때의 γ 의 최소값을 N 으로 한다.

$$0 < \gamma \le 10 \tag{17}$$

먼저, 각 부재의 단면적이 $a_i = 1.0 (i = 1,\cdots,12)$ 로 동일한 경우를 생각한다. 이러한 구조를 초기구조라고 한다. 초기구조에 대한 구조중량 W 는 76.97 이며, N 값은 0.49 이다. 초기구조에 대한 이러한 구조중량과 H^∞ norm 값을 식(12)의 W_0, N_0 으로 사용한다. 부재 단면적을 설계변수로 하여 식(14)에 해당하는 각 부재 단면적의 제약조건을 다음으로 한다.

$$0.5 \le a_i \le 1.5 (i = 1,\cdots,12) \tag{18}$$

먼저, 가중인자를 이하와 같이 설정(case1)하여 통합최적설계를 실행한다.

$$(w_W, w_N) = (0.5, 0.5) \tag{19}$$

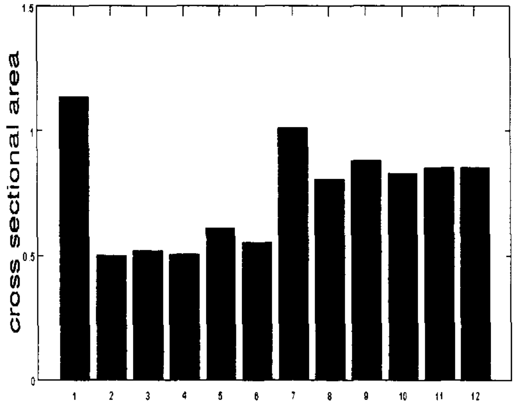
이 설정에서의 최적화 결과, 평가함수 J 가 최소값을 가질 경우의 구조중량 W 는 52.98, 제어성능의 평가함수인 N 값은 0.54 이었다. 초기구조와 비교하여 W 값은 작아져 구조중량을 저감 시키는 것은 가능하였지만, N 값은 증가하여 외란에 의한 진동에 대한 제진성능은 악화되었다.

다음으로, 가중인자를 다음과 같이 설정(case2)하여 최적화를 실행하였다.

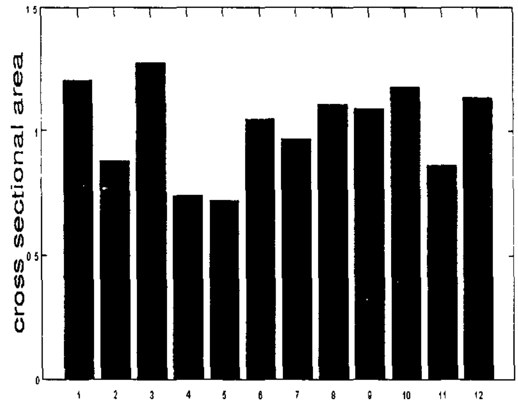
$$(w_W, w_N) = (0.6, 0.4) \tag{20}$$

이 설정에서 최적화를 실행한 결과, 구조중량 W 가 76.61, H^∞ norm N 값은 0.45 이었다. 이 경우

에 있어서 case1 의 경우보다 구조중량이 증가한 사실을 알 수 있다. 또한, 초기구조와 비교하여, 구조중량을 저감 시킬 수 있었으며, 제진성능도 향상되었다. 각 경우에 대한 트러스 구조물의 각 부재 단면적을 Fig. 3 에 나타낸다.



(a) $(w_W, w_N) = (0.5, 0.5)$



(b) $(w_W, w_N) = (0.4, 0.6)$

Fig. 3 Distribution of cross sectional areas

지금부터는, 구조와 제어 평가함수인 구조중량 W 와 외란 입력에서 제어 출력까지의 전달함수의 H^∞ norm N 과의 관계에 대해서 고찰해 보자. 몇 가지 경우의 가중인자 (w_W, w_N) 에 대하여 통합최적화를 실행한 결과, 구조중량 W 와 H^∞ norm N 의관계를 Fig. 4 에 나타낸다. Fig.4 의 *는 트러스 부재의 단면적이 $a_i = 1.0(i = 1, \cdots, 12)$ 로 동일한 경우인 초기구조의 경우이고, +는 각 부재 단면적이 $a_i = 0.8(i = 1, \cdots, 12)$ 로 일정하게 설정한 경우이다. + 마크의 경우, 구조중량 W 는 61.58, H^∞ norm N 값은 0.54 이었다. 그리고 Fig. 4 의 o는 각각 case1, case2 의 수속점을 나타낸다. Fig. 4 의 결과로부터 구조중량과 H^∞ norm 은 서로 경합하는 관계에 있다는 사실을 알 수 있다. 즉, 구조중량 W 가 커지면 norm N 값은 보다 작은 해를 얻을 수 있으며, 역으로 구조중량이 작아지면 H^∞ norm N 값은 커진다는 사실을 나타낸다. + 와 case1o 의 비교로부터, 통합최적설계의 경우가 거의 동일한 H^∞ norm N 값에서 단면적일정의 경우보다 경량의 구조중량 W 를 실현 가능하게 하는 것을 알 수 있다. 또한, * 와 case2o 의 비교로부터, 거의 동일구조중량 W 의 경우, 통합최적설계가 단면적일정의 경우보다 작은 H^∞ norm N 값을 실현 할 수 있다는 사실을 알 수 있다. 이들 결과로부터 단면적일정의 경우와 비교하여 통합최적설계법을 이용하는 경우가, 외란에 의한 진동에 대한 동등의 제진성능에서의 구조중량의 저감을 실현 가능하다는 사실과 동등의 구조중량에서의 제진성능의 향상을 실현 가능하다는 사실을 알 수 있다. 또한 Fig. 4 의 결과는 본 연구에서 사용한 가중인자법의 유효성을 나타내고 있다.

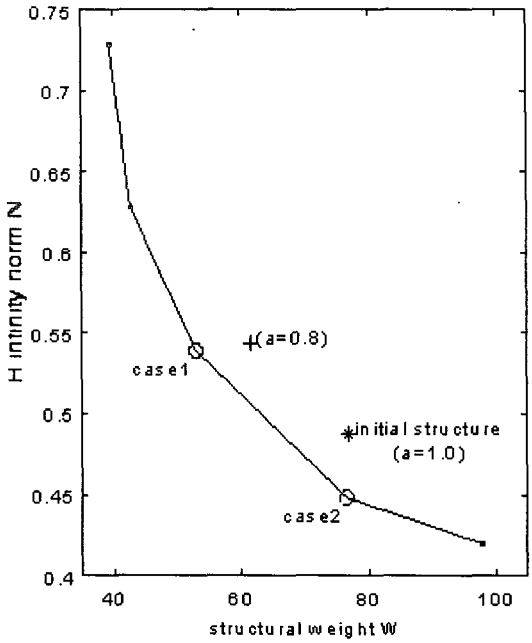


Fig. 4 Relation of structural weight and H^∞ norm

다음으로, 절점 2,3,4 의 y 방향에 Fig. 5 과 같은 외란이 가해진다고 가정하여, 몇 가지 경우에 있어서 절점 1 의 y 방향 변위 시간응답을 Fig. 6 에 나타낸다. Fig. 6(a)는 초기구조인 경우의 시간응답이며, (b)는 가중인자 $(w_W, w_N) = (0.4, 0.6)$ 으로 통합최적설계를 실시하여 얻어진 구조물에 대한 시간응답이다. 통합최적설계 전후의 시간응답을 비교해보면, 통합최적설계 되어진 경우가 외란이 입력되어진 시점에 대하여 절점 1 의 y 방향 변위에 미치는 영향이 작다는 사실을 확인 할 수 있다.

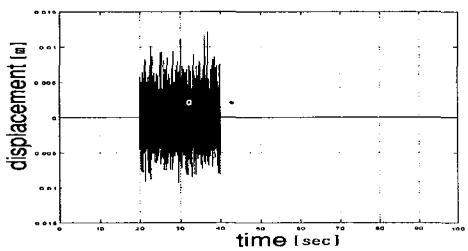
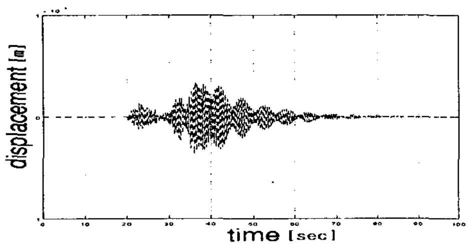
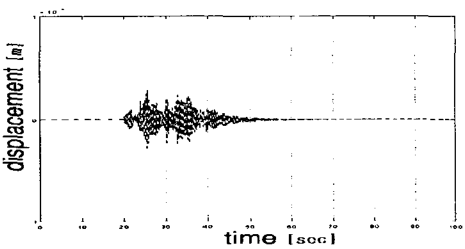


Fig. 5 Disturbance of y direction at node2,3,4



(a) uniform cross sectional areas (initial structure)



(b) optimal cross sectional areas (case2)

Fig. 6 Response of displacement at node 1

5. 결론

최근의 수치계산기법의 활용분야에 있어서는, 방정식으로 표현되는 등식제약조건보다, 평가함수값이 어떤 지정범위내(부등식제약)에 존재하는 해를 구한다는 생각의 유용성에 대한 인식이 깊어가고있다. 본 연구에서는 최적설계법에 있어서 선형행렬부등식(LMI)으로 표현되는 제약조건을 이용하였다. 그리고, 디스크립터 방정식으로 표현되는 시스템에 대하여 구조-제어 통합최적 설계법을 제안하였다. 설계법에서의 평가함수로써, 구조 평가함수와 제어 평가함수의 가중인자포함 선형합을 사용하여, 외란에 대한 제진성능을 향상시킴과 동시에 구조중량을 저감 시킬 수 있는 최적구조설계를 가능하게 하였다. 본 연구에서는, 식(18)의 부재단면적 조건으로 구조시스템의 강도조건을 만족한다고 가정하였으나, 평가함수에 구조강도조건을 적극적으로 도입한 구조설계부분의 보완이 추후연구에서 요구된다.

참고문헌

1. Park, J. H., "Combined Optimal Design of Structure-Control Systems by Sliding Mode Control," Journal of the KSPE, Vol. 19, No. 10, pp. 45-51, 2002.
2. Park, J. H., "A Study on the Minimum Weight Design for Flexible Structure," Journal of the KSPE, Vol. 21, No. 2, pp. 153-159, 2004.
3. Ikeda, M., "System Theory based on Descriptor Form," SICE Journal, Vol. 24, No. 7, pp. 597-604, 1985.
4. Keh, J. E. and Lee, M. H., "Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror," International Journal of the KSPE, Vol. 3, No. 4, pp. 78-86, 2002.
5. Ohara, T. and Masu, K., "Progressing of Matrix Inequality and Control System Design Method," Trans. of ISCIE, Vol. 41, No. 1, pp. 28-34, 1997.
6. Petrt, M., Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge Univercity Press, pp. 231-392, 1990.
7. Park, Y. C., Lee, G. C., Park, D. S. and Lee, D. H., "The Strength Evaluation of TiNi/Al6061 Composite by Using Finite Element Method," Journal of the KSPE, Vol. 19, No. 2, pp. 72-78, 2002.
8. Yoshise, Y., "Optimization Method for Convex Programming Problem," Trans. of ISCIE, Vol. 38, No 3, pp. 155-160, 1994.