한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 133-152

개혁 미분 방정식 수업에 기반한 학습자의 고유치 고유벡터 개념 발생 및 이해*

이화여자대학교 수학교육과 신경희
skh@ewha.ac.kr

18세기 오일러와 베르누이에 의해 최초로 등장했던 고유치의 개념 발생의 장은 탄성을 가진 물체의 변위에 관련된 미분 방정식의 풀이 해법 문제였다. 역사 발생적 원리에 따라 용수철에 매달린 물체의 변위 문제를 모델로 개혁 미분 방정식 수업에 기반한 학습자의 고유치 고유벡터의 효과적인 개념 발생의 가능성을 논한다. 소그룹 토의 학습으로 진행된 교수 학습 모델의 실제 적용 과정과 방법, 효과적인 인지변화에 대한 교수학적 요인과 학생들의 수학에 대한 정의적 태도의 변화를 진술한다.

주제어 : 고유치, 고유벡터, 역사 발생적 원리, 수학적 모델링, 소그룹 토의 학습

0. 서언

대부분의 수학자들은 수학에서의 공리적 구조의 전개나 그의 유용성에 대해서 공감한다. 하지만 이러한 형식적인 공리적 구조의 특성 때문에 그것을 배우려는 학생들에게는 그것이 갖고 있는 개념의 의미를 파악하기가 쉽지 않다. 오히려 한 개념을 학습하려는 학생들에게 학습 장애가 되고 있다. 대수적 계산에 익숙한 학생들이 그 것이 의미하는 구체적 상황이나 시각적 맥락을 이해한다고 할 수는 없다.

고유치(eigen value)와 고유벡터(eigen vector)는 많은 물리적 상황의 문제를 풀 때 자연적으로 발생한다. 탄성을 가진 물체의 운동, 마르코프(Markov) 문제, 레슬리(Leslie) 인구 모델, 용수철의 진동 문제, 현이나 악기 진동의 주파수 문제, 천문학, 통계 문제 등 그 응용 범위는 실로 광범위하다. 때문에 대학에서의 자연계열이나 이공계 사회과학 계열 대부분 학생들에게 이의 학습은 필수적이다.

대부분의 학생들은 고유치, 고유벡터를 대학 1학년 또는 2학년 첫 학기에 선형대수 과목을 통하여 학습하게 된다. 대부분 두 용어의 공리적 접근의 정의와 이어지는 대

* 이 연구는 2003학년도 이화여자대학교 교내연구과제 지원에 의한 연구임.

수적 계산 그리고 행렬의 대각화에 고유치가 사용된다는 몇 개의 예제와 정리를 끝으로 한 학기를 마치게 된다. 이러한 학습의 결과는 학생들로 하여금 분명한 개념 인식을 어렵게 하고 그 개념이 갖고 있는 문제 상황을 파악하지 못하여 실제 필요한 고유치 고유벡터의 가치를 전혀 알 수가 없다. 이는 실제 발생할 수 있는 문제 해결의 과정에서 창의적인 사고의 저해를 가져올 우려가 있다.

본 연구는 대학에서 개혁 미분 방정식 수업을 통한 교수 실험으로 연립미분 방정식의 해함수를 컴퓨터의 함수모델을 이용하여 학생들의 유의미한 개념 발생이 가능한 예를 제시하고 있다. 연립 미분 방정식에서 역사 발생적 교수 학습 원리와 RME (Realistic Mathematics Education)에 기반한 과제와 소그룹 토의학습을 통해 고유치 고유벡터의 개념 발생 촉진이 어떻게 가능한 가를 규명한 것이다. 개념의 구조를 충실히 반영한 정신적 표상이나 정신 모델을 갖는 것은 그것이 의미하는 자연 현상을 이해함을 뜻하며 폭넓은 응용을 전개할 수 있다. 이러한 학습의 결과로 학생들의 효과적인 인지 변화가 가능했다면 그의 교수학적 요인과, 아울러 교수학습 과정과 방법, 수행의 결과로 얻어진 학생들의 수학에 대한 정의적 태도 변화를 분석했다.

과제를 통하여 학생들의 수학적 재발명을 효과적으로 유도하기 위해서는 그 개념이 발생되어 온 역사를 음미하는 것이 필수이다. 최적의 학습의 장을 연출하기 위한 첫 번째의 작업으로 먼저 고유치 고유벡터의 개념 발생의 역사적 근원을 살펴보고, 대학수학 교수 학습에서 고유치 고유벡터의 전개와 그 흐름을 논한다. 이는 학생들이 교실 현장에서 개념을 만들어가는 과정을 이해하는 첫 번째 이유이며, 보다 효과적인 교수 학습의 장을 디자인 할 수 있는 발판을 제공한다.

1. 고유치 고유벡터의 역사 개관

수학적 한 개념에 대한 역사 발달에 대한 지식은 교수나 학생들에게 좀더 나은 이해의 장을 열어 주는 것이고 공리적 접근이라는 뼈대에 적당한 살을 붙여주는 효과를 갖게 한다[12]. 벡터공간에 대한 대수적이고 기하적 연결의 복잡성을 이해하기 위하여 역사적 배경의 학습은 필수적이다. 하지만 고유치와 고유벡터를 포함하고 있는 행렬론은 오늘날 고등 수학 교육에서 차지하고 있는 중요성에 비해 그 역사에 대한 기록은 놀랍게도 단편적으로 밖에 남아있지 않다[15].

1) 고유치 고유벡터의 발생사

현대 개념의 벡터공간의 공리적 접근을 최초로 시도한 페아노(Peano)는 1888년 n 개의 변수를 갖는 1계 선형 연립 방정식의 해를 구하는 과정에서 처음으로 고유치를 언급하였다[12].

하지만 고유치와 비슷한 개념의 사용은 훨씬 이전으로 거슬러 올라간다. 1734년 오일러와 베르누이는 탄성을 가진 막대의 변위 문제를 계수가 4인 특수 미분 방정식으로 나타내고 그의 해법에 관한 연구를 독립적으로 하게된다. 이러한 탄성체의 문제는 오일러가 상수 계수를 갖는 선형 미분 방정식의 수학적 문제의 일반적 해결 방안에 대해 생각하게 하는 계기를 마련하였다. 그 당시 논문에서 오일러는 상수 계수를 갖는 다음 동차 미분 방정식의 일반해에 대해 언급하고 있다.

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots + L\frac{d^ny}{dx^n}$$

n개의 임의 상수와 n개의 특수해의 합으로 일반해를 표현할 수 있고 한 특수해는 다음과 같이 표현된다.

$$y = \exp[\int r\,dx]$$

여기서 상수 r은 다음 방정식로부터 구할 수 있다[18].

$$A + Br + Cr^2 + \cdots + Lr^n = 0$$

방정식의 근이 중근이나 복소수 근일 때의 해함수도 구체적으로 제시하고 있는데, 요즘 미분방정식 해법도 오일러 방법 그대로 이용하고 있다. 오일러는 이 방정식을 특성방정식(characteristic equation) 또는 보조 방정식이라 부르고, 근 r을 특성근(characteristic root, characteristic value)1)이라고 정의하고 있다. 이 r은 현재의 고유치와 비슷한 개념으로 라그랑주(Lagrange)나 라플라스(Laplace)도 같은 용어를 사용하고 있다. 대부분의 역사의 진술은 오일러의 'characteristic root'를 오늘날 고유치의 시초로 기록하고 있다.

원뿔 곡선과 이차 곡면의 방정식을 주축(principal axes)2)의 방향을 바꾸어 좀더 간단한 형태로 변환하고자하는 문제는 18세기에 처음 도입되었다. 1826년 코시(Cauchy)는 방정식의 표준형에서 각 항의 부호에 따른 이차 곡면의 형태를 분류하였고, 실베스터(Sylvester)는 n개의 변수를 갖는 이차 동차식과 관성의 법칙과의 관계를 설명하였다. 동차식에서 이차항의 부호문제는 야코비(Jacobi)와 가우스(Gauss)까지 이어졌으며 특히 가우스는 특성방정식을 행렬식으로 표현하였다. 19세기 중반까지 이차 동차식은 다음과 같은 형태였다.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

1) 특성근이라는 용어는 latent root로 다시 오늘날의 eigen value로 바뀐다.
2) 주축에 있는 벡터들은 미분 방정식의 해함수 중에서 직선해의 벡터들과 일치하며 eigen vector와 같은 개념을 갖는다[5].

그러나 그 이후 다음과 같은 식으로 대체되었다.

$$a_{11}x_1^{\ 2}+a_{22}x_2^{\ 2}+a_{33}x_3^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

이 식의 특성 방정식으로 다음을 사용하기 시작했다.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

그리고 가우스도 이 λ를 특성근(characteristic root) 또는 잠재근(latent root)이라 정의하였다. 여기서 λ는 주축의 늘거나 줄어든 길이의 상황을 알 수 있는 값이다[18].

18세기 중반, 달랑베르(Jean d'Alembert)와 라그랑주(Lagrange)는 그 당시 알려진 여섯 개의 행성의 운동을 표현한 연립 상미분 방정식의 해를 구하는 과정에서 여러 이론을 발견하고, 행렬론의 기초를 세우기 시작하였다. 적당한 좌표계에서 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 이용하여 라그랑주와 라플라스는 미분 방정식의 해를 간단한 형태로 취할 수 있음을 보였는데 이는 특성 방정식 $|C^2-\lambda I|=0$의 잠재근(latent root) λ와 벡터의 새로운 개념을 얻게 되는 계기가 되었다. 이때 행렬 C의 원소는 방정식의 계수들이고 잠재근은 오늘날의 고유치와 같은 개념으로 쓰인 듯하다. 하지만 이때의 행렬론은 현대의 것과 거리가 있었다.

천문학의 관점으로 재해석하고 뉴턴 방정식을 풀면서 모든 개념은 확장되었고, 가우스는 1801년 발표한 논문에서 직사각형 형태의 수들의 배열로 동차식의 계수를 표현했으며, 1802년경 푸리에(Fourier)는 열 확산 모델의 미분 방정식에서 행렬 도입을 시도하였다. 1829년 코시는 n개의 변수를 갖는 이차 동차식의 계수를 표현하는 데 행렬과 그의 잠재근을 사용하였고 그와 같이 연구하였던 슈투름(J.C.F. Sturm)은 연립 미분 방정식의 해를 구하는 과정에서 행렬 A와 B의 특성방정식 $|A-\lambda B|=0$의 근인 잠재근의 문제를 일반화하였다[15].

1850년대에 실베스터는 변수가 둘 또는 세 개인 경우의 불변식(Invariant)에 관한 논문을 발표하였다. 이차 동차식 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$이 0이 아닌 값을 가질 때 B^2-AC의 값의 부호에 따라 타원, 포물선, 쌍곡선이 되는데, 특성방정식 $\begin{vmatrix} A-k & B \\ B & C-k \end{vmatrix}=0$의 근들은 이차 동차식이 포물선 형태가 아니라면 축을 회전하면 변형될 수 있는 표준 동차식 $k_1x^2+k_2y^2$에서 x^2과 y^2의 계수가 된다[11]. 이후 크로네커(Kronecker)가 일차변환을, 바이어슈트라스(Weierstrass)가 동차식과 관련된 $|A-\lambda B|$의 행렬식에서 잠재근이 중근일 때를 연구했고 이러한 일련의 연구를 통하여 이론들의 관계가 명확해졌으며 각 개념들이 분명해졌다. 원래의 문제들은 변형되어 새로운 문제들을 만들어냈으며 보다 일반화되었다. 특성 방정식의 잠재근이 다중근일 때

처음 세워진 이론에 오류가 나타났고 이러한 반례에 대한 연구는 의외의 풍성한 결과를 가져다주었다.

벡터 공간에 대한 최초의 공리적 언급은 1888년 페아노(Peano)에 의해서지만, 널리 알려지고 본격적으로 사용된 것은 1920년 이후이다. 30년대에 급속히 발전하여 다양한 분야로 전개되었다. 기존의 수학에 연구 방법과 증명 방법을 다양화하는데 한 몫 했다. 더 나아가 여러 수학 분야를 통합하기도 하고 새로운 발견의 견인차 역할을 하기도 하였다.

닮음행렬(similar matrix)과 잠재근과의 관계, 수직행렬(orthogonal matrix)과 잠재근과의 관계 이론이 정립되었다. 두 행렬이 닮음 관계에 있으면 특성 방정식이 같아지고 따라서 특성근이 일치한다. 한 행렬의 특성근이 서로 다르면 그 행렬은 대각행렬과 닮음의 관계에 있다. 중근이 존재하면 주어진 행렬은 대각화할 수 없다 등의 중요한 정리가 발표되었다.

그 후 이런 행렬론을 담은 책들이 출판되고 각 대학에서 넓게 교육되면서 행렬론은 전문용어가 표준화되고 내용이 다듬어졌다. 순수 영어 표현인 latent root, latent vector는 차츰 쓰지 않게 되었다. 대신 고유치(eigen value), 고유벡터(eigen vector)로 통일되어 사용됐는데 이는 독일어 Eigenwert와 Eigenvektor를 영어로 번역한 것이다.

오늘날의 eigen value가 개념 발생 당시에 '숨어있는', '잠재적인'의 뜻이 있는 'latent value'의 용어를 사용한 것은, 그 만큼 정확한 의미를 파악하기가 쉽지 않다는 것을 말해준다. 주어진 행렬의 고유치를 구하는 것은 대수적으로 간단한 작업이지만 그 값이 의미하는 것을 이해한 학생들은 상대적으로 찾기 힘들다.

본 논문에서는 학생들의 유의미한 개념 발생을 위하여 고유치의 역사 발생의 장으로 교수디자인을 시도하였다. 단순 행렬에서 시작하는 고유치 개념이 아니라, 미분 방정식의 해함수를 이해하는 과정에서 자연스럽게 고유벡터 고유치 개념이 형성될 것이다.

본문에서 언급한 이외에도 여러 수학자들(Grassmann, Cartan, Hilbert, Fredholm, Riesz, Neumann 등)이 고유치와 관련된 연구를 하고 발표를 했지만 본 논문의 의도와는 거리가 있어 그 내용의 언급은 논외로 한다.

2) 고유치 고유벡터의 수학 교육 역사

고유치 고유벡터의 교육의 역사는 행렬에 관한 교육의 역사와 맥을 같이 한다. 행렬에 관한 다양한 내용을 다룬 최초의 책은 1907년 하버드(Harvard)의 교과서로 사용된 보크너(Bochner)의 '고등대수 입문(Introduction to Higher Algebra)'이다. 교과서에서 내용 배열의 순서는 학생들의 수학적 개념 발달의 순서를 결정한다는 의미에서 중요하다. 앞부분에서 학습한 내용은 다음 학습내용의 동기유발을 가능하게 할 뿐 아니라 선험적 기초를 제공한다. 보크너는 이 책을 읽기 위한 예비 지식으로 간단한 다항

식을 다루고, 제 1장부터 행렬식, 선형 방정식과 행렬, 불변식, 쌍대 선형식, 이차 동차식, 다항식 및 기본적인 약수 연산, 이차식의 동치와 분류 등의 순서로 책을 전개했다. 이 순서는 다항식과 동차식에서 행렬과 행렬식의 전개가 가능했던 역사발달과는 순서를 거꾸로 하고 있는 점은 눈여겨볼 만한 대목이다. 하지만 놀랍게도 고유치, 고유벡터등 분광학(spectral theory)에 관련된 내용은 아주 적었다[15]. 그 후 이 책은 독일어로 번역되어 사용되었다.

1913년부터 25년까지 캘커타 대학에서 자신이 강의한 내용을 세 권의 책으로 만들어 '행렬과 행렬식'이라는 제목을 붙인 컬리스(Cullis)는 이 책에서 그때까지 혼용되어 사용되던 용어를 정리하고 표준화하였으며 처음부터 사각 행렬을 강조하였다.

그럼에도 행렬론에 대한 확산과 교육에 대한 속도는 상당히 느렸다. 1930년대에 몇 권의 책이 출판되었지만 50년대에 들어서야 본격적으로 행렬론에 관한 책들이 쏟아져 나왔다. 하지만 이때의 많은 책은 근본적인 동기유발 없이 단순히 기계적 계산에 머무르는 것이 많았다. 초기 보크너의 책의 내용과 비슷한 순서로 전개하였고 행렬의 연산, 행렬식의 계산에 뒤를 이어 고유치 고유벡터를 포함한 분광학, 쌍대 선형식, 이차 동차식 등의 내용이 제일 뒷부분에서 다루어졌다. 이는 앞에서 언급한, 개념의 역사 발생과 역순의 전개를 하고 있는 것이다. 거의 최근까지도 많은 선형대수 교과서는 형식적이고 무의미한 행렬 연산 우선의 전개를 취하고 있고, 이 순서대로 학습하게 되는 학생들에게는 유의미한 개념 발생을 어렵게 하는 직접적 이유가 되고 있다.

역사가들과 수학자들에게 비교적 좋은 책이라는 평판을 듣는 Mirsky[21]의 '선형대수 입문'의 예를 보자. 이 책에는 eigen value와 eigen vector라는 단어는 사용되지 않는다. 대신에 같은 개념의 용어로 characteristic value 혹은 latent value가 소개된다. 이 개념의 전개는 상당히 형식적이어서 행렬과 이차 동차식 이론에 필요한 정의이다라는 언급 외에는 처음 이 개념을 배우게 되는 학생들에게 동기유발이 될 만한 어떤 장치도 고려되지 않았다. 이와 비교되는 책으로는 1957년 발행된 아르틴(Artin)의 저서 'Geometric Algebra'[7]가 있다. 이 책에서는 고유치(eigen value), 고유 벡터(eigen vector) 용어를 사용하며 두 종류의 정의를 주지만 결국은 후자의 전개 방식이 학생들의 개념 발달에 보다 효율적임을 암시한다. 먼저 정방행렬 A와 벡터 X의 곱 AX는 다시 벡터가 되고 관계식 $AX=\lambda X$를 만족하는 수 λ가 존재하면 벡터 X를 고유벡터라고 정의하고 있다. 이것은 대단히 형식적인 도입으로 학생들은 그 의미를 알지 못한 채 단순 계산에만 머물 수밖에 없음을 지적하면서 다음과 같은 개념 전개를 제시한다. 벡터 공간 V에서 자신으로 가는 일차 변환 f를 정의하고 그 f에 의해 고정된 직선이 존재하는가? 다시 말하면 자신을 자신으로 보내는 직선이 존재하는가의 질문과 같다. 또 이것은 직선을 나타내는 식 $f(X)=\lambda X$이 존재하느냐를 뜻한다. 이는 학생들에게 문제와 새로운 개념 발생의 동기를 제공하면서 f를 자연스럽게 행렬 A로 대체시키면서 $f(X)=AX=\lambda X$의 식을 만들어 내고, 간단하게 고유치 λ를 계산

해 낼 수 있다.

이로부터 거의 20년이 지난 1975년 로웬탈(Franklin Lowenthal)의 저서 'Linear Algebra with Differential Equations'[20]에서도 이와 비슷한 고유치 고유벡터의 개념 전개를 하고 있다. 유한 차원 벡터 공간 V에서 자신으로 가는 일차 변환 $T: V \rightarrow V$는 벡터공간 V의 기저(basis)에 따라 달라진다. 특별히 V의 기저를 변환 T의 행렬 표현을 대각행렬이 될 수 있게 선택하면 그 대각행렬 D의 대각 원소 λ는 다음의 흥미 있는 관계식을 만들어낸다. 벡터 v가 V의 한 원소일 때 $T(v)=\lambda v$가 되고 이는 한 벡터를 변환에 의해서 자신의 벡터와 같은 방향을 갖는 또 다른 벡터로 전이되며 결국은 원점을 지나는 벡터군들이 나타내는 직선을 볼 수 있다. 이는 선형대수를 시각적으로 전개함으로써 학생들에게는 유의미한 개념형성의 장을 마련해줄 수 있다.

그러나 대부분의 선형대수 책에서는 고유치 고유벡터의 개념 도입은 상당히 형식적이다. 먼저 정방행렬 A가 주어지고 영이 아닌 벡터 v가 있어서 방정식 $Av=\lambda v$를 만족하는 복소수 λ가 존재하면 이것을 고유치라고 하고 이 고유치에 의해 구해지는 v를 고유벡터라고 정의하고 있다. 이러한 형식적인 정의의 접근은 학습자에게 진정한 의미의 개념 형성이 이루어졌다고 보기는 어렵다. Dorier[12]는 그의 동료들과의 연구에서 학생들의 개념형성 장애의 첫째 이유로 새로운 개념에 대한 형식적 접근에 있음을 지적한 바 있다.

전통적인 방법으로 고유치 고유벡터를 학습한 학생들에게 고유치가 무엇이냐는 질문에 대다수의 학생들은 주어진 행렬에 대한 고유치를 구할 수는 있는데 그 값이 의미하는 것은 알지 못한다는 대답을 하였다. 이는 학습 당시에 유의미한 개념 발생이 이루어졌다고 볼 수 없으며 그 개념을 이용해야하는 실제 상황에서 문제해결의 전략을 세울 수 없음을 의미한다. 학습자에게 의미 있는 개념 발생은 그 개념이 포함된 문제 상황에서 통찰력을 갖게 해주며 효과적인 문제 해결의 방향을 제시한다. 또한 보다 진보된 상황으로 창의력을 발휘할 수도 있다.

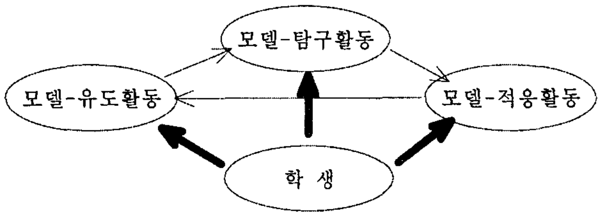
2. 이론적 배경

1) 모델링을 이용한 수학 교육

수학 교육에서 모델의 역할의 중요성을 지적한 A. Revuz([27], [2]에서 재인용)는 수학이 전개되는 일반적인 골격으로 '상황-모델-이론'의 도식을 제시하고 상황이란 현실의 단편이며 모델은 상황을 도식화한 것이고 이론은 상황을 떠나 모델의 구조 자체를 연구할 때 나타나는 것이라고 설명하고 있다. 이러한 입장에서 모델은 상황과 이론 사이에 위치하면서 학습자에게는 상황에서 이론으로, 이론에서 또 다른 상황으로

이해의 폭을 넓혀주는 중요한 역할을 하게 된다. 학생들의 수학활동은 구체적 상황에서 수학적 모델로, 다시 수학적 개념 발달로 이어질 수 있다.

학생들의 효과적인 개념 발달을 위해 Lesh와 Doerr[19]는 몇 명의 연구자와 함께 실험한 결과인 모델 발달 과정의 유형을 제시했다. 다음 그림은 모델-유도(model-eliciting), 모델-탐구(model-exploration), 모델-적응(model-adaptation)으로 이어지는 학습 모형과 그들의 상관관계를 나타낸 것이다.



[그림 1] 모델 개발 과정[19]

모델-유도 단계에서 학생들이 바람직한 개념 발달이 이루어지도록 도구를 개발하는 교수 디자인이 필요하다. 어떤 종류의 내용을 택할 것인지 양은 어느 수준을 제시해야 하는지 최소한의 필요조건은 무엇인지 학생들의 경험 확장이 가능한지 등을 고려해야 한다. 모델-탐구 단계에서는 종종 컴퓨터나 도형, 그래핑 계산기 등이 강력한 표상 도구로 사용된다. Lesh는 수직선 모델을 사용하여 학생들의 이해의 장을 넓히고 있다. 이것은 또 다른 수학적 언어로 경험 확장과 새로운 의사소통의 수단을 제공한다. 세 번째 모델-적응 단계는 모델-적용(model-application) 단계 혹은 모델-확장(model-extension) 단계라고도 불리는데 이전에는 다루기 어려웠던 개념을, 모델-유도 단계에서 개발하여 모델-탐구 단계를 거쳐 다듬어진 개념적 도구를 사용하는 마지막 단계이다. 학생들은 자신에 적응할 수 있도록 개념을 변형하고 수정하여 확장할 수 있는 단계이다. 이러한 경험을 통하여 새로운 개념의 틀을 기존의 개념적 쉐마에 적응시킬 수 있다.

본 연구에서는 연립 미분 방정식의 해함수를 구하는 과정에서 학생들의 고유치 고유벡터의 개념 발생 과정을 디자인하는데 Lesh와 Doerr등이 개발한 모델 학습 과정을 적용하였다.

2) 컴퓨터를 이용한 수학적 모델링

컴퓨터는 수학적 사고를 보완할 수 있는 도구로 다양하게 이용할 수 있다. 컴퓨터는 새로운 정리를 제안할 수도 있고 반례를 찾아주기도 하며 알고리즘을 시행하여 증명에 이용되기도 한다[13]. Arcavi[4]는 보이지 않는 것(unseen, 예를 들어 함수의 식이나 data)을 보게(visualization, 그래프나 그림)해줌으로써 학생들의 이해의 장을 넓힐 수 있음을 보였다.

시각적인 아이디어를 이용한 증명이나 복잡한 계산이 필요한 문제에서 컴퓨터는 진가를 발휘한다. 학생들의 지식을 구성하는 것을 돕고 자극이 가능한 컴퓨터는 강력한 동기유발과 함께 수학적 아이디어를 개념화하고 조직하고 반성할 수 있는 기회를 제공한다. 추상적인 아이디어가 컴퓨터 상에서 실행되고 표현될 때 그 아이디어는 학생들의 마음속에 구체적으로 존재하는 것이다. 컴퓨터 상에서 무엇인가를 구성할 때 마음속에는 그에 대응되는 구성이 이루어진다. 또한 그 구성물이 의미하는 것이 무엇인지 왜 존재하는지에 대한 반성의 기회를 갖게 해준다.

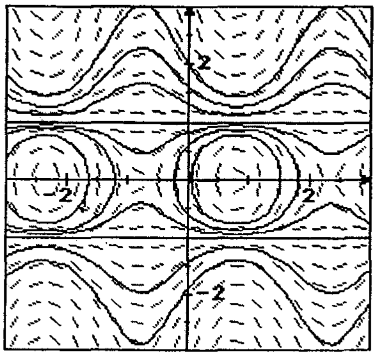
모델링의 표현 도구로서 컴퓨터는 유창한 표상력(representation)을 가지며 수학화 과정을 효과적으로 증진시킨다. Fischbein[14]은 모델 유형의 분류에서 벡터를 나타내는 일정 길이와 방향을 갖는 선분을 직관모델의 예로 들었다. 개념적으로 받아들이기 어려운 내용에 접할 때 학습자는 무의식적으로 또는 신중하게 좀 더 개념의 이해가 쉬운 대체물을 찾게 되는데 이때 그 대체물을 Fischbein은 직관모델이라 정의하였다. 이 모델을 실제의 개념적 해석과 실제적 표현 사이를 연결하는 이상적인 도구로 생각하였다. 추상모델과 상대 개념인 직관모델은 개념의 의미를 확고히 해줄 수 있을 뿐만 아니라, 형식적 알고리즘이나 조작의 기억력보다 직관모델이 부여한 성질에 대한 기억이 훨씬 오래 지속된다고 주장하였다. 이미 학습한 직관모델은 형식적 추론을 할 수 있게 된 후에도 추론을 도와주고 방법에 영향을 미친다. 벡터가 갖고 있는 속성을 짧은 화살표가 직관적으로 잘 표현해주고 있을 뿐만 아니라 컴퓨터에 나타나는 벡터들이 그리는 그래프는 미분 방정식의 해함수의 의미를 이해하는데 결정적 역할을 할 수 있을 것이다.

3) 컴퓨터와 미분방정식

급격한 테크놀로지의 발달로 역학계의 문제를 주로 다루는 미분 방정식의 교수 학습의 문제는 급진전을 보게 된다. 테크놀로지가 학생들의 개념 발달과 새로운 아이디어의 창출에 긍정적 영향을 줄 수 있는 단서들이 제시되었다[17]. Heid[16]는 미분적분학의 교수학습에서 컴퓨터의 사용이 학생들의 개념 발달에 효과적일 수 있음을 증명하였다. 수학 학습의 개념적 연속성을 유지하기 위한 논리적이고 분석적 학습 방법은 문맥의 전체적 파악을 가능하게 한다.

여러 심리학 연구는 분석적이고 논리적인 영역과 시각적이고 공간적 영역을 관장하는 뇌의 역할이 다르다는 것을 발견해냈다. 1982년 Brumby는 효과적인 학습을 위한 그 둘의 형태를 통합하는 다양한 사고(versatile thinking)의 개념을 정의한다. Tall과 Thomas[30, 31]는 컴퓨터의 적절한 사용은 Brumby가 주장하는 다양한 사고력 증진에 효과적일 뿐만이 아니라 진행과정을 한 눈에 파악할 수 있고 생생한 개념형성에 힘을 발휘할 수 있음을 주장하였다. 다양한 사고는 개념과 학습자 사이에서 상호 작용을 가능하게 하고 이러한 인지적 구조의 형성과 조작이 가능한 학습 환경은 학습자

로 하여금 다양한 사고를 가능하게 하고 나아가 효과적인 개념형성을 유도할 수 있음을 지적한 것이다. 그 이전의 연구 결과에서도 Tall[29]은 한 미분 방정식의 해함수가 의미하는 다양성을 컴퓨터의 수치적 그래프적 표현의 장점을 이용하여 나타낸 바 있다. 예를 들어 미분방정식 $ydy/dx \sec 2x = 1 - y^2$의 일반해는 변수 분리의 간단한 대수적 조작을 통하여 $-\ln|1-y^2| = \sin 2x + c$ 를 얻을 수 있다. 전통적 미분 방정식 수업에서는 여기까지의 과정이 전부이다. 그런데 이 해함수가 의미하는 것이 무엇이란 말인가? 해함수가 뜻하는 바를 구체적으로 설명할 수 있어야 한다. 학생들에게 진정으로 유의미한 개념 발달을 위해서는 다음 단계가 필수적이다. 이제 주어진 미분 방정식에서 dy/dx를 각 점에서의 접선 벡터로 생각하고 그 접선벡터들이 그리는 방향장을 한 좌표 상에 나타내보자.



[그림2] $ydy/dx \sec 2x = 1 - y^2$의 해곡선

이 그림은 각 점에서 해함수의 역동적인 운동을 직접 관찰할 수 있다. 각 위치에 따라 물결 모양의 해함수와 원 모양의 해함수의 흐름이 주기적으로 반복됨을 알 수 있다. 이 예는 한 개념의 깊이 있는 이해를 위해서 대수적 조작과 더불어 시각적 상호작용의 필요성이 중요함을 일깨워 준다.

미분 방정식의 교수 학습에 대한 새로운 접근은 이러한 닫힌 형태의 해를 구하는 것에 대한 기술만을 강조해온 전통미분방정식의 교수 학습에 대한 문제의식에서 출발했다[8, 23, 24]. Stephan과 Rasmussen[28]은 급격한 테크놀로지의 발달은 역학계에 이용되는 수학에의 관심을 불러 일으켰고 미분방정식의 교수학습에 지대한 영향을 가져왔다고 주장하였다. 학생 중심의 교수와 미분 방정식 수업에서 학생들의 추론과 해함수의 개념연구에 집중하였다. Yackel과 Cobb[32]의 사회문화적 교실 상황의 학습이론을 적용한 수업은 학생들의 다양한 참여 방법과 효율적 집단 학습의 가능성을 제시하였다.

Boyce[9, 10]는 미분 방정식이 실생활과 관련이 깊은 과목임에도 불구하고 전통적

인 미분 방정식 수업에서는 수학적 상황에서 문제를 만들고 발전시킬 수 있는 기회가 없고, 대수적 계산에 의한 해함수의 의미를 이해하지 못한다고 지적하고 그의 대안으로 컴퓨터를 활용한 개념이해, 탐구, 높은 수준의 문제 해결의 교수 학습을 제시하였다.

Artigue[6]는 대수적, 수치적, 그래프적 접근법으로 미분 방정식의 해함수를 구할 수 있는 수업 방법의 분류를 제시하였다. 그는 컴퓨터가 그려내는 미분방정식의 해함수 그래프를 이용하는 그래프적 접근법을 질적 접근법이라 했고 이는 이미 19세기 말에 포앵카레가 시도했던 방법이기도하다. 대수적 접근으로 인지장애를 겪고 있는 학생들의 학습 대안으로 Artigue는 그래프를 이용한 질적 접근을 추천하고 있는 것이다. 이 경우, 컴퓨터는 강화된 의사소통의 도구 역할을 충실히 할 수 있다.

3. 교수 학습실험 및 분석

보통 고유치 고유벡터의 개념은 대학에서 선형대수 교과를 통하여 학습하게 된다. 본 연구자는 2년 전 개혁 미분방정식 수업연구에 연구자로 참여하여 학생들이 연립 미분 방정식 과제를 수행해가는 과정 중에 선형대수 수업에서와는 다른 방법으로 고유치 고유벡터의 유의미한 개념 발생이 이루어지는 것을 우연히 목격했다. 이에 본 교수학습 실험은, 다음 해인 2003학년도 가을학기의 미분 방정식 수업을 기획하면서 연립 미분방정식 부분을 고유치 고유벡터의 개념 발생에 초점을 맞추어 다음과 같은 목적을 갖고 계획적이고 의도적으로 시행하였다.

첫째, 본 연립 미분 방정식 수업 프로그램에서 고유치, 고유벡터의 개념 발생은 어떻게 이루어질까? 둘째, 학습자의 고유치, 고유벡터의 개념형성은 주변 개념들과 어떻게 연계가 가능한가? 셋째, 이와 같은 인지적 변화를 유발하는 프로그램의 교수학적 요인은 무엇인가? 또한 이러한 교수 학습 프로그램을 통하여 학생들의 수학에 대한 정의적인 태도는 어떻게 변할 수 있을까? 만약 변화가 있었다면 그러한 변화가 가능하도록 한 교수학적 요인은 무엇인가를 연구 목표로 세웠다.

위의 목표를 성공적으로 수행하기 위하여 미분방정식 수업의 연립 선형 미분 방정식 부분의 일부를 역사 발생적 원리에 근거한 탄성체를 수업 모델로 정하고, 용수철의 시간에 따른 속도와 변위 문제의 해결을 위한 수학적 모델링을 통하여 학생들의 효과적인 개념 발생이 이루어지도록 교수디자인 설계를 계획했다. 미분 방정식 과목을 수강한 학생 수는 21명이고 그 중 1학년생이 8명, 나머지는 2, 3, 4학년생이 고루 섞여 있었다. 14명이 수학 교육이나 수학 전공생이고 나머지 7명도 수학 교육을 복수 전공으로 선택한 학생이어서 2, 3, 4학년생들은 이미 선형대수과목을 이수한 상태였고 1학년 학생들은 미분방정식과 함께 선형대수 과목을 이수 중에 있었다. 하지만 고유

치와 고유벡터 부분의 진도는 지나간 뒤여서 수강학생 모두가 한번은 고유치 고유벡터를 학습한 상황이었다. 개념 발달의 정확한 결과를 지켜보기 위해 수업이 진행되기 전까지는 이러한 상황에 대한 언급은 일절 하지 않았다.

4명씩 한 조(한 조는5명)가 되어 한 학기동안 소그룹 토의가 진행되도록 했다. 매 시간과제가 주어지고 주제에 대한 소그룹 토의가 진행되면 그 결과를 전체토의에 붙이고 미진한 경우 다시 2차 소그룹 토의를 진행하였다. 모델링 활동에서 의사소통의 역할은 과제의 필수적인 부분이다. 소그룹 토의는 학생들이 유용한 수학적 모델을 개발하고 정제하게 하고 상호간 의견에 증거 자료를 제공했다. 이것은 모든 학생이 서로 배울 수 있고 중요한 수학적 개념을 개발할 수 있다는 희망을 보여준다. 또한 의사소통은 이러한 긍정적 개념발달을 촉진하는 역할을 담당한다. Rasmussen[26, 28]과 그의 연구자들은 서로 나눔으로써 지식을 공유하는(taken-as-shared) 소그룹 토의의 장점을 실험을 통하여 증명한 바 있다.

매 시간의 수업 과제(worksheet)를 통한 수업 관찰, 소그룹과 전체토론 실시, 비디오 녹화와 그의 전사를 통한 학생들의 수학적 의사소통과 발화 분석을 통해 학생들의 개념 발달 과정과 수학적 성향 변화를 관찰할 수 있었다. 또한 한 학기 서너 번의 e-journal과 한 학기 두 번의 portfolio, 기말고사 종료 후 면담 등이 시행되었고 면담의 전 과정은 녹화와 녹음되어 전사과정을 거쳐 연구의 중요한 자료가 되었다. 매 시간 수업 후 학생들은 그 수업에 대한 자신의 일지를 제출했는데 이 수업일지(reflectional journal)는 반성과 보고하기 활동의 역할을 한다. 학생들의 모델 탐구 활동을 하는 동안 그들의 학습 경험의 진술이나 나름대로의 풀이 과정, 궁금 사항 등의 질문을 담는다. 매 시간 일지의 진술과정은 학생들에게 모델 탐구 과정을 정리하고 반성의 기회를 제공한다. 소그룹 토의과정에서 나타나지 않은 자신만의 느낌, 태도, 믿음 등을 표현하는 장이 되기도 한다.

학생들이 강력한 수학적 아이디어를 개발하도록 하기위한 학습상황은 어떻게 제공되어져야 할까?

앞에서 언급한 대로, 18세기 오일러와 베르누이에 의해 최초로 등장했던 고유치의 개념 발생의 장은 탄성을 가진 물체의 변위에 관련된 미분방정식의 풀이 해법 문제였다. 과제는 역사 발생적 학습원리를 충실히 따라 용수철에 매달린 물체의 변위문제를 모델로 사용했다. 이는 권오남[1][3]과 Rasmussen등의 연구팀이 개발한 개혁 미분방정식 수업 과제로 점진적 수학화를 통한 프로이덴탈(Freudenthal)의 안내된 재발명이라는 RME의 기본 원리에 충실한 맥락 문제로 학생들의 개념 발생의 과정을 중시한다.

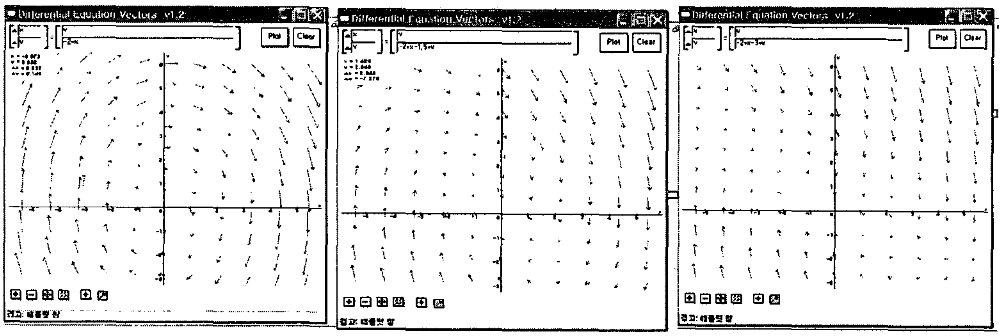
다음은 고유치 고유벡터 개념이 내재되어있는 과제로 학생들에게 주어졌던 용수철

3) 개혁미분방정식 수업을 처음 한국에 소개한 권오남은 다년간 교수학습 실험으로 괄목할만한 두고 있다.

모델내용이다. Rasmussen과 Keynes[25]는 선형 미분 방정식의 해함수를 구하는 과정에서 예측, 탐구, 수학화 그리고 일반화 과정을 통해 직선해를 발견하고 그것이 고유벡터와 밀접한 관련이 있음을 발견한 바 있다. 또한 고유벡터, 고유치의 순서로 학습됨을 기술하였다.

먼저 용수철 모델에서 나타나는 이론들이 학생들에게 익숙하지 않다고 가정하여 Lesh와 Doerr[19]의 모델-유도 단계에서 학습자의 유추전이가 잘 일어날 수 있도록 탄성에 관련된 정보, 이를테면 Newton의 제2법칙, 감쇠력과 복원력, 마찰력, 탄성력, 변위 등의 관계를 별도의 자료로 조별 토의학습을 거쳤다. 이 과정은 학생들의 수학적 유추를 돕고 근원의 관계를 이해하게 하며 활동적인 토의 진행을 위한 목적이었다. 뉴턴의 제2법칙을 이용하여 용수철에 매달린 추의 운동을 나타내는 변화율 방정식을 세우고, 가속도를 속도의 새로운 변수를 첨가한 두 개의 연립변화율 방정식으로 바꾸었다. 추의 질량과 용수철 상수는 일정한 상수로 하고 감쇠계수의 변화에 따른 추의 운동을 관찰하였다.

Java Applet을 사용한 모델-탐구 단계에서 학생들은 감쇠계수 변화에 따른 그래프의 변화에 촉각을 곤두세우며 그것이 의미하는 것이 무엇이며 앞에서 학습했던 평형해는 존재하는지, 직선해와는 다른 것인지, 벡터들의 방향은 무엇을 나타내는지에 대해 토의하였다. 수업 과제의 유도된 질문에 따라 생각하고 질문하고 탐구하였다. 이러한 과정 중에 특정 감쇠계수 값에 대해서 컴퓨터의 그래프 상에 직선해가 나타남을 발견하고 그것의 의미와 직선해 위에 있는 벡터들의 방향에 대해서 논의했고 직선의 기울기는 무엇인가, 다른 직선이 존재하는가, 궁극적으로 그 직선이 나타내는 추의 운동은 무엇인가를 궁금해하면서 토론에 열을 올렸다.



[그림3] 컴퓨터 화면에 그려진 용수철 운동 모델의 벡터장
(순서대로 감쇠계수가 0, 1.5, 3)

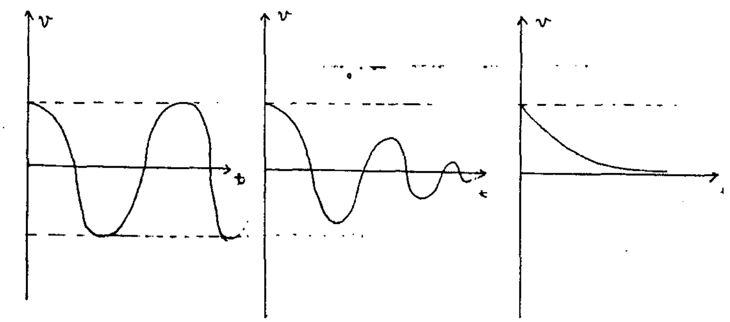
S1; 감쇠계수 b가 0일 때는?
S2; 감쇠계수가 0이라… 속도가 안 줄겠네. 그러면 계속 왔다 갔다…(손을 위 아래로)
S1; 이 그림은… 계속 돌겠네, 계속 돌지. 이렇게…(손을 둥그렇게)

S3; 그래 맞아. 아, 그럼 b가 1.5인 경우는…

한참 만에 감쇠계수가 3인 경우 화면에 나타난 벡터장을 보면서 다시 토론에 열중했던 학생들의 대화이다.

S2; 여기서는 방향이 이 쪽으로만 가네… 이게 뭐지?
S1; 원점으로 모이는데… 이거 봐.(zoom in과 zoom out을 반복하면서 벡터 방향이 원점으로 모이는 것을 보여주고 있다).
S4; 직선인데? 여기 봐, 이거 3번 여기 직선해 있잖아… 바로 이거야…
S1; 근데 뭐가 다르지? 이건 추가 어떻게 움직이는 거야?

다음 그림은 서로 다른 감쇠계수 값에 따라 시간에 대한 용수철 운동의 속도 변화를, 학생들이 손의 움직임으로 표현하며 그린 그림이다. 컴퓨터 화면에 나타난 용수철 운동의 속도와 변위($x-v$)그래프를 관찰하며 시간과 속도($t-v$)의 관계를 표현해냈다.

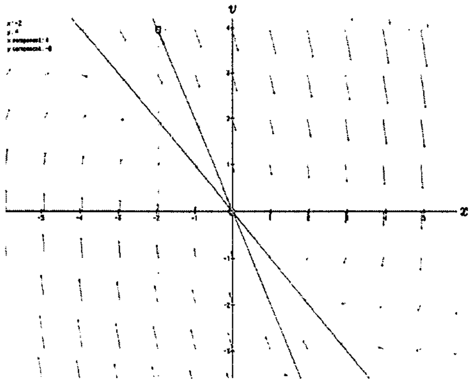


[그림4]서로 다른 감쇠계수 값에 대응되는 시간에 따른 속도의 변화

직선해를 발견한 학생들은 다음 수업 과제의 순서에 따라 구체적 방법으로의 탐구과정으로 안내된다. 벡터장에 나타난 직선의 기울기는 무엇인지, 속도와 변위 두 변수에서의 직선을 3차원 공간(시간, 속도, 변위)에 그려보고 그 직선에 대응하는 용수철 운동을 설명하여야 한다. 여기서 학생들은 앞에서 학습했던 평형해와 직선해를 혼동하기도 하고 그 둘은 같을 수 없다고 스스로 결론을 내기도하면서 직선해의 개수와 다른 감쇠계수에 대해서도 직선해가 생기는지를 궁금해하였다. '처음에는 직선해가 평형해라고 생각했는데 이는 평형해가 아니다. 직선해 위에 있는 점들이 모두 평형해라면 직선해 위의 임의의 점을 만족하는 (x, v)값에서는 용수철이 움직이지 않아야 하는데 이러한 운동은 존재하지 않는다. 따라서 직선해는 평형해가 아니며 여기서 평형해는 원점이다.' 이 학생의 수업 일지는 다음 시간의 일지에 연결되는 주제를 담고 있다. '지난 시간과 지난 수업일지를 쓰면서 고민했던 직선해에 대한 의문이 풀렸다. 직선을 따라 원점을 향하는 직선은 $dy/dx=0$이 되는 곡선 위의 점을 모아 놓은 직선이 아니

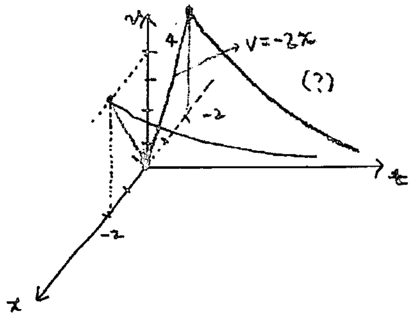
라 해함수의 그래프 중에서 직선을 이루는 것을 의미한다.'

그 다음 학생들은 모델-적응 단계로 두 개의 직선해가 그려진 수업 과제물의 안내에 따라 초기조건이 주어진 해를 구하고 3차원 상에 그래프를 그리는 작업을 시행한다. 초기 조건이 다른 직선위에 있는 두 점인 경우의 3차원에서의 그래프를 그려보면서 위상평면에 나타나는 한 직선은 무수히 많은 해를 포함하고 있다는 사실을 인지하게 된다.



[그림5] 감쇠계수가 3인 경우 벡터장에 나타난 직선해

또한 초기 조건에 따른 두 그래프의 관계를 삼차원에서 평행 이동으로 이해했고, 이 직선 위의 모든 벡터들은 똑같은 기울기를 가지고 있다는 사실로부터 기울기를 쉽게 구할 수 있었다. xv평면에서 관찰된 직선을 $v=kx$라고 하고 변형된 식 $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{-2x-3v}{v}$에 대입하여 대수적인 방법으로 기울기의 값을 구했다.



[그림 6] 초기값에 따른 3차원에서의 해곡선

그래프의 zoom in 기능으로 벡터들이 원점으로 향하고 있는 것은 시간이 지남에 따

라 속도가 줄어드는 현상으로, 이를 이용하여 3차원에서의 해함수를 그릴 수 있었고, 기울기의 부호와 그래프의 증가 감소의 관계를 이해했다. 기울기를 구하는 과정에서 때에 따라 직선해의 개수가 달라질 수 있다는 사실을 스스로 발견하여 특별한 모델로부터 개념의 일반화 기회를 가질 수 있었다. 각 직선해를 구하고 변수 분리법을 이용하여 변위와 속도를 시간의 함수로 나타내면서 '$\frac{dx}{dt}$와 $\frac{dv}{dt}$ 모두 t에 상관없이 x와 v에 의해서만 결정되므로 초기값이 다른 직선 위의 두 점으로부터 얻은 삼차원의 두 곡선은 평행이동으로 겹쳐질 수 있다.'는 대수적 증명을 함으로써 이미 그림에서 보여줬던 자신의 주장을 확고히 하였다.

다음 단계는 직선 밖의 벡터들에 관한 논쟁이었다. 이 부분에서 학생들은 직선해와의 관계를 이해하는데 어려움을 호소하였다. 직선해 근처의 벡터들은 직선 위의 벡터들의 방향 쪽으로 휩쓸리고 직선해로부터 멀리 있는 벡터들은 상대적으로 덜 영향을 받는 것을 발견하고 나머지 해들은 직선해와 모종의 관련이 있을 것이라는 추측을 갖고 안내된 과제를 통한 탐구과정을 거쳐 일반해를 구하는 대수적이고 그래프적인 이해를 하게 되었다. 기저와 일차 독립, 일차결합에 대한 기억이 학생들의 개념형성에 도움을 준 듯하다. 직선해[4]에 주목하는 이유, 직선상의 벡터들과의 관계에 관한 질문을 의도적으로 하면서 고유벡터 개념 발생을 위하여 직선의 기울기에 관한 대수식을 기하적으로 표현한 과제의 학습을 통하여 고유치의 개념 형성을 이루어내기까지는 쉽지 않았다. 기울기를 먼저 구하는 방법과 고유치를 먼저 구하는 방법과의 차이를 인식하면서 학생들은 차츰 모델 적응의 단계에 익숙해졌다.

학생들은 미분방정식의 해함수가 그려내는 벡터장에 나타난 많은 벡터들 중에서 원점을 향해 움직이는, 마치 직선으로 보이는 수많은 벡터(고유벡터)를 통하여 미분방정식의 일반해를 구하고, 직선 식으로부터 고유치를 유추해낸다. 유의미한 개념 발생이 이루어지면 일반적인 형태의 다양한 경우에서도 대수적 방법으로 해함수를 구하는 일은 가속이 붙을 수밖에 없다.

4. 결언

역사적으로 이차 동차식에서 시작하여 선형 미분방정식의 해함수를 구하는 과정 중에 지수함수의 계수가 latent root라 하여 오늘날 eigen value의 기원이 되었던 사실로 미루어, 현재 선형대수 과목에서 고유치 고유 벡터를 주어진 행렬에서 대수적으로 학습하고 있는 학생들에게 의미전달이 힘든 것은 당연한 결과인 듯하다. 교과서가 쓰여진 초창기부터 역사 발생의 순서와는 상관없이 형식적 접근을 시도한 것으로 미루어

4) 역사적으로, 변환의 새로운 축-주축(principal axes)을 형성한다.

고유치 고유벡터에 대한 효과적인 개념 발생은 예나 지금이나 그만큼 어려운 작업임에는 틀림이 없다.

탄성체인 용수철 운동을 미분방정식으로 표현하고 그의 해함수가 그려내는 벡터장에서 고유벡터를 발견하게 하는 수업모델은, 개념의 역사 발생의 장으로 상황 설정을 한 후 현대적 산물인 컴퓨터를 이용한 그래프적 수치적 접근 교수학습을 시도한 것이다. 역사 발생적 원리에 입각한 수업 과제와 소그룹 토의 수업으로 학생들의 모델-유도, 모델-탐구, 모델-적응의 단계는 학생들에게 효과적인 개념 발생을 가능하게 했다.

학생들은 혼자서 또는 조별 토의를 통해 개념을 형성해 나가는 수업 방법에 익숙하지 않다. 상황모델의 맥락 문제를 가지고 개인과 소그룹 토의를 통한 수업으로, 학생들의 한 개념에 대한 정신모델의 효과적인 형성을 위해서는 대학 1학년보다는 사고력과 논리, 수학과 과학 지식 등이 상대적으로 우월한 대학 2학년 과정에서 다룰 것을 추천한다. 학생들이 지적하듯이 '아는 게 없어서', '시간이 없어서'의 불만은 어느 정도 해소되리라 본다.

이러한 토의 수업에서, 어느 정도의 정보가 학생들에게 주어져야 할까? 학생들의 질문에 어느 정도까지 답을 주어야 할까? 학생들과의 인터뷰에서 나타난 불만 중에 하나는 답을 가르쳐 주지 않는다는 것이었다. 혹자는, 가르치는 사람은 학생들에게 답을 가르쳐주려는 유혹에서 벗어나야 한다고 한다. 그만큼 학생들이 사고할 수 있는 기회를 빼앗기 때문이다. 토의 수업에서 학생들의 효과적인 개념 발생을 위한 적정 수준의 수업 자료 제공, 적정 수준의 발문에 관한 연구는 필요한 과제이다. 아울러 개념에 적당한 상황 모델의 개발이 필수적이다.

수업 일지도 학생 개개인에게는 큰 도움이 되었다. 수업의 진행에 따라 새로운 모델장면의 도입, 개념 탐구, 정리 반성의 단계가 일지 속에 고스란히 녹아있었다. 의문이었던 내용이 그 다음 일지에서는 '토의 과정에서 스스로 알게 되어 신이 났다'는 표현을 하고 있다. 한 질문에 대한 여러 경우를 진술하고 어느 것이 맞는지를 질문하고 다음에는 스스로 옳은 답을 찾아가는 과정을 쓴 것도 있었다. 일지를 쓰는 과정에서 수업을 정리하고 개념의 의미를 찾고 반성하는 단계는 다음 수업에 대한 기대와 동기 유발의 역할을 한다.

수학은 역동적이다. 컴퓨터에 표현된 외적 표상모델을 통해서 학생들은 안내된 재발명의 기회를 충분히 갖도록 고려될 수 있다. 주어진 문제 상황에서 수치적 접근 과정에서의 경험과 발견은 개념적 이해를 강화시키고 과제 수행의 자세한 방법은 필요하다면 미래 상황을 예견할 줄 아는 안목을 길러준다.

수학적 창의성은 한 개념에 대한 정확한 이해에서 시작된다. 학생들에게 유의미한 개념 발생의 장을 마련하는 일은 교육자의 권리이자 의무이다.

참고 문헌

1. 권오남 외, "대학미분방정식 교수 학습의 새로운 방향; RME 접근," 수학교육학연구 제12권 제3호(2002), 389-408.
2. 김응태 외, 수학교육학개론, 서울대출판부, 2004.
3. Anton, H., *Elementary linear algebra,* John Wiley & Sons, Inc, 1994.
4. Arcavi, A., "The role of visual representations in the learning of mathematics," *Educational Studies in Mathematics* 52(2003), 215-241.
5. Arfken, G.B. · Weber, H.J./김성원 외 역, 수리물리학, Academic Press, Inc., 1998.
6. Artigue, M., "Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices," in Dubinsky, Ed., *The Concept of Function: Aspects of Epistemology & Pedagogy*, Mathematical Association of America, 1992, 109-132.
7. Artin, E., *Geometric Algebra,* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, Inc., 1957.
8. Blanchard, P. · Devaney, R. · Hall, G., *Differential Equations*, Brooks/Cole, 1998, 2002.
9. Boyce, W.E., "New directions in elementary differential equations," *The College Mathematics Journal* 25(5)(1994), 364-371.
10. Boyce, W.E., "Technology in elementary differential equations," *Proceeding of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 1995, 65-74.
11. Boyer, C.B./양영오 · 조윤동 역, 수학의 역사 상 · 하, 경문사, 2000.
12. Dorier, J-L., *On the Teaching of Linear Algebra,* Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 2000.
13. Dubinsky, E. · Tall, D., *Advanced Mathematical Thinking and the Computer, Advanced Mathematical Thinking*, edited by Tall, D., Kluwer Academic Publishers, 1991.
14. Fischbein, E., *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
15. Grattan-Guinness, I. · Ledermann, W., *Matrix Theory, Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* vol. 1, 2, edited by Grattan-Guinness, Routledge, 1994.
16. Heid, M.K., "Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool," *Journal for Research in Mathematics Education* 191(1988), 3-25.

17. Hubbard, J.H., "What it means to understand a differential equation," *The College Mathematics Journal* Vol. 25 No. 5(1994), 372-384.
18. Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press, 1972.
19. Lesh, R. · Cramer, K. · Doerr, H.M. · Post, T. · Zawojewski, J., *Model Development Sequence, Beyond Constructivism*, edited by Lesh, Doerr, Lawrence Erlbaum Associates, 2003.
20. Lowenthal, F., *Linear Algebra with Differential Equation*, Wiley International Edition, 1975.
21. Mirsky, L., *An Introduction to Linear Algebra*, Oxford University Press, 1955.
22. Piaget, J. · Garcia, R., *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York, 1989.
23. Rasmussen, C.L., "New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties," *Journal of Mathematical Behavior* 20(2001), 55-87.
24. Rasmussen, C.L. · Karen D. King, "Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach," *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* vol. 31 no. 2(2000), 161-172.
25. Rasmussen, C.L. · Keynes, M., "Lines of eigen vectors and solutions to system of linear differential equations," preprint, 2003.
26. Rasmussen, C.L. · Stephan, M. · Allen, K., "Classroom mathematical practices and gesturing," *Journal of Mathematical Behavior* 23(2004), 301-323.
27. Revuz, A., "The position of geometry in mathematics education," *Educational Studies in Mathematics* no. 4(1971), 48-52.
28. Stephan, M. · Rasmussen, C.L., "Classroom mathematical practice in differential equations," *Journal of Mathematical Behavior* 21(2002), 459-490.
29. Tall, D., "Lies, damn Lies ··· and differential equations," *Mathematics Teaching* 114(1986), 54-57.
30. Tall, D. · Thomas, M., "Versatile learning & the computer," *Focus* 11, 2(1989), 117-125.
31. Tall, D. · Thomas, M., "Encouraging versatile thinking in algebra using the computer," *Educational Studies in Mathematics* 22, 2(1991), 125-147.
32. Yackel, E. · Cobb, P., "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics," *Journal for Research in Mathematics Education* 27(1996), 458-477.

Students' Conceptual Development of Eigenvalue and Eigenvector in Reformed Differential Equation Course

Dept. of Mathematics Education, Ewha Womans University **Kyunghee Shin**

In this paper, we discuss students' conceptual development of eigen value and eigen vector in differential equation course based on reformed differential equation using the mathematical model of mass spring according to historico-generic principle. Moreover, in setting of small group interactive learning, we investigate the students' development of mathematical attitude.

Key words: eigen value, eigen vector, historico-generic principle, mathematical modeling, small group collaborative learning

2000 Mathematics Subject Classification: 97C80, 97U70

ZDM Classification: A35, C35, C75