

연속계 Deadbeat제어를 적용한 도립진자 제어

(Control of Inverted Pendulum Using Continuous Time Deadbeat Control)

김성열 · 이금원*

(Seung-Youal Kim · Keum-Won Lee)

요 약

점근특성 때문에 deadbeat제어는 연속계시스템에는 거의 적용이 불가능하다. 그러나 지연요소법은 이런 문제를 해결할 수 있다. 지연요소법외에도 잘 알려진 디지털 deadbeat제어가 평활요소를 추가하여 사용될 수 있다.

본 논문에서는 2차 평활요소를 디지털 deadbeat제어기에 사용한다. 그리고 이 요소는 플랜트에 확장되고 따라서 확장된 시스템을 디지털제어하게 된다. 이 제어시스템을 Matlab언어를 사용하여 회전형 도립진자 시스템에 적용하여 시뮬레이션한다.

Abstract

Due to the asymptotic property, deadbeat control can hardly be applied to the continuous time system control. But some delay element method can deal such a problem. Besides delay element method, well-known digital deadbeat control can be used by the aid of some smoothing elements.

In this paper, 2nd order smoothing element is used for the smoothing of the digital deadbeat controller. And this element is argumented to the plant, and so control problem is to control digitally the argumented system. We simulated this control system using Matlab language and finally apply this algorithm to the rotary inverted pendulum system.

Key Words : Continuous-time Deadbeat Controller, Smoothing elements, Inverted Pendulum, Pole Placement

1. 서 론

디지털시스템에 일반적으로 잘 알려져 있는 deadbeat제어기는 연속계에서는 점근성 때문에 직접 적용하기가 어렵고 따라서 만일 연속계에 적용을

하려면 지연요소 등 특별한 개념을 사용하여 해결방법을 찾아야 하며, 특히 일본에서 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다[1,2].

이런 지연요소를 이용하는 방법외에도 디지털 deadbeat제어를 사용할 수도 있는데, 즉 우선 설계가 용이한 디지털 형태의 제어기를 만들고 제어기 출력단에 저차의 평활요소를 두면 아날로그 유한정정제어 효과를 나타낼 수 있다. 이 평활요소는 제어기의 출력단도 되지만 플랜트의 입력단도 되기 때문

* 주저자 : 관동대학교 IT학부 교수
Tel : 033-670-3396, Fax : 033-670-3409

E-mail : kwlee@kd.ac.kr
접수일자 : 2004년 7월 9일
1차심사 : 2004년 7월 13일, 2차심사 : 2004년 8월 31일
심사완료 : 2004년 10월 21일

에 플랜트의 입력단으로 볼 경우 확대계라고 할 수 있으며 이 확대계에 대한 연속계 deadbeat 제어장치를 설계하고, S/W적인 계산에 따라 얻은 이산치 조작량을 평활하여 만든 연속조작량을 제어대상에 부가한다면, 샘플치계와 융합으로 연속시간 deadbeat 제어기가 용이하게 실현된다[3~9]. 참고문헌에서는 이 연속시간 제어기를 CDBC (Continuous time DeadBeat Controller)라고 부르기도 한다.

본 논문에는 상태귀환 루프에 디지털 형태로 보상기를 구성한 디지털 deadbeat제어기의 설계법을 연구한다. 특히 디지털 형태의 조작량에 ZOH를 인가하고 이의 출력이 평활요소로 사용된 2차 평활요소에 입력된다. 대상 플랜트로는 4차의 로터리형의 도입진자를 사용하였으며, 4차의 극중에서 우반면에 존재하는 극은 극배치법을 이용하여 좌반면에 위치시켰다[10]. 이때의 새로 만든 플랜트와 2차 평활요소를 확대계라 정의한다. 디지털 deadbeat제어기는 펄스열전달함수를 사용하여 제어기로 구성한다. DC 모터를 사용한 도입진자를 대상으로 Matlab 언어를 사용하여 시뮬레이션한다.

2. 본 론

2.1 연속 시간 파라미터

연속계 deadbeat 제어량을 얻기 위해서는 여러 가지 방법이 연구되고 있는데, 예들 들면 다항식접근법이 있지만 본 연구에서는 제어분야에서 잘 알려져 있는 표준형의 2차 지연요소를 평활요소로 사용한다 [3,5,6].

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (1)$$

여기서 ζ 는 감쇄인자이고, w_n 은 고유주파수이다.

2.2 문제의 설정

그림 1의 제어시스템 블록도에서 연속계 deadbeat 제어기를 설계하기 위해 상태 귀환 루프중

에 $D_F(z)$ 를 도입하고, $D_f(z)$ 는 직렬 보상기로 확대계 $G(s) = G_1(s)G'(s)$ 에 대한 스텝상 목표치 r 로 한 1형의 디지털 deadbeat 제어기 형태를 만든다. f 는 귀환요소에 대한 이득에 해당된다.

디지털 제어입력 \bar{u}_i 는 최적의 의미를 갖고 있는데, Q, R 을 정정대칭인 $(N+1) \times (N+1)$ 하중행렬로 한 경우, 편차와 조작량에 관한 최소화할 2차 평가함수는

$$P = \frac{1}{2} (e^T Q e + u^T R u) \quad (2)$$

를 최소화하는 조작량에 해당된다.

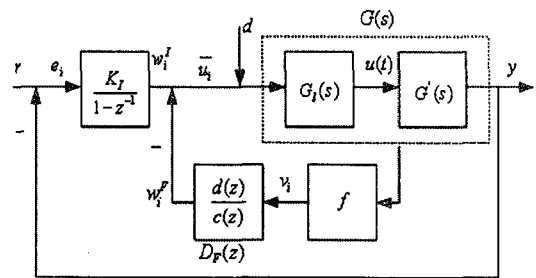


그림 1. CDBC 시스템의 블록도
Fig. 1. Block diagram of CDBC system

이에 따라 구한 \bar{u}_i 에 대해 $y = G\bar{u}_i$ 가 출력이 되며 따라서 이를 폐루프의 요구응답으로 하고, 이 최적 \bar{u}_i 값이 나오도록 귀환루프상에 있는 귀환 보상기 $D_F(z)$ 와 전향경로상에 있는 적분 보상기 $D_f(z)$ 를 구한다.

3. 연속계 deadbeat 제어기의 설계

3.1 제어기 유도

디지털 deadbeat 제어기의 유한정정되기 직전까지의 제어단수를 N , 플랜트의 차수를 n 2차평활요소를 2차로 하고, 추가자유도를 k 로 한다.

일반적으로 작은 N 의 경우는 큰 값의 제어량이 계산되어 나오는 경향이 있기 때문에 설계자가 취사선택을 해야 한다.

연속계 Deadbeat제어를 적용한 도립진자 제어

따라서 $N = n + 2 + k (k \geq 0)$, $u_i (i = 0 \sim N - 1)$ 의 조작량으로 출력응답 $y_i (i \geq 1)$ 이, N 단 이후 단위계 단상 목표치에 유한정정된다는 것은 $y_i = 1.0 (i \geq N)$, $u_{N+\sigma} = u_N (\sigma \geq 1)$ 가 된다는 의미이다. 따라서 이 조건을 사용하여 입출력에 관해 식을 세우면 다음과 같다.

$$i = J_k u_k \quad (3)$$

단, $u_k = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_N]$

$$J_k = \begin{bmatrix} g_N & g_{N-1} & \dots & g_{n+3} & g_{n+2} & \dots & g_1 & 0 \\ g_{N+1} & g_N & \dots & g_{n+4} & g_{n+3} & \dots & g_2 & h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{N+n+2} & g_{N+n+1} & \dots & g_{2n+5} & g_{2n+4} & \dots & g_{n+3} & h_{n+2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

← k → (n+3) →

여기서 g_i 는 임펄스응답열이며, $g_i = h_i - h_{i-1}$ 로서 h_i 는 계단응답열이다. 즉 본 논문에서 대상으로 하는 도립진자의 전달함수의 임펄스응답열이 식 (4)에 포함되어 있는 셈이다. 한편 $y_i (i = N \sim N + n + 2)$ 에 대해서는 유한정정을 하여야하므로

$$i = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (5)$$

최단시간 연속계 deadbeat제어 ($k=0$)의 경우 식 (4)와 $(n+3) \times (n+3)$ 행렬과 식(5)로부터

$$u_0 = J_0^{-1} i = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{n+2}] \quad (6)$$

여기서 $k \geq 1$ 의 경우는 (4)로부터 $rank J_k \neq n + 3$ 이어서 u_k 는 유일하게 결정되지 않기 때문에, 식(5)로부터 $i - J_k u_k = 0$ 의 구속조건을 사용하여 Lagrange미정계수법을 이용하여 다음과 같이 구한다[8].

$$u_k = M^{-1} [G^T Q_r - J_k^T [J_k M^{-1} J_k^T]^{-1} [J_k M^{-1} G^T Q_r - i]] = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_N]^T \quad (7)$$

단, $M = [R + G^T Q G]$, $i_r = [1 \ \dots \ 1]^T$

3.2 제어기 설계

제어기를 그림 1의 블록도에서 스텝상 목표치로 r 를 선택하고, 전체적으로는 1형의 디지털 최적 연속계 deadbeat 제어기를 설계한다.

보상기 $D_F(z)$ 와 귀환이득 $f_i (i = 1 \sim (n + 2))$ 는

$$\begin{aligned} D_F(z) &= \frac{d(z)}{c(z)} \\ d(z) &= d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)} \\ c(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{N-1} z^{-(N-1)} \\ f(z) &= f_1 z^{-1} + \dots + d_{n+2} z^{-(n+2)} \end{aligned} \quad (8)$$

와 같이 둘 수 있으며, 그림 1에서 $i=0$ 이면, 보상기의 초기치가 '0'이 된다. 여기서 $w'_0 = \overline{u_0}$ 가 되므로, 적분기 $D_I(z)$ 의 이득 $K_I = \overline{u_0}$ 와 같이 둘 수 있다. 또 스텝입력에 대한 폐루프계의 응답은

$$\overline{y}(z) = \overline{u_0}(z) \overline{b}(z) / (1 - z^{-1}) \quad (9)$$

이며, 이 과정 중에서 분모에 나타나는 항 중에서

$$(1 - z^{-1})(1 + \overline{a}(z) + d(z)f(z)) + \overline{u_0} \overline{b}(z) = 1 \quad (10)$$

라고 두면 이 조건이 유한정정조건이 되어, 식(9)로 간략하게 되었다[3]. 식(10)에서 \overline{a} , \overline{b} 는 상수항=0이고 z^{-N} 항까지만 항이 있는 다항식이다. 따라서 관련항식을 얻기 위하여, 예를 들면 $n=2, N=5$ 경우 식(10)의 z^{-1} 의 멱승 즉, z^{-1} 부터 z^{-9} 까지의 계수에 대한 방정식을 세우면

$$\begin{aligned} (\overline{a_1} - 1) + d_0 f_1 + \overline{u_0} \overline{b_1} &= 0 \\ (\overline{a_2} - \overline{a_1}) + (d_0 f_2 + d_1 f_1 - d_0 f_1) + \overline{u_0} \overline{b_2} &= 0 \\ (\overline{a_3} - \overline{a_2}) + (d_0 f_3 + d_1 f_2 + d_2 f_1 - d_0 f_3 - d_1 f_2 - d_2 f_1) + \overline{u_0} \overline{b_3} &= 0 \\ (\overline{a_4} - \overline{a_3}) + (d_0 f_4 + d_1 f_3 + d_2 f_2 + d_3 f_1 - d_0 f_4 - d_1 f_3 - d_2 f_2) + \overline{u_0} \overline{b_4} &= 0 \\ (\overline{a_5} - \overline{a_4}) + (d_1 f_4 + d_2 f_3 + d_3 f_2 + d_4 f_1 - d_0 f_4 - d_1 f_3 - d_2 f_2 - d_3 f_1) + \overline{u_0} \overline{b_5} &= 0 \\ -\overline{a_5} + (d_2 f_4 + d_3 f_3 + d_4 f_2 - d_1 f_4 - d_2 f_3 - d_3 f_2 - d_4 f_1) &= 0 \\ d_3 f_4 + d_4 f_3 - d_2 f_4 - d_3 f_3 - d_4 f_2 &= 0 \\ d_4 f_4 - d_3 f_4 - d_4 f_3 &= 0 \\ -d_4 f_4 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

가 된다. 식(11)을 보면 $d_i \neq 0$ 이기 때문에 $f_2, f_3, f_4 = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $D_F(z)$ 을 펄스열 전달함수로

$$D_F(z) = \frac{(w_1^F z^{-1} + \dots + w_{N-1}^F z^{-(N-1)} + w_N^F z^{-N}) / (1-z^{-1})}{(v_1 z^{-1} + \dots + v_{N-1} z^{-(N-1)} + v_N z^{-N}) / (1-z^{-1})} = z^{-1} \frac{1}{v_1} \{ w_1^F + (w_2^F - w_1^F)z^{-1} + \dots + (w_N^F - w_{N-1}^F)z^{-(N-1)} \} \quad (12)$$

와 같이 변형하고 이 식의 z^{-1} 의 멱승의 계수들과 w_i^F 과의 관계, w_i^F 와 y_i , u_0 의 관계 등의 비교식을 통하여[8] 최종적으로

$$w_i^F = \overline{u_0} \left((i+1) - \sum_{j=1}^i y_j \right) - \overline{u_i}, y_i = \overline{u_0} \sum_{j=1}^i \overline{b_j}, f_1 = \frac{1}{\overline{u_0}} \quad v_1 = f_1 \overline{u_0} \quad (13)$$

을 얻어서 $D_F(z)$ 을 구한다.

4. 회전형 도립진자 시스템의 모델링

Rotary Inverted Pendulum의 구성은 그림 2와 같다. 펜들럼의 각도와 위치 측정은 각각 1024(Pulse)와 2000(Pulse)의 분해능을 가진 엔코더를 사용하였다.

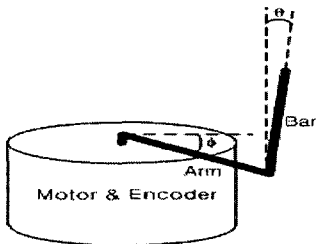


그림 2. 회전형 도립진자
Fig. 2. Rotary Inverted Pendulum

펜들럼의 모델은 다음과 같이 에너지법칙으로 단순화하여 나타낸다[11].

$$PE_{total} = m_b g \frac{l}{2} \cos \theta \quad (14)$$

$$KE_{total} = \frac{1}{2} [J_t \dot{\phi}^2 + m_b l^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + (J_b + J_\omega) \dot{\theta}^2] \quad (15)$$

여기에서 $J_t = J_{Arm} + m_b r^2 + J_m + J_\alpha$ 이고, 위의 단순화되어진 식을 Lagrangian 공식을 이용하여 다음과 같이 시스템의 미분방정식을 얻을 수 있다[11].

$$T = J_t \ddot{\phi} - \frac{1}{2} m_b l^2 (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (16)$$

$$0 = \frac{1}{2} m_b l^2 \ddot{\phi} \cos \theta - m_b g \frac{l}{2} \sin \theta + (J_b + J_\omega) \ddot{\theta} \quad (17)$$

여기서 $\theta=0, \sin \theta=\theta, \dot{\theta}=0$ 의 근사값을 사용하여 식(16) 및 식(17)을 선형화한후 전달함수를 구하면

$$G(s) = \frac{-8.053s^2}{s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600} \quad (18)$$

과 같다.

5. 시뮬레이션 및 실험결과 고찰

5.1 시뮬레이션(CDBC)

도립진자는 원천적으로 불안정하여 극배치 알고리즘을 사용하여 극을 $(-2 \pm 3.464j, -10, -10)$ 로 재배치 한 후 평활요소를 전치한 확장된 시스템을 플랜트로 하면 전체적인 확대계는

$$G(s) = \frac{w_n^2 (-8.053s^2)}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600)} \quad (19)$$

이다. 그림 3은 이를 사용하여 초기조건 $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 으로 움직이는 도립진자를 대상으로 최단시간인 6단에 정정하기 위한 제어입력 u_0 는 구하면 다음과 같이하여 1샘플이후 인가된다.

$$u_0 = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T = [403.5 \ -403.8 \ -82.8234 \ 9.9 \ -94.08 \ 9.9 \ -1.9] \quad (20)$$

연속계 Deadbeat제어를 적용한 도립진자 제어

그림 3은 도립진자모델을 사용한 시뮬레이션 결과이다. 샘플링타임을 0.125초로 하고 첫 번째 샘플 이후에 제어입력이 인가되므로 $(0.125\text{초/단}) * (6\text{단} + 1\text{단}) = 0.875\text{초}$ 근처에서 정정됨을 보여주고 있다.

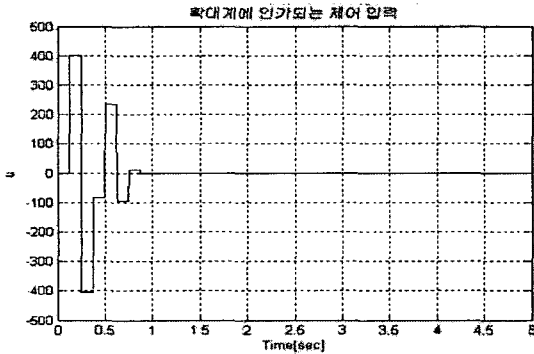


그림 3. 확대계에 인가되는 디지털제어 입력
Fig. 3. Digital control input applied to augmented system

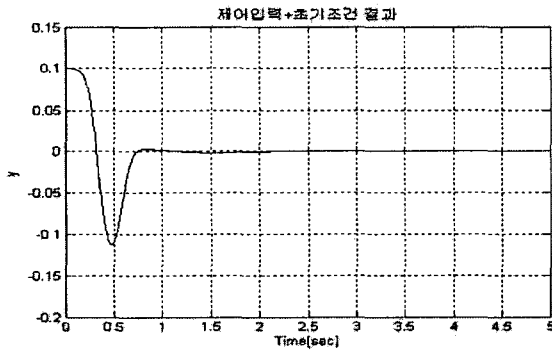


그림 4. 플랜트 출력 (θ)
Fig. 4. Plant output (θ)

5.2 실험(LQR제어)

CDBC의 전단계로 LQR제어를 사용한 실험에 대해 기술한다. 실험은 8051을 사용하여 하였으며, LQR제어를 얻기 위해 사용한 상태 및 제어입력에 대한 가중행렬 Q, R 과 결과적으로 얻은 제어입력 K 는

$$Q = \text{diag}(0.025, 8, 0, 0, 0), R = 0.004 \quad (21)$$

$$K = [-2.50 \quad -64.51 \quad -2.63 \quad -7.97]$$

와 같으며 도립된 진자는 그림 5이고, LS7166 2개가 각각 θ, ϕ 를 측정하기 위해 상단에 위치한 회로도는 그림 6이다.



그림 5. 실험시스템(LQR이용 도립)
Fig. 5. Experimental system(inverting using LQR)

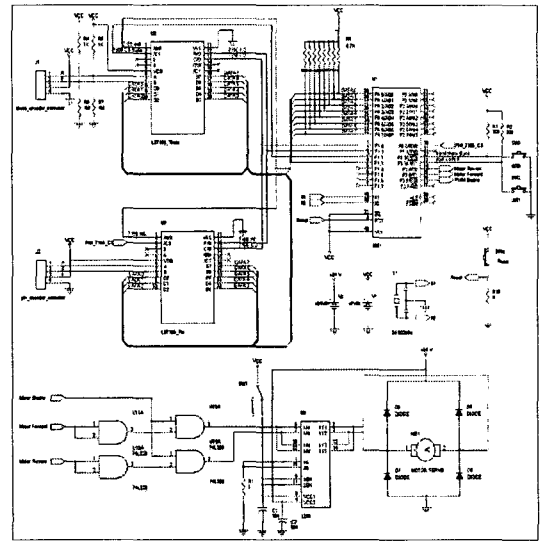


그림 6. 회로도
Fig. 6. Circuit diagram

6. 결 론

제어대상으로 도립진자를 선택하고 입력단에 전치한 평활요소를 2차 지연요소로 하는 연속계 deadbeat 제어기 설계법에 관한 연구를 하였다. 제어기로는 상태귀환루프 및 전향경로상에 보상기를

도입했다. 특히 도립진자는 우반면에 불안정한 극을 2개 갖는데, 극배치를 통하여 좌반면으로 재배치한 후 이를 확대계로 적용하였다. 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 디지털 유한정정제어에서 2차 지연요소의 결과가 급격한 곡선의 변화가 없는 양호한 연속조작량을 얻는 것을 보였다. 특히 외란이 존재하는 경우에 대해 전체 단수에 따라 정정됨을 보였다.

따라서 종래의 디지털 제어장치의 설계법을 이용도 하고 아날로그 지연요소만을 사용하여 생기는 회로의 복잡성도 피할 수 있으며 실제의 도립진자를 플랜트로 하여 적용함에 있어 CDBC의 실용성이 증명되었다. 현재 CDBC 도립진자 실험이 진행중이며, 이때 생기는 파라메타의 변동에 대한 견실성 해석이 필요하다. LQR제어는 도립에는 성공하였으며, 본 CDBC제어를 실현중에 있으며, 아울러 Swing-up제어도 추가중에 있다.

References

- [1] Ryoichi K., "Design of Continuous Deadbeat Control," Tr-SICE, Vol. 28, No.6, pp680-689, 1992.
- [2] Eitaku N., Seiichi S. and Toshiyuki K., "Design of Continuous Deadbeat Tracking Ssystems," Tr-SICE, Vol.28, No.10, p1201-1208, 1992.
- [3] Hiroshi MI and Yoshiharu H., "A Design Method of Continuous Deadbeat Control System," T. IEE Japan, Vol.117-C, No.8, pp.1107- 1112, 1997.
- [4] Ryouta S. and Hiroshi M., "A Design Method of Optimal Deadbeat Servosystem and Regulator," T. IEE Japan, Vol.117-C, No.2, pp.117-127, 1997.
- [5] E. Nobuyama et. al., "Design of Continuous Deadbeat Tracking Systems," T-SICE, Vol.28, No.10, pp1201-1208, 1992.
- [6] Hiroshi M. et. al. "Design of Deadbeat Controller by Using Serial Feedback Compensation," T-SICE, Vol 20, No. 10, pp873-879,1984.
- [7] Hiroshi M. et. al., "Design of Optimal Deadbeat Controller by Using State Feedback," T. IEE Japan, Vol. 109, No. 6, pp.432 - 438, 1996.
- [8] Mitsuru O., Yumi. O, Shinichiro. W. and Hiroshi M, "A Design Method of Optimal Continuous Deadbeat Controller by Using Second Delay Element," T. IEE Japan, Vol.118-C, No.5, pp765-772, 1998.
- [9] Miyahara et al., "Digital deadbeat control of motor," Nat. Conf. I.E.E., Japan, No. 601, 1981.
- [10] Furuta, K., Kajiwara, H. and Kosuge, K., "Digital Control of a Double Inverted Pendulum on an Inclined Rail," Int. J.Control, Vol.32, No.5, pp. 907-924, 1980.
- [11] Astrom, K.J. and K. Furuta. "Swinging Up A pendulum By Energy Control." IFAC 13th. World Congress, San Francisco, California. 1996.

◇ 저자소개 ◇

김성열 (金成烈)

1973년 10월 4일생. 2001년 관동대학교 전자공학과 졸업. 2003년 관동대학교 전자공학과 졸업(석사). 현재 관동대학교 전자공학과 박사과정 재학 중.

이금원 (李金原)

1958년 10월 28일생. 1982년 한양대학교 전자공학과 졸업. 1984년 한양대학교 전자공학과 졸업(석사). 1992년 한양대학교 전자공학과 졸업(박사). 1992년~현재 관동대학교 IT학부 교수.