

축대칭 압출 공정에서 상계법을 이용한 금형 접촉면압의 계산

최영[#], 여흥태^{*}, 허관도^{*}

Calculation of Contact Pressure to the Die of Axisymmetric Extrusion by Using Upper Bound Solution

Young Choi[#], Hongtae Yeo^{*} and Kwando Hur^{*}

ABSTRACT

In general, the contact pressure to the die cannot be easily determined by using upper bound solution. Recently, the authors have proposed the method determining the contact pressure with the upper bound solution for the forming with the plane stain plastic deformation. In this paper, the method is applied to an axisymmetric forward extrusion process. The contact pressure to the die of the axisymmetric extrusion has been determined with the upper bound solution and compared with the result of rigid plastic FEM. The optimal semi-angles of die have been obtained minimizing the relative contact pressure to die for the extrusion ratio.

Key Words : Contact pressure(접촉면압), Upper bound solution(상계해), Axisymmetric Extrusion(축대칭 압출)

1. 서론

상계법(upper bound method)은 금속성형 공정의 성형하중을 실제 하중보다 높게 평가함으로써 성형 공정의 설계에 있어 유용한 방법이다. 많은 금속 성형공정이 상계해(upper bound solution)을 이용하여 해석되어 왔다.¹⁻⁸ 상계법에서는 성형공정에 소요되는 에너지의 상계치를 이용하여 에너지가 공급되는 펀치의 상계하중을 예측함으로써 다이와 같은 고정된 금형에 작용하는 접촉면압(contact pressure)을 예측하기 어렵다.

Kiuchi⁹ 등에 의해, 상계요소법(UBET)에서 금형에 작용하는 접촉면압을 수치적인 방법으로 계산하는, 가상요소법(imaginary element method)이 도입되었다. Christensen¹⁰ 등은 가상요소 개념을 발전시켜 압력요소(pressure element)를 제안하고 상계요

소법을 이용하여 금형에 작용하는 접촉면압을 수치적인 방법으로 결정하였다.

Choi^{11,12} 등은 가상속도(imaginary velocity)를 도입하여 금형에 작용하는 접촉면압을 해석적으로 결정하는 새로운 방법을 제안하고 평면변형 인발과 평면변형 단조의 상계해로부터 금형 접촉면압을 결정하였다.

본 연구에서는 상계해를 이용하여 축대칭 압출(axisymmetric extrusion)에서 금형에 작용하는 접촉면압을 해석적인 방법으로 결정하고자 한다. 상계해를 이용하여 결정된 접촉압력을 강소성 유한요소법(rigid plastic FEM)의 해석결과와 비교하여 그 타당성을 보이고자 한다.

또한 각각의 접촉면압이 최소가 되는 압출다이 반각(semi-angle)을 압출비에 대해 결정하였다.

접수일: 2004년 5월 31일; 게재승인일: 2004년 9월 9일

교신저자: 인제대학교 기계자동차공학부
Email: ychoi@inje.ac.kr, Tel: (055) 320-3755

* 동의대학교 기계공학부

2. 상계해를 이용한 금형의 접촉면압 계산법

2.1 상계해

소성변형에 필요한 총 에너지 소비율(J^* , total dissipated energy rate)의 상계해는 동적가용속도장(kinematically admissible velocity field)으로부터 계산되며 아래 식(1)과 같다.¹³

$$J^* = \int_V \bar{\sigma}_o \dot{\epsilon} dV + \int_{S_c} \tau |v_s| ds + \int_{S_i} k |\Delta v| ds - \int_{S_f} T_i v_i ds \quad (1)$$

식(1)에서 첫 번째 항은 내부 변형에너지 소비율이며, 두 번째 항은 경계면의 전단 변형에너지 소비율이다. 세 번째 항은 마찰에 의한 마찰 에너지 소비율이다. 마지막 항은 외부 표면력에 의한 에너지 소비율이다. 총 에너지 소비율(J^*)은 편치에 의해 공급된 에너지율과 같으므로 편치하중(L)에 대한 상계해는 아래와 같다.

$$L = J^* / v_p \quad (2)$$

여기서, v_p 는 편치 속도이다.

2.2 금형의 접촉면압

금형의 접촉면압은 총 에너지 소비율, 식(1)로부터 아래 식(3)와 같이 계산된다.^{11,12}

$$P_n = \frac{1}{A_i} \cdot \frac{\partial J^*}{\partial v_{n,i}} \Big|_{v=v^*} \quad (3)$$

여기서, A_i 는 접촉면 면적이며, $v_{n,i}$ 는 i 번째 접촉면에서 수직속도를 나타낸다. v^* 는 속도 경계조건을 나타낸다.

일반적인 상계해에서, 동적가용속도장이 속도 경계조건을 만족하기 때문에 식(1)의 총 에너지 소비율이 금형과 접촉면에서의 수직속도($v_{n,i}$)의 함수로 표현되지 않는다. 즉, (3)을 이용하여 금형의 접촉면압을 계산할 수 없다. 본 연구에서는 접촉면에서 가상속도(imaginary velocity)를 도입하여 식(1)의 총 에너지 소비율을 접촉면에서 수직속도로 표현하였다.

또한, 식(1)의 마찰 에너지 소비율과 전단변형 에너지 소비율이 절대값 함수를 포함하고 있으므로 식(3)을 이용하여 금형의 접촉면압을 결정할 수 없다. 본 연구에서는 가상속도가 속도 경계조건을 만족하는 조건에서 식(1)의 총 에너지 소비율의 최소화를 수행하여, 속도 및 준독립 변수(pseudo variables)를 결정한다. 이를 통해, 전단 및 마찰 에너지 소비율에 포함된 절대값 함수를 제거할 수 있다.

금형의 접촉면압을 계산하는 절차를 Fig. 1에 나타낸다. 금형과 접촉면에서 가상속도를 도입하고, 총 에너지 소비율을 최소화하여 동적가용속도장을 결정하여 전단 변형 에너지 소비율과 마찰 에너지 소비율의 절대값 함수를 제거한 후, 식(3)을 이용하여 접촉면에서의 접촉면압의 상계해를 계산한다.¹² 이러한 일련의 계산 과정을 3장에 나타낸다.

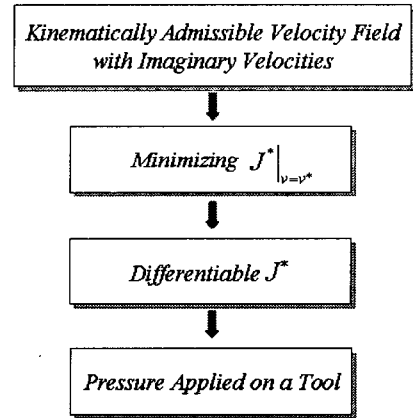


Fig. 1 The procedure to determine the pressure applied on a tool by using an upper bound solution

3. 축대칭 전방 압출공정 적용

3.1 축대칭 삼각형 및 사각형 속도장

본 연구에서는 삼각형과 사각형 속도장을 이용하여 축대칭 전방압출 공정에서 금형에 작용하는 접촉면압을 계산하고자 한다.

Fig. 2에 축대칭 삼각형과 사각형의 동적가용속도장을 나타낸다. 금형에 접촉할 면에서 수직속도를 포함하여 속도장을 구성하였다. 삼각형과 사각형 속도장에서 속도성분은 아래 식과 같다.

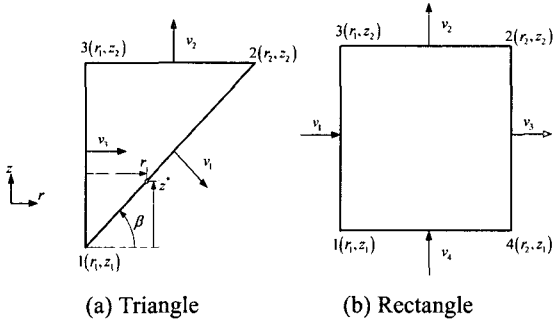


Fig. 2 Basic velocity field of the axisymmetric shape

(1) 삼각형 속도장

$$u_r = \frac{(v_2 \cos \beta + v_1)(r_2 + r)}{2r \sin \beta} \quad (4)$$

$$u_z = \frac{(v_2 \cos \beta + v_1)(z_2 - z)}{2r \sin \beta} + v_2 \quad (5)$$

(2) 사각형 속도장

$$u_r = \left(\frac{v_3 r_2 - v_1 r_1}{r_2^2 - r_1^2} (r - r_1) + v_1 \right) \frac{r_1}{r} \quad (6)$$

$$u_z = 2 \frac{v_3 r_2 - v_1 r_1}{r_2^2 - r_1^2} (z_2 - z) + v_2 \quad (7)$$

3.2 축대칭 전방 압출공정의 상계해

삼각형과 사각형 속도장을 이용하여 구성한 축대칭 전방 압출공정의 동적가용속도장을 Fig. 3에 나타낸다. 각각의 영역에 관한 속도장은 다음과 같다.

① 영역

$$u_{\ominus r} = v_{n2} \frac{r}{r_2} \quad (8)$$

$$u_{\ominus z} = 2v_{n2} \frac{z_2 - z}{r_2} + v_{n1} \quad (9)$$

$$v_a = 2v_{n2} \frac{z_2 - z_1}{r_2} + v_{n1} = u_{\ominus z} \Big|_{z=z_1} \quad (10)$$

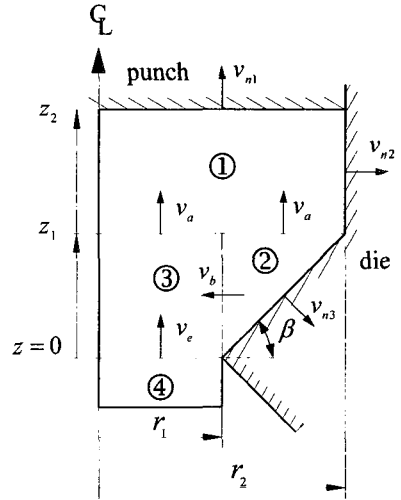


Fig. 3 Velocity field for the forward extrusion

② 영역

$$u_{\ominus r} = -v_b \frac{r_2 + r}{r} \quad (11)$$

$$u_{\ominus z} = -\frac{v_b}{r} (z_1 - z) + v_a \quad (12)$$

$$v_b = -\frac{v_a \cos \beta + v_{n3}}{2 \sin \beta} \quad (13)$$

③ 영역

$$u_{\ominus r} = -v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1^2} \cdot r \quad (14)$$

$$u_{\ominus z} = -2v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1^2} (z_1 - z) + v_a \quad (15)$$

④ 영역

$$u_{\ominus r} = 0 \quad (16)$$

$$u_{\ominus z} = v_e = -2v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1^2} z_1 + v_a \quad (17)$$

3.2.1 내부 변형에너지 소비율

각각의 영역에서 내부 변형에너지 소비율은 다음과 같다.

① 영역

$$\dot{E}_{D,\textcircled{1}} = 2\pi(z_2 - z_1)r_2|v_{n2}|\sigma_0 \quad (18)$$

② 영역

$$\dot{E}_{D,\textcircled{2}} = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}}v_b \cdot I_2 \quad (19)$$

여기서, I_2 는 아래와 같다.

$$I_2 = \int_{r_1}^{r_2} \int_{z^*}^{z_1} \frac{\sqrt{(z_1 - z)^2 + 4(r^2 + r_2r + r_2^2)}}{r} dz dr$$

$$z^* = z_1 - (r_2 - r) \tan \beta$$

③ 영역

$$\dot{E}_{D,\textcircled{3}} = 2\pi(r_1 + r_2)z_1v_b\sigma_0 \quad (20)$$

3.2.2 전단 변형에너지 소비율

각 영역의 경계면에서 속도차 및 전단 변형에너지 소비율은 다음과 같다.

영역 ①&② 경계면의 속도차 및 전단에너지

$$|\Delta V|_{\textcircled{1}\&\textcircled{2}} = v_{n2} \frac{r}{r_2} + v_b \frac{r_2 + r}{r} \quad (21)$$

$$\dot{E}_{S\textcircled{1}\&\textcircled{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sigma_0 \left(\frac{v_{n2}(r_2^3 - r_1^3)}{3r_2} + \frac{v_b}{2}(r_2 - r_1)(3r_2 + r_1) \right) \quad (22)$$

영역 ①&③ 경계면의 속도차 및 전단에너지

$$|\Delta V|_{\textcircled{1}\&\textcircled{3}} = v_{n2} \frac{r}{r_2} + v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1^2} r \quad (23)$$

$$\dot{E}_{S\textcircled{1}\&\textcircled{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sigma_0 \left(v_{n2} \frac{r_1}{r_2} + v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1} \right) r_1^2 \quad (24)$$

영역 ②&③ 경계면의 속도차 및 전단에너지

$$|\Delta V|_{\textcircled{2}\&\textcircled{3}} = v_b(z_1 - z) \frac{r_1 + 2r_2}{r_1^2} \quad (25)$$

$$\dot{E}_{S\textcircled{2}\&\textcircled{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_1 + 2r_2}{r_1} \right) v_b z_1^2 \sigma_0 \quad (26)$$

영역 ③&④ 경계면의 속도차 및 전단에너지

$$|\Delta V|_{\textcircled{3}\&\textcircled{4}} = v_b \frac{r_1 + r_2}{r_1} r \quad (27)$$

$$\dot{E}_{S\textcircled{3}\&\textcircled{4}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(r_1 + r_2)r_1v_b\sigma_0 \quad (28)$$

3.2.3 마찰에너지 소비율

각 영역과 금형 접촉면에서의 속도차 및 마찰에너지 소비율은 다음과 같다.

영역 ①과 금형 접촉면의 속도차 및 마찰에너지

$$|V_s| = -2v_{n2} \frac{z_2 - z}{r_2} - v_{n1} \quad (29)$$

$$\dot{E}_{f\textcircled{1}} = \frac{2\pi m\sigma_0}{\sqrt{3}}(z_2 - z_1)(-v_{n1}r_2 - v_{n2}(z_2 - z_1)) \quad (30)$$

영역 ③과 금형 접촉면의 속도차 및 마찰에너지

$$|V_s| = \sqrt{u_{\textcircled{2}z}^2 + u_{\textcircled{2}r}^2} \Big|_{v_{n3}=0, z=z^*} \quad (31)$$

$$\dot{E}_{f\textcircled{3}} = -\frac{\pi m\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{v_a}{\sin 2\beta} (r_2 - r_1)(3r_2 + r_1) \quad (32)$$

3.2.4 금형에 작용하는 압력식

총 에너지 소비율은 아래와 같다.

$$J^* = \sum \dot{E}_D + \sum \dot{E}_S + \sum \dot{E}_f \quad (33)$$

식(33)을 각각의 접촉면에 수직인 가상속도로 미분하면 각각의 접촉면에 작용하는 수직압력을 얻을 수 있다.

먼저, 압출 반각(a), 컨테이너부 길이(l_0), 압출 비(R)를 정의하면 아래와 같다.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (34)$$

$$l_0 = z_2 - z_1 \quad (35)$$

$$R = \frac{A_o}{A_f} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (36)$$

식(3)을 이용하여 금형과 접촉면에서의 압력을 계산하면 아래와 같다.

$$p_{n1} = \frac{1}{\pi r_2^2} \frac{\partial J^*}{\partial v_{n1}} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{aligned} &R_1 + \left(R_2 + \frac{I_2}{r_2^2} \right) \tan \alpha + R_3 \cot \alpha \\ &+ \frac{2ml_0}{r_2} + R_4 \frac{m}{\sin 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$p_{n2} = \frac{1}{2\pi r_2(z_2 - z_1)} \frac{\partial J^*}{\partial v_{n2}} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{aligned} &R_1 + \left(R_5 + \frac{I_2}{r_2^2} \right) \tan \alpha - \frac{2r_2}{3l_0} \\ &+ R_3 \cot \alpha + ml_0 + R_4 \frac{m}{\sin 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$p_{n3} = \frac{\sin \alpha}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{\partial J^*}{\partial v_{n3}} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{aligned} &R_6 \frac{I_2}{r_2^2} \tan \alpha + \sqrt{3} + R_5 R_6 \\ &+ R_7 \cot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

여기서, R_1 는 아래와 같다.

$$R_1 = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \quad (40)$$

$$R_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3\sqrt{R}} + \frac{1}{6R} \quad (41)$$

$$R_3 = \sqrt{R} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2R} \quad (42)$$

$$R_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2R} \quad (43)$$

$$R_5 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3\sqrt{R}} + \frac{1}{6R} \quad (44)$$

$$R_6 = \frac{R}{R-1} \quad (45)$$

$$R_7 = \frac{2R - \sqrt{R} - 2}{2(\sqrt{R} + 1)} \quad (46)$$

4. 결과 및 고찰

4.1 유한요소법과 비교

축대칭 전방압출 공정에서 상계해를 이용하여 얻어진 금형 접촉면압은 식(37)~(39)와 같다. 계산된 접촉면압의 타당성을 살펴보기 위해, 강소성 유한요소 해석결과와 비교하고자 한다. 본 연구에서는 강소성 유한요소해석 코드인 DEFORM-2D¹⁴를 이용하였다. 비교 결과를 Fig. 4에 나타낸다.

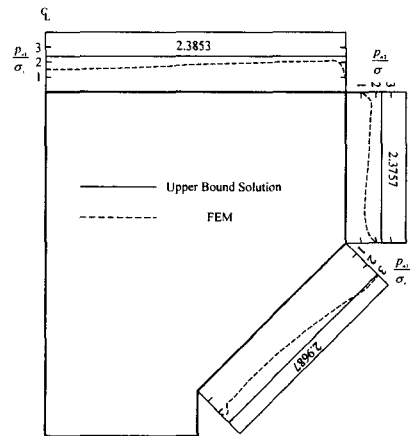


Fig. 4 Comparison of the pressure for the extrusion

Fig. 4에 나타난 계산 결과를 정량적으로 나타내면 Table 2와 같다.

축대칭 전방 압출공정의 해석에 이용된 중요한 공정변수는 Table 3과 같다.

상계해로부터 계산된 공구에 작용하는 압력값이 전체적으로 펀치접촉면(p_{n1}), 컨테이너부(p_{n2}) 및 다이 슬더부(p_{n3})의 접촉면에서 유한요소 해석으로부터 구한 압력보다 조금 큰 값을 보인다. 또한 각 접촉면에 작용하는 하중은 상계치를 보인다.

Table 2 The pressure for the extrusion

	FEM [A]	U.B. Sol. [B]	(B-A)/B (%)
p_{n1}	0.8490 (min.)	2.3853	64.41
	2.0907 (max.)	2.3853	12.35
p_{n2}	1.0529 (min.)	2.3757	55.68
	1.9555 (max.)	2.3757	17.69
p_{n3}	1.9245 (min.)	2.9687	35.17
	3.1254 (max.)	2.9687	-5.278

Table 3 Process variables of forward extrusion

Process Variables	Value
r_1	10mm
r_2	20mm
z_1	10mm
z_2	20mm
β	45°
m	0.1

4.2 압출비의 변화

상계해로부터 얻어진 금형과 접촉면에서의 압력식인 식(34)~(36)을 이용하여 압출비(R) 변화에 따른 금형 접촉면에서의 상대압력(relative pressure)의 변화를 Fig. 5에 나타낸다.

압출반각이 45° 이고 빌렛 길이가 초기 빌렛 직경과 같은 경우, 압출비가 증가함에 따라 다이 슬더부의 상대압력은 감소하다가 다시 증가함을 알 수 있고 펀치 상대압력과 금형 컨테이너부의 벽면의 상대압력은 압출비가 커질수록 증가하는 것을 알 수 있다. 압출반각이 같은 경우, 압출비가 커질수록 펀치압력과 금형 벽면의 접촉압력이 크게 증가하는 것을 알 수 있다.

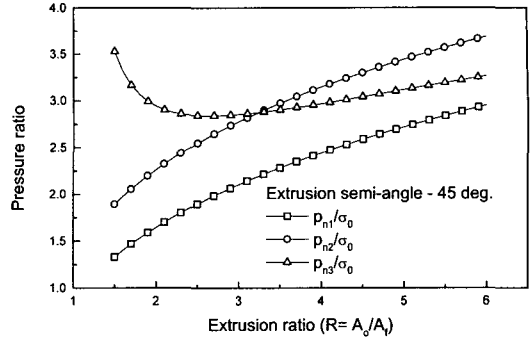


Fig. 5 Effect of extrusion ratio

4.3 압출반각의 변화

압출반각의 변화에 따른 금형의 접촉면에서 상대압력의 변화를 Fig. 6에 나타낸다. 압출비(R)가 2이고 빌렛 길이가 초기 빌렛 직경과 같은 경우, 압출반각이 증가하면 금형 접촉면의 상대압력은 감소하다가 증가하는 것을 알 수 있다.

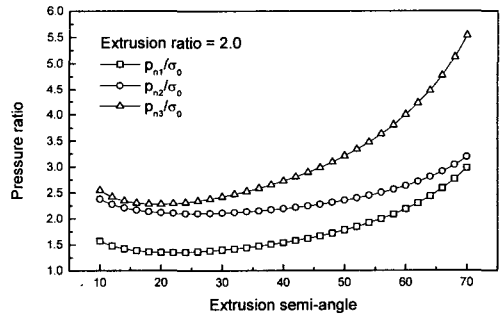


Fig. 6 Effect of extrusion semi-angle

펀치압력이 최소인 경우는 22°이고 컨테이너부가 최소인 경우는 25°이며 다이 슬더부의 압력이 최소인 경우는 19°로 나타났다.

4.4 최적 다이반각

압출비에 따른 펀치, 컨테이너부, 다이 슬더부의 압력이 최소가 되는 압출반각을 Fig. 7에 나타낸다. 압출비가 커질수록 최적다이반각은 증가하지만 증가량은 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 컨테이너부의 압력을 최소로 한 설계가 다른 부분의 압력으로 설계한 경우에 비해 최적 다이반각이 크다는 것을 알 수 있다.

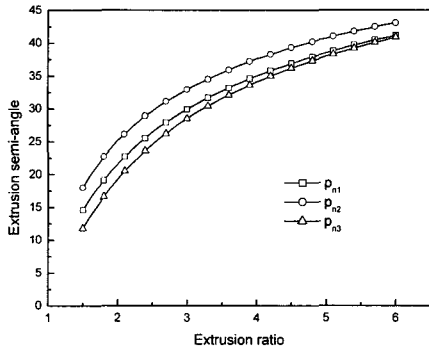


Fig. 7 Optimal extrusion semi-angle according to extrusion ratio

5. 결론

본 연구에서는 상계해를 이용하여 축대칭 압출에서 금형에 작용하는 접촉압력을 해석적인 방법으로 결정하고 강소성 유한요소법의 해석 결과와 비교하여 타당성을 검증하였다. 또한 펀치 성형압력과와의 비를 계산하였고 압출비, 압출반각의 변화에 따른 압력비의 변화를 관찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

압출반각이 같은 경우 압출비는 펀치압력과 금형 벽면의 접촉압력이 큰 영향을 미치고 동일한 압출비에서는 압출반각의 변화가 솔더부의 접촉압력에 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다

압출비가 커질수록 최적다이반각은 증가하지만 증가량은 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 컨테이너부의 압력을 최소로 한 설계가 다른 부분의 압력으로 설계한 경우에 비해 최적다이반각이 크다는 것을 알 수 있다.

이와 같이 본 연구에서 제안한 해석적인 기법은 금형설계를 위한 빠른 계산이 가능하고 치수변경이 용이하므로 실용성이 매우 높다.

참고문헌

- Kudo, H., "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion - I, II, III," *Int J. of Mech Sci*, 1, pp.57-368, 1960.
- Kiuchi, M. and Shigeta, S., "Application of Upper Bound Elemental Technique (UBET) to Asymmetric Forging Process," *J. of Jap. Soc. Technol. Plas.*, 22(251), pp. 1208-1214, 1981.
- Avitzur, B., *Metal Forming: Processes and Analysis*. McGraw-Hill, pp. 52-66, 1968.
- Osman, F. H. and Bramly, A. N., "Metal Flow Prediction in Forging and Extrusion Using UBET," *Proc. 20th. MTD R conference, Birmingham, UK*, pp. 51-59, 1979.
- Yang, D. Y., Kim, J. H. and Lim, C. K., "An Arbitrarily Inclined Triangular UBET Element and Its Application to Combined Forging," *J of Eng. Ind. Trans. of the ASME*, Vol. 107, pp. 134-140, 1985.
- Choi, J. C., Choi, Y., Hur, K. D. and Kim, C. H., "A study on the forging of spur gears," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 38, No. 12, pp. 1333-1347, 1996.
- Choi, J. C., Choi, Y., Tak, S. J. and Kim, K. K., "A Study on the Cold Forging Process of Spur Gears," *J. of KSPE*, 14, 12, pp. 105-113, 1997.
- Choi, J. C., Choi, Y. and Tak, S. J., "The forging of helical gears (I): experiments and upper-bound analysis," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 4, pp. 325-337, 1998.
- Kiuchi, M. and Murata, Y., "Simulation of Contact Pressure Distribution on Tool Surface by UBET," *Proc. 21st. MTD R conference, Swansea*, pp. 13-20, 1980.
- Christensen, P., Bay, N., Bramley, A. N. and Osman, F. H., "Calculation of Local Surface Stresses in Drop Forging Using UBET," *Proc. 14th NAMRC, Minneapolis, USA*, pp. 336-293, 1986.
- Hur, K. D., Choi, Y. and Choi, I. K., "A Study on the Drawing of Strip by Upper Bound Elemental Technique," *J. of the Korean Society for Technology of Plasticity*, 12, 1, pp. 11-17, 2003.
- Choi, Y., Yeo, H. T. and Hur, K. D., "Upper Bound Analysis of Pressure Applied on a Tool for Metal Forming," *Int. J. of Mechanical Sciences*, 2004. (투고중)
- Prager, W. and Hodge, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Chapman and Hall, London, 1951.
- DEFORM-2D Version 7.0 Labs Manual.