한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 101-122

수학사를 활용한 수학 교육 II

-기하학을 중심으로-

대구한의대학교 정보보호학과 **박홍경**
hkpak@dhu.ac.kr

신라대학교 수학교육과 **김태완**
twkim@silla.ac.kr

전남대학교 수학교육과 **정인철**
ijung@chonnam.ac.kr

수학 교육에서 수학을 어떻게 가르칠 것인가는 근본적인 문제의 하나이다. 이에 대해 본 논문에서는 수학사를 활용한 수학 교육을 주장한다. 그것은 수학 교육을 위해 수학의 이해가 필요하며, 또한 수학의 이해에는 수학사를 활용하는 것이 효과적이기 때문이다. 특히 여기서는 기하학에 초점을 두었다.

우리는 기하학의 기원에서 20세기 중반의 미분 기하학에 이르기까지 등장하는 중요한 기하학을 세 가지 기준, 즉 내·외적 배경, 특징(연구 방법, 대상), 현대 수학에의 영향에 따라 비교 연구하였다. 그 수학교육에의 응용으로 역사적 자료를 바탕으로 수학지도의 순서를 결정하는 문제에 대해 고려하였다.

주제어 : 기하학사, 수학 교육, 수학 지도의 순서

0. 서론

[박홍경 외 3, 2002]에서는 '수학 교육을 어떻게 할 것인가'라는 물음에 대해 수학사를 적극 활용한 수학 교육을 주장하였다. 그 주장의 핵심은 수학 교육을 위해서는 (현대) 수학을 알아야 하고 이를 위해서는 수학사를 살펴보아야 한다는 데 있다. 수학사는 학생들에게 흥미를 제공하고 오개념 형성을 교정하는 역할을 하며 수학에서 미래를 예측하고 역사의 감추어진 부분을 알게 해 줌으로써, 수학사에 대한 깊은 이해는 학생들의 자유롭고 창조적인 사고력을 함양하는 데 기여한다고 보기 때문이다. 또한 이러한 입장에서 대수학을 대상으로 수학사를 고찰하였다.

본 논문에서는 [박홍경 외 3, 2002]에 이어 수학사를 적극 활용한 수학 교육을 위하여 기하학을 대상으로 수학사를 개관하고자 한다. 그 시기는 기하학의 기원에서부터 20세기 중엽 현대 미분 기하학의 성립 과정까지이다. 개관의 입장은 역사적으로 등장

한 여러 기하학들을 3가지의 공통된 기준에 의해 상호 작용의 관점에서 비교하고자 한다.

첫째는 성립 과정이다. 각 기하학이 성립하게 된 배경을 수학 내적인 동인과 수학 외적인 동인을 살펴보고 중심인물들을 열거한다. 둘째는 사회적 사상적인 요인으로서의 특징이다. 고려하는 기하학의 기본적인 고찰 방법과 연구 방법 및 연구 대상에 대해 살펴봄으로써 이전과의 상호관련성을 조사한다. 셋째는 이후의 기하학이나 나아가 현대수학의 발전에 끼친 영향을 고려한다.

여기서 수학사를 고찰하는 주된 목적은 현대 수학에 대한 통찰력을 제공함으로써 수학 교육에 도움이 되고자 하는 데 있기 때문에 본 논문에서는 역사적으로나 이론적으로 구체적인 내용이나 그 성과에 대해서는 다루지 않는다. 그러한 부분은 인용된 문헌이나 관련 수학 서적을 참고해야 할 것이다. 본 논문의 주된 포커스는 기하학에 있어서의 역사적인 맥락, 즉 역사적 변천 과정에 있어서 나타난 여러 기하학들의 상호작용이며 이러한 맥락을 비교를 통해 파악하려는 것이다.

또한 이러한 사적 고찰을 수학 교육에 어떻게 활용해야 하는지에 대해서도 논의한다. 특히 여기서는 수학 지도의 순서를 정하는 문제에 주목한다.

1. 기하학의 사적 고찰

1-1. 기하학의 기원

(1) geometry란 토지 측량

geometry는 그리스어 geometrein(기하학)=geo(토지)+metrein(측량)에서 유래되었다 [이종우, 1998]. 기하학의 발생지가 이집트인 것은 틀림없지만 기하학의 기원이 토지 측량이라는 실제적 필요성만이 동인의 전부라고는 할 수 없다. 이와는 대조적인 입장으로, 가령 아리스토텔레스는 기하학의 기원을 승려 계층의 여가와 사원 의식에서 찾는다[김용운 · 김용국, 1986]. 말하자면 그들이 지닌 미적 감각과 형태미를 즐기는 여유라는 심리적인 동인에서 찾는 것이다. 사실 수학적 사고나 개념의 심리적 동인은 인간에게 있어서는 자연스러울 뿐만 아니라 본질적이다[Rucker, 2001].

(2) 幾何學이란 문자의 사용

기하는 중국식 발음으로 geo에 가장 가까운 한자 幾何에서 빌어왔다[Kurita, 1972]. 따라서 이를 연구하는 학문이라는 의미에서 幾何學이라고 칭하게 되었다.

1-2. 유클리드 기하학

(1) 성립 과정

기하학의 어원이 토지 측량에 있듯이, 고대 이집트에서는 나일강의 범람으로 인해 토지 복구의 필요성으로부터 측량이 행해졌으며 이를 통해 축적된 지식이 기원전 6세기경에 이르러 피타고라스학파에 의해 체계화되고 증명이 도입되었다. 논리적으로 체계화하려는 이러한 시도를 집대성한 것이 기원전 4세기경에 지어진 유클리드의 원론이다[Kurita, 1972]. 이것을 근간으로 하고 있는 기하학을 저자의 이름을 따서 유클리드 기하학이라고도 하고 물리적이고 직관적인 기하학적 고찰 방법을 쓴다는 점에서 초등 기하학이라 부르기도 한다.

유클리드 기하학은 그리스의 고전적 논리주의에 기인한다고 볼 수 있다. 이것은 인간과 자연을 대립하는 것으로 간주하고 객관적 존재인 자연의 통일성, 공통성에 주목함으로써 로고스를 의식하게 되었으며 고찰방법에 있어서도 로고스로부터 출발하는 논리적 연역을 중시하는 입장이다. 따라서 절대적인 진리를 추구한다[김용운 · 김용국, 1986; 박홍경, 1994].

유클리드에 이어 헬레니즘 시대에는 아르키메데스, 아폴로니우스, 파푸스 등으로 대표되는 학자들이 기하학을 발전시켰다. 유클리드 기하학이 정적이고 형식적인 고전주의였던 것에 비해 헬레니즘의 기하학은 다소 역동적이고 자유로운 탈고전주의 경향을 띠었다[김용운 · 김용국, 1986]. 이러한 경향은 나중에 해석 기하학의 형성에 영향을 끼쳤다.

(2) 특징

유클리드의 원론은 공리적 형식 체계를 따르고 있다. 5개의 공리와 5개의 공준을 바탕으로 여러 개념을 정의하고 이로부터 논증을 통해 정리를 얻었다. 다만 현대 수학의 공리적 체계의 입장에서 보면 무정의 용어를 명백하게 규정하지 않았으며 오히려 모든 개념을 정의하고자 하였다.

또한 얻은 정리는 실험이나 관찰과 같은 주관적인 요소를 배제하고 공준과 공리 및 정의로부터 연역적인 추론에 의해 필연적인 결론에 이르도록 하였다. 이러한 의미에서 유클리드 기하학은 논증 기하학이라고도 한다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 논증 방법이 성립하게 된 이유로 이러한 수학의 내적 동인이 아니라 당시 그리스의 사회적 성격을 드는 입장도 있다. 즉 그리스인의 사유는 고독한 내적인 사유가 아니라 공동적이고 대화적인 외적 사유였기 때문에 공적 논증은 이러한 외적 사유의 산물로 보는 것이다[김용운 · 김용국, 1986].

유클리드 기하학은 점, 직선, 평면을 구성 요소로 한 직선 도형과 원, 구를 추가하여 구성할 수 있는 특수한 곡선 도형을 연구 대상으로 하였다. 이러한 대상에 대해 길이(거리), 각, 면적, 체적 등의 기하학적인 계량을 주로 고찰하였다. 또한 합동이나 상사의 개념을 정점이나 변의 대응 관계에 의해 고려하였다. 연구 방법에 있어서는 직관에 의해 직접적으로 대상을 탐구하였다[Kurita, 1972].

(3) 유클리드 기하학의 논리적 결함과 해결

유클리드 기하학의 공리적 형식체계는 비단 수학에 국한되지 않고 이후의 서양 학문이나 사상에 지대한 영향을 주었다. 그러나 19세기에 들어서면서 논리학의 발달로 수학에서의 비판주의가 활발히 전개되었고 특히 집합론의 등장으로 수학적 개념의 엄밀성뿐만 아니라 체계의 완전성 등에 대한 관심이 높아졌다. 이로 인해 절대적인 진리라고 여겨왔던 유클리드의 원론에도 논리적 개념이나 형식적 체계에 결함이 있다는 것을 알게 되었다.

결함의 가장 근본적인 원인은 '수학적 진리란 무엇인가?'라는 물음에서 찾아볼 수 있다. 수학적 진리란 모두 증명되는 수학적 사실을 말하지만 증명이란 명료한 정의로 돌아가는 것이기 때문에 수학적 정의의 확실성이 보장되지 않는다면 수학적 진리의 확실성도 보장될 수 없다. 한편 수학적 정의가 순환 논법에 빠지지 않기 위해서는 정의를 위해 사용되는 출발점이 되는 개념들이 요구되는데 유클리드의 원론에서는 이를 공리와 공준이라 하여 이들로부터 정의를 이끌어내는 방식으로 체계가 구성되어 있다. 하지만 이러한 의미에서 유클리드의 원론에서 제시한 공리와 공준들은 개념적으로 불명확할 뿐만 아니라 체계적으로도 미흡하다는 것이 속속 드러났다. 결국 유클리드 원론의 결함은 근본적으로 출발점이 되는 개념들의 체계화와 논리적 명료성에 있다고 할 수 있다.

현대 수학은 이러한 결함을 해결하기 위한 여러 시도의 산물이라 할 수 있으며 그 중 힐베르트를 주축으로 한 공리주의학파들은 유클리드 기하학의 공리적 형식 체계를 크게 보완하였으며 현대 수학의 기초를 확립하였다. 그리하여 오늘날에는 무정의 용어, 공리를 엄밀히 채택하고 이를 출발점으로 하여 수학적 개념이 정의되고 이로부터 증명을 통하여 수학적 진리를 도출하는 방식으로 체계화되어 있다.

또한 현대 수학은 공리들의 선택이나 명료성에 있어서도 유클리드 원론의 많은 부분이 보완되었다. 사실 현대 수학의 성립 과정은 유클리드 기하학의 결점을 해결하려는 시도로 설명할 수 있다. 그 중 몇 가지 예를 소개한다[Kurita, 1972; 이종우, 1998].

첫째, 무정의 용어와 관련하여, 가령 '정의1: 점이란 부분이 없는 것이다.'라는 것은 점을 정의하기 위해 다시 부분을 정의해야 하는데 이렇게 되면 결국 순환 논법에 빠지고 만다. 현대에서는 이를 피하기 위해 점과 같은 개념들은 무정의 용어로 택하고

있다. 이외에도 여러 개념들을 적절하게 무정의 용어로 선택하고 있다.

둘째, '공준2: 유한 직선은 무한히 연장할 수 있다.'는 것에는 개념상의 모호함이 들어 있다. 유한 직선은 한없이 연장될 수도 있지만 그렇다고 해서 구면 위의 대원의 호와 같이 연장된 길이가 반드시 무한이 되지는 않기 때문이다. 즉 직선의 끝없는 연장과 직선의 길이의 무한은 다르므로 이를 명확히 구별해야 한다.

셋째, 공준 1에서 공준 3까지 3개의 공준만을 사용하여, 즉 직선 자와 컴퍼스만으로 구성하는 것을 기하학적 작도라고 하는데 이것은 당시에 소위 3대 작도 문제라는 난문을 낳았다. 즉, 원적(주어진 원과 동일한 넓이를 갖는 정사각형 작도), 정육면체의 배적(주어진 정육면체의 두 배의 체적을 갖는 정육면체의 한 변의 길이 작도), 각의 3등분(임의의 각을 3등분하는 선분의 작도)의 문제이다. 이들이 실제 불가능하다는 것은 19세기에 들어서서야 밝혀졌다.

넷째, '공준 5(평행선 공준): 한 직선이 두 직선과 만나서 어느 한 쪽의 두 내각의 합이 두 직각보다 작으면 이 두 직선을 무한히 연장할 때 두 직각보다 작은 각이 이루어지는 쪽에서 두 직선은 반드시 만난다.'에 대해서는 다른 공준처럼 자명한 특징을 직관적으로 파악하기 힘들기 때문에 다른 공리와 공준으로부터 증명가능하지 않을까라는 생각을 갖게 되었다. 하지만 평행선 공준을 증명하려는 시도는 19세기까지 지속되었지만 모두 수포로 돌아가고 대신 동치가 되는 공리들만 얻어졌다. 그 결과 평행선 공준은 증명 불가능한 것이 아닐까라는 추측을 하게 되었고 이러한 사고의 전환은 새로운 기하학의 탄생을 낳았다. 그 시작은 바로 로바체프스키나 볼야이에 의한 비유클리드 기하학이다.

다섯째, '공리 1: 동일한 것과 같은 것은 서로 같다.'는 것에는 동일한 것이나 같은 것을 선험적인 것으로 취급하고 있지만 현대에서는 이를 합동 공리로서 명확하게 규정하고 있다. 또한 도형의 이동이나 변형과 같은 조작은 전혀 다루지 않는 것도 유클리드 기하학의 특징의 하나이며 해석 기하학을 거쳐 사영 기하학에서는 동적인 입장에서 이를 적극적으로 다루고 있다.

여섯째, '공리 5: 전체는 부분보다 크다.'는 것은 유한 집합에서는 성립하지만 무한 집합에서는 성립하지 않는다. 사실 무한 집합의 개념은 진부분 집합으로서 전체 집합과 원소의 개수가 같은 성질을 가진 것으로 특징 지워진다.

일곱째, 유클리드의 원론에서는 많은 명제에서 선분이나 면적이 같다는 표현을 쓸 때 양으로서의 선분, 면적이지 수로서는 취급하지 않았다. 따라서 피타고라스의 정리도 면적에 관한 것이며 변의 길이라는 수치에 관한 정리로는 고려되지 않았다. 사실 수와 양에 대한 동일시를 적극적으로 다룬 것은 바로 다음에 등장하는 해석 기하학의 공헌이다.

여덟째, 유클리드 기하학에서는 주로 직관에 의해 직접적으로 대상을 탐구한다. 즉 그림을 통해 기하학을 이해하고 문제를 해결하고자 하였다. 그러나 앞에서 언급한 바와 같이 당시의 논증은 개념적으로나 방법적으로 충분하지 않았기 때문에 오류를 범하기 쉬웠다. 이러한 방법상의 결함은 좌표를 사용하는 해석기하학에 이르러 대수적으로 다룸으로써 상당히 극복되었다.

1-3. 해석 기하학

(1) 성립 과정

해석 기하학은 수와 양의 동일시를 통한 유클리드 기하학의 대수적 고찰이라 할 수 있기 때문에 해석 기하학의 탄생을 위해서는 16세기 비에트 등에 의한 대수적인 처리 과정과 기호의 발달을 기다려야 했다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 이러한 기호 대수학의 형성에 힘입어 17세기에 이르러 데카르트와 페르마에 의해 좌표를 사용한 해석 기하학이 등장하였다.

이후에는 18세기에 오일러가 2차곡선론을 다룬 것 외에는 별 진전이 없는 반면에 좌표를 사용하지 않는 종합 기하학은 유클리드 기하학을 개선하려는 입장에서 사영기하학의 탄생, 비유클리드 기하학의 발견 등 눈부신 발전을 이룩하였다(해석 기하학은 종합 기하학의 대구로서 좌표 기하학이라 불리기도 한다). 이러한 시기에 해석 기하학을 크게 발전시킨 사람은 19세기의 플뤼커이다[이종우, 1998].

이와 더불어 해석 기하학의 좌표 도입은 고차원의 도형이나 공간의 표현을 가능하게 하였다. 즉 n차원의 도형이나 공간은 좌표에 의한 성분의 수를 n개로 하여 쉽게 표현할 수 있는 것이다. 이로 인해 해석 기하학은 19세기에 케일리, 실베스터, 클리포드, 그라스만, 리만 등에 의해 전개된 고차원 기하학의 발전에 크게 공헌을 하였다[이종우, 1998]. 한편 해석 기하학은 동시대에 출현한 미분 적분학에 힘입어 19세기에 미분 기하학의 탄생으로 이어진다.

(2) 특징

유클리드 기하학과 해석 기하학의 특징을 비교하면 근본적인 차이는 단적으로 고찰 방법에 있다. 말하자면 유클리드 기하학이 직관에 의한 초등 기하학적 고찰을 한 것인데 비해 해석 기하학은 좌표에 의한 대수적 고찰을 통하여 기하학을 연구하고자 한 것이라 할 수 있다. 대수적 고찰이란 기호법과 연산 기호를 사용하여 관계 논리에 바탕을 둔 수학적 관계를 다루는 추상적인 고찰 방식을 말한다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998].

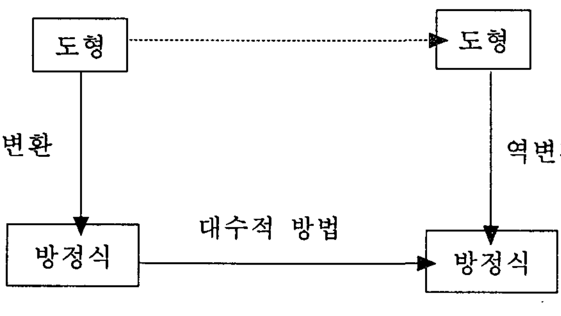
이러한 고찰 방법의 전환은 좌표에 의한 수와 양의 동일시에 의거한다. 가령, 수직

선 위에 좌표를 도입하여 점과 실수를 동일시함으로써 직선은 1차방정식과 동일시된다. 또한 유클리드 평면은 직교 좌표계를 도입함으로써 순서쌍 전체의 집합 $R^2 = (x, y)|x,\ y \in R$과 동일시할 수 있다. 이로 인해 기하학은 대수적 방법에 의해 직관에 의한 도형의 연구에서 범하기 쉬운 방법적 오류를 피할 수 있고 대수학은 기하학적 해석을 통해 대수 연산에 의미를 부여할 수 있게 되었다.

두 고찰 방법의 차이는 그리스 시대의 고전적 논리주의와는 다른 근대적 합리주의에 기인한다. 전자는 절대적인 진리를 추구하는 반면에 후자의 입장은 방법적 회의나 부정, 비판을 통해 고찰 방법의 확실성에 주목한다. 이러한 의미에서 이들의 차이는 [박홍경, 1994]에서 언급된 고전적 진리관과 근대적 진리관의 차이에 대응한다.

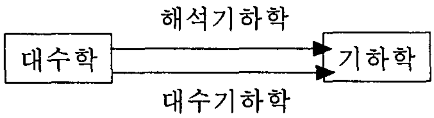
초등 기하학에서 대수적 방법으로의 전환은 2가지 측면에서 그 의의를 찾아볼 수 있다. 하나는 기하학의 연구 대상인 도형과 대수학의 연구 대상인 방정식이 동일한 대상의 다른 표현임을 깨닫게 해 주는 전기를 마련해 주었다. 즉 방정식은 도형의 대수적 표현으로 볼 수 있으며 도형은 방정식의 그래프로 간주할 수 있었다. 이로 인해 기하학의 연구 대상은 크게 확대되었다. 실제 17세기 이후로 많은 여러 도형의 방정식들이 발견되었다. 이러한 의미에서 유클리드 기하학이 정적인 것에 비해 해석 기하학은 소박하지만 동적인 기하학이라고 할 수 있다.

다른 하나는 이러한 방법적 전환은 보다 일반적으로 문제 해결 전략에 있어서 해결 기법이라는 중요한 발전으로 이어졌다는 것이다. 해결 기법이란 기존의 방법으로 풀기 어려운 경우에 이를 다른 방법으로 변환(transform)하여 풀고(solve) 다시 이를 원래의 방법으로 역변환(inverse transform)하는 것을 말한다[Kurita, 1972; 이종우, 1998]. 이러한 의미에서 해석 기하학은 기하학의 대수적 해결 기법이라 할 수 있다. 즉 <그림 1>과 같이 기하학의 문제를 대수적 방법으로 변환하여 해결하고 다시 이를 기하학으로 재해석하는 기법인 것이다.



<그림 1> 대수적 해결 기법

그리하여 기하학의 해결 기법의 역할로 대수학은 선형 대수학 등 큰 발전의 계기가 되었다. 또한 해석 기하학은 기하학의 대수화로 시작하였지만 역으로 대수학의 기하학화도 가능하게 되어 대수학과 더불어 기하학이 함께 발전하는 동인이 되었다. 사실 대수 기하학은 이러한 사고방식으로부터 발전한 것이라 할 수 있다[박홍경 외 3, 2002]. 대수학과 기하학의 이러한 상호 작용은 <그림 2>와 같이 도시할 수 있다.



<그림 2> 대수학과 기하학의 상호 작용

한편 해석 기하학은 유클리드 기하학의 방법적 개선이라는 기하학의 발전에만 국한하지 않고 수학 전반에 큰 영향을 끼쳤다. 말하자면 이것은 현대 수학의 특징인 기호화, 수량화, 도형화로 향하는 근대적인 시도라 할 수 있다. 이는 해석 기하학이 대수학의 기호화를 바탕으로 기하학적 대상의 수량화와 대수적 대상의 도형화를 시도하였기 때문이다.

더욱이 물리적 표현의 기본 대상인 벡터도 해석 기하학의 대상으로 다룸으로써 기하학적으로 도시할 뿐만 아니라 대수적으로도 표현할 수 있게 되었다. 벡터는 좌표와 더불어 대수학과 기하학을 결합하는 기본적인 개념이 되었으며 선형 대수학의 성립에 기초가 되었다. 이것은 고차원 기하학의 형성과 함께 물리수학의 발전에 큰 영향을 끼쳤다.

(3) 해석 기하학의 한계와 극복

17, 8세기의 해석 기하학은 기하학의 발전뿐만 아니라 수학 전반에 적지 않은 영향을 끼쳤지만 반면에 자체적으로 여러 가지 곤란한 점을 안고 있었다. 무엇보다도 그 어려움의 첫째는 좌표의 사용 그 자체이다. 좌표 도입은 해석 기하학의 특징이지만 동시에 방법적으로는 보조물이라는 한계성을 갖고 있다. 말하자면 도형의 기하학적 성질을 밝히기 위해서는 그것이 좌표 도입에는 상관없다는 것을 보여야 한다. 이를 밝히는 것은 귀찮은 일일뿐만 아니라 때로는 간단하지도 않다. 또한 도형의 방정식을 찾는 일도 그리 만만한 일이 아니다. 게다가 대수적 해결 기법은 기하학적 통찰의 가치를 제공하는 도형적인 흥미를 느끼게 하지 않는다는 불만도 일어났다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998].

이러한 한계를 극복하기 위해 해석 기하학은 2가지 방향으로 나아갔다. 하나는 대수적 방법에 의해 도형의 일반형을 고려하였다. 도형의 방정식에 대한 일반적인 연구

는 미분 적분학의 발전을 바탕으로 19세기에 이르러 미분 기하학의 탄생을 불러일으켰다. 이 연구는 당시에는 비록 명확하지는 않았지만 도형의 결정이나 분류문제를 다루는 것이어서 종래의 도형의 성질 연구라는 입장에서 크게 진일보한 것이라 할 수 있다. 다른 하나는 도형을 직접 고찰하려는 방법적 개선이다. 이것은 사영 기하학을 정립하는 계기가 되었다. 나아가 이것은 도형의 이동이나 변형과 같은 변환의 기하학의 연구를 촉진시켰으며 19세기 말에 클라인에 의해 기하학의 체계를 사영 기하학의 세계에서 통일하려는 시도로 이어졌다.

이러한 논의를 바탕으로 유클리드 기하학과 해석 기하학을 종합적으로 비교하면 <표 1>과 같이 기술할 수 있다.

<표 1> 유클리드 기하학과 해석기하학의 비교

	유클리드 기하학	해석 기하학
내적 동인	논리적 체계화 시도	초등 기하학적 방법 개선
사상적 동인	고전적 논리주의 (공리적 형식 체계와 논증) 고전적 진리관 (절대적 진리 구현)	근대적 합리주의 (방법적 회의) 근대적 진리관 (방법적 확실성 추구)
고찰 방법	초등 기하학적 방법	대수적 방법
타 기하학에의 영향 (문제 해결)	공리적 형식 체계의 문제 : 현대 기하학의 공리적 체계 기초 초등 기하학적 방법 개선 : 해석 기하학 탄생 평행선 공준 증명 문제 : 비유클리드 기하학 탄생	도형의 방정식 일반적 연구 : 고전 미분 기하학 탄생 대수적 해결 기법의 한계 : 사영 기하학의 발전 표현의 용이성 : 고차원 기하학 성립
현대 수학의 특징	공리적 체계, 형식성 반영	기호화, 수량화, 도형화 반영

1-4. 사영 기하학

(1) 성립 과정

사영 기하학의 시작은 르네상스 시대에 등장한 투시화법에서 찾아볼 수 있으며 메르카토, 데자르그, 파스칼 등에 의해 시작되었다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 하지만 이것은 해석 기하학이 주류가 된 17, 8세기에는 별로 주목을 받지 못했다.

그러다가 해석 기하학의 한계에서 언급한 바와 같이, 18세기 후반에 이르러 대수적인 해결기법이 아니라 도형적인 흥미를 주는 종합적인 방법으로 유클리드 기하학에 사영, 절단 등의 새로운 개념을 추가하여 새로운 기하학으로서 사영 기하학이 정립되었다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 주된 연구자로는 몽주를 필두로 19세기에 퐁슬레, 슈타이너, 폰 슈타우트 등이 있다.

(2) 특징

사영 기하학의 특징은 이전의 기하학인 유클리드 기하학, 해석 기하학과의 비교를 통해 쉽게 드러난다. 사영기하학은 해석 기하학의 대수적 해결기법의 한계를 극복하려는 시도로서 시작하였기 때문에 고찰 방법이 좌표를 사용하지 않고 직접 도형을 다루는 종합 기하학이다. 말하자면 해석 기하학이 유클리드 기하학의 초등 기하학적 방법에서 대수적 방법으로의 전환으로부터 나온 것이라면 사영 기하학은 해석 기하학적 방법에서 다시 종합 기하학적 방법으로의 전환으로부터 나온 것이라 볼 수 있다.

종합 기하학적 방법이란 사영과 절단이라는 두 기본적인 조작에 의해 유클리드 기하학을 복원하려는 것이다[김용운 · 김용국, 1986]. 하지만 유클리드 평면이나 공간의 확장으로서 사영 평면이나 사영 공간의 개념을 고려하고 길이나 각과 같은 계량적인 문제가 아니라 도형의 변환 문제를 적극 다루었다는 점에서 사영 기하학은 유클리드 기하학의 변증법적 발전이라고 할 수 있다. 이러한 의미에서 사영 기하학은 적극적인 동적 기하학이다. 한편 이것은 도형의 위치에만 주목한다는 의미에서 위치 기하학으로도 불렸다[김용운 · 김용국, 1986].

<표 2> 유클리드 기하학과 사영 기하학의 비교

	유클리드 기하학	해석 기하학	사영 기하학
고찰 방법 (변증법적 입장)	논리적 체계화 시도 (정) 초등 기하학적 방법	초등 기하학적 방법 개선 (반) 대수적 방법	해석 기하학적 방법 개선 (합) 종합 기하학적 방법
연구 대상	계량 중시 정적 기하학 (자취에 의한 공간과 도형)	계량 중시, 변환 고려 소박한 동적 기하학 (좌표에 의한 공간과 도형)	변환중시 적극적 동적 기하학 (유클리드 공간과 도형의 확장)

결합 기하학의 입장에서 유클리드 기하학과 사영 기하학의 공리적 체계를 비교하면 그 차이점을 더욱 명백히 알 수 있다[이종우, 1998]. 논의를 간단히 하기 위해 평면

기하학을 대상으로 하자. 결합 기하학에서는 무정의 용어로 점, 직선, 그리고 결합관계(점이 직선 위에 있다)를 채택한다. 그리고 두 직선 위에 한 점이 존재하면 두 직선이 만난다고 하고 그렇지 않으면 두 직선은 평행하다고 한다. 또한 여기서는 순서와 합동은 논하지 않는다. 이때 다음 다섯 공리를 만족하는 점, 직선의 집합을 아핀 평면이라 한다.

(A1) 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.

(A2) 임의의 직선 l과 그 위에 있지 않는 한 점 P가 주어져 있을 때 P를 지나 l에 평행한 직선은 단 하나 존재한다.

(A3) 임의의 직선 위에는 적어도 두 점이 존재한다.

(A4) 임의의 직선에 대하여 그 직선 위에 있지 않는 점이 적어도 하나 존재한다.

(A5) 적어도 하나의 직선이 존재한다.

그러면 유클리드 평면은 위의 조건을 모두 만족하기 때문에 아핀 평면의 특수한 경우이다. 이제 다음 다섯 공리를 만족하는 점, 직선의 집합은 사영 평면이라 한다.

(P1) 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.

(P2) 임의의 서로 다른 두 직선 위에는 유일한 점이 있다.

(P3) 임의의 직선 위에는 적어도 서로 다른 세 점이 존재한다.

(P4) 임의의 직선에 대하여 그 직선 위에 있지 않는 점이 적어도 하나 존재한다.

(P5) 적어도 하나의 직선이 존재한다.

아핀 평면에서는 임의의 두 직선은 만나거나 평행하지만 (P2)에서 볼 수 있듯이 사영 평면에서는 반드시 한 점에서 만난다. 이러한 점에서 크게 다르며 사실 아핀 평면은 사영 평면으로 확장할 수 있다. 즉 아핀 평면의 각 직선에 아핀 평면의 점이 아닌 이상점을 하나씩 첨가하여 임의의 두 직선은 반드시 한 점에서 만나도록 하면 된다 [이종우, 1998]. 따라서 이들 세 기하학의 관계는 다음과 같이 도시할 수 있다.

$$\text{유클리드 기하학} \subset \text{아핀 기하학} \subset \text{사영 기하학}$$

한편 사영 기하학은 소위 동차 좌표를 사용하여 표현될 수 있다. 이것은 사영 기하학을 해석 기하학적 방법으로 연구하는데 결정적인 도구가 되었으며[이종우, 1998], 이

로 인해 많은 연구가 행해졌다.

(3) 변환군과 에를랑겐 프로그램

19세기 말에 클라인은 소위 에를랑겐 프로그램으로 알려진 강연에서 당시의 여러 가지 기하학은 각각 독자적인 과정으로 성립되었으며 나름대로의 방법으로 연구되어서 이들 사이에는 어떤 통일성도 존재하지 않으므로 통일하는 일반 원리를 찾는 것은 기하학 연구에서 매우 가치 있는 일이라고 강조하였다. 이러한 입장은 통일성을 추구한다는 점에서 보편주의라고 말할 수 있다. 그러면서 그는 기하학이란 '어떤 특정의 변환군 아래서 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문'으로 규정하였고 당시의 여러 가지 기하학을 (변환)군론의 입장에서 통일적으로 계층화하는 데 성공하였다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 가령, 당시의 가장 넓은 사영 기하학은 사영 변환군에 불변인 기하학이며 가장 좁은 유클리드 기하학은 합동 변환군에 불변인 기하학으로 규정된다. 또한 동시대에 출현한 비유클리드 기하학도 이러한 입장에서 통일적으로 다루었다. 이러한 기하학의 계통을 도시한 것이 <표 3>에 주어져 있다[박홍경 외 3, 2002]. 특히 이 계층은 6가지의 기하학적 성질(점, 선, 각, 면적, 길이, 평행성)의 불변성에 의해 명확히 구별됨을 보여 준다.

<표 3> 기하학의 계층

	점	직선	각	면적	길이	평행성
유클리드 기하학	○	○	○	○	○	○
닮음 기하학	○	○	○	×	×	○
등적 기하학	○	○	×	○	×	○
아핀 기하학	○	○	×	×	×	○
사영 기하학	○	○	×	×	×	×
공형 기하학	○	×	○	×	×	×
위상 기하학	○	×	×	×	×	×

변환 속에서 불변성이라는 입장은 동적인 상황에서 정적인 성질을 찾는 것으로서 정적 기하학인 유클리드기하학의 전통을 잇고 있다[김용운 · 김용국, 1986]. 또한 해결기법의 입장에서는 기하학적 변환이 매우 중요하기 때문에 이러한 보편주의적인 사상은 자연스럽다고 할 수 있다.

1-5. 고전 미분 기하학

(1) 성립 과정

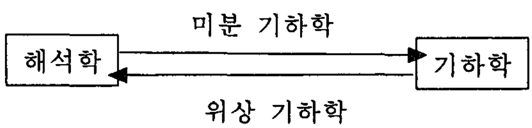
고전 미분 기하학의 기원은 미분 적분학의 출현과 맥을 같이한다고 할 수 있다. 미분 적분학은 이전에는 다룰 수 없었던 일반적인 곡선이나 곡면의 문제를 공략하는 데 매우 강력하고 효과적이었다[이종우, 1998]. 사실 미분 적분학의 탄생으로 17, 8세기에는 수학전반에 엄청난 발전이 일어났으며 당시의 상황은 마치 바다에서의 위대한 신대륙 발견에 비견할 수 있다. 이 시대를 소위 계산주의로 부르는데 그들의 목표는 보다 많은 자연의 법칙을 얻는데 있었다[박홍경, 1994].

특히, 평면 곡선에 대한 미분 기하학은 미분 적분학과 더불어 시작되었다. 이러한 고전미분 기하학은 페르마를 필두로 18세기에는 오일러, 몽주를 거쳐 19세기에 가우스에 이르러 정립되었다.

(2) 특징

고전 미분 기하학은 유클리드 공간 내의 곡선과 곡면의 성질을 미분 적분학을 사용하여 연구하는 학문이다. 넓게 보면 좌표를 사용한다는 점에서 해석 기하학적 방법을 따른다고 할 수 있다. 그러나 해석기하학이 기하학의 대수화라고 한다면 고전 미분 기하학은 이러한 대수화된 도형의 표현을 미분 적분학을 사용하여 일반적인 정칙 곡선과 곡면에 대한 성질을 연구하였던 것이다. 따라서 이전의 기하학에서는 직선 도형과 원이나 구를 구성 요소로 하는 특수한 곡선 도형을 연구 대상으로 하였으나 고전 미분 기하학에서는 미분 적분학을 도구로 하여 정칙 곡선 도형에 대한 일반적인 연구가 가능하게 된 것이다.

결국 고전 미분 기하학은 기하학의 (초등) 해석학적 해결 기법이라 할 수 있다. 역으로 해석학의 기하학화라는 입장은 19세기에 형성된 집합론과 결합하여 위치 해석학으로서 위상 기하학이 성립하는 계기가 되었다[김용운 · 김용국, 1986]. 이러한 방향으로의 선구자는 20세기에 접어들어 브라우워를 필두로 립쉬츠, 홉프 등이 있다. 특히 다양체의 개념을 중심으로 위상 기하학의 발달은 현대 미분 기하학으로 나아가는 중요한 동인의 하나가 되었다. 해석학(미분 적분학)과 기하학의 이러한 상호작용은 다음과 같이 도시할 수 있다.



<그림 3> 해석학과 기하학의 상호 작용

도형의 표현에 있어서도 차이가 난다. 유클리드 기하학에서는 도형은 자취에 의해 표현된다. 해석 기하학에서는 함수의 독립변수의 명시성에 따라 명시적 형태와 묵시적 형태로 나눠지만 미분기하학에서는 매개변수의 사용에 따라 매개적 형태와 비매개적 형태로 나뉜다. 도형의 매개 변수 형태의 표현은 미분 적분학을 적용하는 데 더욱 편리할 뿐만 아니라 효과적이기 때문이다.

다음에 다루는 현대 미분 기하학을 포함하여 미분기하학을 중심으로 사상, 고찰 방법, 연구대상, 표현 및 현대 수학의 특징에 관해 여러 기하학을 비교하면 <표 4>와 같다.

<표 4> 여러 기하학의 특징 비교

유클리드 기하학	해석 기하학	고전 미분 기하학	현대 미분 기하학
고전적 논리주의	근대적 합리주의	계산주의	구조주의
초등 기하학적 방법	대수적 방법	초등 해석학적 방법(미분 적분학)	고등 해석학적, 위상적, 고등 대수학적 방법
직선 도형, 특수한 곡선 도형	도형의 방정식에 의한 특수한 곡선 도형 추가	도형의 방정식에 의한 정칙 곡선 도형	추상적 도형 차원의 확장
자취	명시적, 묵시적	매개적, 비매개적	국소 매개적
공리적 체계, 형식성	기호화, 수량화, 도형화	국소적, 대역적 이론	추상성, 일반성

(3) 고전 미분 기하학의 발전

먼저 계량의 입장에서 보면 이전의 기하학은 모두 유클리드 계량을 택하고 있다고 볼 수 있다. 이러한 의미에서 고전 미분 기하학은 계량의 선택이 다양한 기하학을 낳는다는 것을 알게 해 주었다. 이러한 발상은 리만에 의해 계량 기하학을 고려하는 계기를 제공하였다. 말하자면 이것은 현대 미분 기하학의 출발점이 되었다.

또한 미분 적분학의 속성상 도형의 성질은 국소적 성질과 대역적 성질로 명확히 나누어지게 되었다. 가령, 속도, 가속도, 곡률 등은 국소적 기하학적 성질이고 전곡률에 관한 가우스・보네 정리는 대역적 기하학적 성질의 대표적인 결과이다. 오늘날 이들 연구는 각각 국소적 이론과 대역적 이론으로 불리고 있다[Millman-Parker, 1977]. 대역적 이론은 도형의 결정 및 분류이론과 함께 연구의 기본 방향이 되었다.

국소적 이론은 미분 적분학이 근본적으로 무한소 접근 방법(infinitesimal approach)을 택하는 것에 의거한다. 가령, 곡선은 무한소적으로 접선으로 간주할 수 있기 때문에 직선이 벡터라면 곡선은 접벡터로 접근한다. 그리고 곡면 위에서 계량의 정의는 무한소적으로는 접평면 위에서의 계량으로 접근한다[Gray, 1993].

또한 곡면 위의 (가우스) 곡률이 내재적 성질임이 밝혀지면서 이후의 기하학의 연구는 내재적(intrinsic) 기하학과 외재적(extrinsic) 기하학으로 나누어진다. 내재적 기하학은 곡면 내의 계량(제1기본량)만 의존하는 기하학적 성질을 다루는 것이며 외재적 기하학은 곡면 내의 계량뿐만 아니라 곡면 바깥에 있는 성질인 제2기본량에도 의존하는 성질을 연구하는 것이라 할 수 있다[Gamkrelidze, 1991; Gray, 1993].

1-6. 비유클리드 기하학

(1) 성립 과정

유클리드 기하학의 결함에서 언급한 바와 같이 비유클리드 기하학의 성립은 평행선 공준을 증명하려는 시도로부터 시작되었다. 그리하여 프톨레마이오스를 필두로 19세기까지의 모든 시도가 수포로 돌아가자 평행선 공준은 증명 불가능한 것으로서 생각하고 발상을 전환하여 오히려 이것을 새로운 공리로서 고려하여 얻어진 것이 비유클리드 기하학의 탄생이다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 이러한 발상의 전환에는 19세기의 수학적 사상을 대변하는 비판주의에 기인한다고 할 수 있다. 17, 8세기의 계산주의에 따른 수학의 엄청난 외적 발전으로 기존의 개념이나 방법이 불충분해졌고 이로 인해 개념화 문제로 눈을 돌리게 되었는데 이것이 바로 비판주의의 입장이다[박홍경, 1994].

비유클리드 기하학의 시작은 바로 초등 기하학적 방법에 의한 로바체프스키나 볼야이이다. 그들의 입장은 유클리드 기하학과는 독립적인 새로운 공리적 체계를 세우는 것이라 할 수 있다. 이후 리만은 미분 기하학적 방법을 적용하여 타원적 기하학을 제안하였다. 이 두 기하학들은 모두 유클리드 기하학과 무모순일 뿐만 아니라 푸앵카레나 클라인에 의해 유클리드 공간 내에서 모형으로서 실현될 수 있다.

20세기에 접어들어 파슈, 힐베르트, 페아노 등에 의해 유클리드 기하학을 보완하여 기하학의 현대적인 공리적 체계가 확립되었다. 그리고 민코프스키, 아인슈타인, 와일 등에 의해 비유클리드 기하학은 추상적 공간이 아니라 실재 물리적 공간의 연구임이 드러났다[김용운 · 김용국, 1986].

(2) 특징

19세기 중엽까지도 실재 물리적 공간은 유클리드 공간으로 인식되고 있었고 초기의

비유클리드 기하학의 시도는 평행선 공준의 논리적 부정(귀류법)을 통해 이루어졌기 때문에 비유클리드 공간은 단지 추상적 공간의 하나로 간주되었다. 하지만 이것은 유클리드기하학과 수학적 진리로서 논리적으로 동치일 뿐만 아니라 경험적으로도 실재 물리적 공간임이 밝혀졌다. 이러한 의미에서 기하학은 소위 [Nagel, 2001]에서 말하는 순수 기하학적 성격과 응용기하학적 성격의 양면성을 가진 것으로 이해하게 되었다.

이러한 상반된 기초 위에 상호 공존하는 두 기하학의 성립은 기하학적 사상에 큰 영향을 끼쳤다. 무엇보다도 가장 큰 영향은 '공간은 절대적으로 유일하다.'는 공간관의 변화이다. 이제 공간은 고유 명사가 아니라 하나의 보통 명사로서 고려되어 다양화되기 시작했다[김용운 · 김용국, 1986].

나아가 새로운 공간관은 이전의 수학적 진리관, 즉 고전적 진리관 - 수학은 절대적인 진리 또는 수학은 단일하다 - 이나 근대적 진리관 - 방법적 확실성, 엄밀성 확립 - 을 더 이상 주장할 수 없게 만들었다[박홍경, 1994]. 말하자면 수학은 출발점이 되는 어떤 개념을 전제로 참이 되는 공리적 형식 체계라는 소박한 진리관으로 바뀌게 된 것이다. 이것은 [박홍경, 1994]에서 말하는 구조주의적 진리관에 해당한다고 할 수 있다. 즉 궁극적인 도달점으로서의 고전적 진리관의 절대성을 포기하는 동시에 근대적 진리관에서 가정한 무한한 이성의 힘을 제한함으로써 상대적인 의미의 진리 개념을 추구한 것이다. 여기에서는 수학적 진리가 공리적 체계의 상대적인 무모순성이나 구조의 유효성에 의해 평가된다.

(3) 사영 기하학과 비유클리드 기하학

앞에서의 논의를 바탕으로 유클리드 기하학의 입장에서 두 기하학을 비교하여 정리하면 <표 5>와 같다.

<표 5> 사영 기하학과 비유클리드 기하학의 비교

	사영 기하학	비유클리드 기하학
사상	보편주의	비판주의
내적 동인	해석 기하학적 방법의 개선	평행선 공준 증명 문제
특징	유클리드 기하학으로의 변증법적 회귀 (유클리드 기하학의 확장) 변환 중시	유클리드 기하학으로부터 독립적인 체계 (절대적 공간관으로부터 해방) 계량 중시
영향	기하학의 계통화	기하학의 다양화

계량의 입장에서 사영 평면에 비유클리드 계량을 도입하여 사영 기하학의 성질을 이용하면 평면 비유클리드 거리 기하학을 구성할 수 있다. 한편 사영 기하학의 입장에서 비유클리드 기하학을 규정할 수 있다. 말하자면 평면 비유클리드 거리 기하학은 비유클리드 평면에서 그 평면의 합동 변환군에 의해 불변인 성질을 연구하는 분야로 규정할 수 있다[이종우, 1998]. 그러면 앞서 언급한 바와 같이 변환군의 입장에서는 로바체프스키와 볼야이, 리만의 기하학 및 유클리드 기하학을 각각 쌍곡선적 기하학, 타원적 기하학, 포물선적 기하학으로 나눌 수 있다. 한편 사영 공간을 더욱 확장하여 등질공간을 정의할 수 있다. 이것은 비유클리드 공간을 포함한다[M.Kurita, 1972].

1-7. 현대 미분 기하학

(1) 성립 과정

고전 미분 기하학에서 현대 미분 기하학에로의 이행의 주역은 단연 19세기경 리만이다[이종우, 1998]. 그는 가우스의 곡선과 곡면의 고전 미분 기하학에 대해 차원을 확장한 기하학을 제안하였다. 또한 이러한 의미에서 일반적인 계량을 도입하여 연구하는 계량 기하학을 정립하였다.

그의 입장은 이전의 선험적 공간관 - 공간적 질서를 규정하는 것은 선험적이다 - 으로부터 탈피하여 경험적 공간관을 따른다. 말하자면 사물과 변화 사이의 관계를 연속적 변화와 인과성의 개념을 통해 현실 세계에서 합리적으로 해결하려는 입장이다[김용운 · 김용국, 1986].

한편 고차원 기하학의 발전으로 계량을 가진 공간뿐만 아니라 사영 공간이나 리만면과 같이 계량을 갖지 않거나 불분명한 공간이 생겨났다. 이로 인해 이들을 통합적으로 다루기 위해 계량성을 버리고 연장성이라는 위상적 성질만을 고려함으로써 연속다양체라는 추상화된 개념이 형성되었다[김용운 · 김용국, 1986]. 이 다양체의 개념은 20세기 수학의 획기적인 발전을 이룩하는 중요한 요소가 되었다.

이후 20세기 초반에는 크리스토펠, 립쉬츠, 리치, 비얀키 등에 의해 텐서 기하학이 성립되었다. 이것은, 해석기하학의 한계에서도 언급한 바 있지만, 좌표계에 무관한 기하학을 전개하고자 한다는 의미에서 절대기하학이라고도 불리었다[Kurita, 1972; Iseki 외 1, 1977]. 또한 20세기 중반으로 접어들면서 계량기하학의 확장으로서 현대미분기하학의 발전의 전기가 되는 접속의 기하학이 레비-치비타로부터 시작되었다[김용운 · 김용국, 1986; 이종우, 1998]. 이것은 베일, 카르탕 등에 의해 정립되었다.

또한 대역적 이론의 연구에 있어서는 20세기 중엽 홉프를 시작으로 드 람, 호지 등에 의해 소위 조화 적분론이 성립되었다[이종우, 1998]. 이것은 외미분 형식의 이론으로부터 전개되어 나온 것으로서 소위 다양체상의 해석학의 토대가 되었다.

이제 미분기하학은 고등대수학적, 고등해석학적, 위상적 방법의 적용으로 가우스·보네 정리의 일반화로서 특성류, 지수정리, 스펙트랄 기하학 등 많은 성과가 얻어졌다 [Gamkrelidze, 1991]. 이러한 성과로 인해 해석학과 위상기하학이 유한차원 다양체를 대상으로 하나의 이론으로 통일되는 기반을 이룩하였으며 이것은 무한차원 다양체의 이론으로 나아가는 계기가 되어 위상 벡터 공간 위의 기하학이 발전하였다[Iseki 외 1, 1977].

(2) 특징

현대 미분 기하학의 가장 큰 특징은 기하학의 추상화와 일반화라고 할 수 있다. 나아가 이들은 현대 대수학이나 현대 해석학 등 현대 수학에 전반에 있어서 가장 중요한 특징이 되었다. 이를 단적으로 말하면, 먼저 기하학의 추상화를 통해 기하학의 대상은 전체로서의 공간과 부분으로서의 도형이 독립적으로 다루어지게 되었으며 이들은 모두 위상 기하학적으로 다양체라는 일반적인 대상으로서 고려되었다.

계량 기하학의 입장에서는 계량을 더욱 일반화한 접속의 개념을 도입하고 고등적인 대수적 구조 및 위상적인 구조와 연계하여 파이버 속에서의 접속 기하학을 정립하였다. 또한 리만 계량을 더욱 일반화하여 반리만 계량이나 부분리만 계량 등도 다루어졌다.

또한 고찰 방법으로는 이제 기하학에 모든 현대 수학의 방법이 적용된다고 해도 과언이 아니다. 말하자면 기하학은 다른 모든 수학적 방법을 해결 기법으로 사용하게 되었으며 이는 역으로 다른 분야들도 기하학을 해결 기법으로 적용하는 것을 말한다. 이러한 수학의 방법론적 상호 작용은 20세기 중엽을 강하게 주도한 구조주의에 기인한다고 할 수 있다. 이것은 현대 수학을 공리적 체계 위에서 전체를 구조화하려는 시도이다.

2. 결론

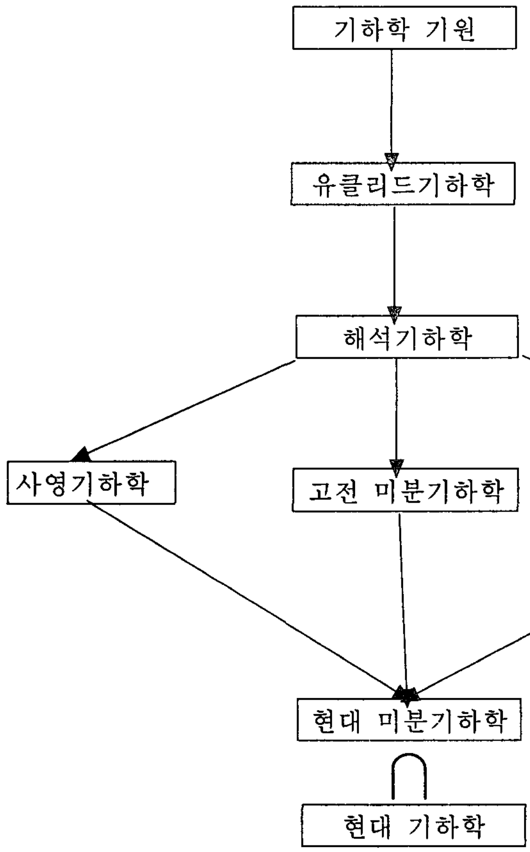
이제 수학 교육에 수학사를 활용하기 위하여 수학 지도의 순서에 대해 고려해 보자. 이를 위해서는 [김용운, 1986]에서 제안한 3가지 유형을 고려하는 것이 도움이 된다. 그것은 역사적 순서, 이론적 체계, 강의적 체계 순서이다. 첫째의 순서는 역사적인 변천 과정을 그대로 따르는 입장이고, 둘째의 순서는 역사성을 무시하고 이론의 구조성을 중시하는 입장이다.

현재 대부분의 교과서는 결론의 효과를 유도한다는 의미에서 이론적 체계를 따른다. 이를 위해 이론의 미와 힘을 강조한다. 하지만 인간의 지적 발전 과정을 보여주는

역사적 순서는 역사적인 발견의 맥락을 간접 체험함으로써 학생들의 자연스러운 학습 동기나 개념 형성에 중요하기 때문에 이를 완전히 배제할 수 없는 것은 명백하다[박홍경 외 3, 2002]. 다만 이러한 역사적 순서를 따르는 것은 오랜 시간을 요할 뿐만 아니라 이론적 체계를 형성하는 데 취약하다. 이러한 입장에서 셋째의 순서는 바로 앞의 두 순서의 결합적인 형태라고 할 수 있다.

(1) 역사적 순서

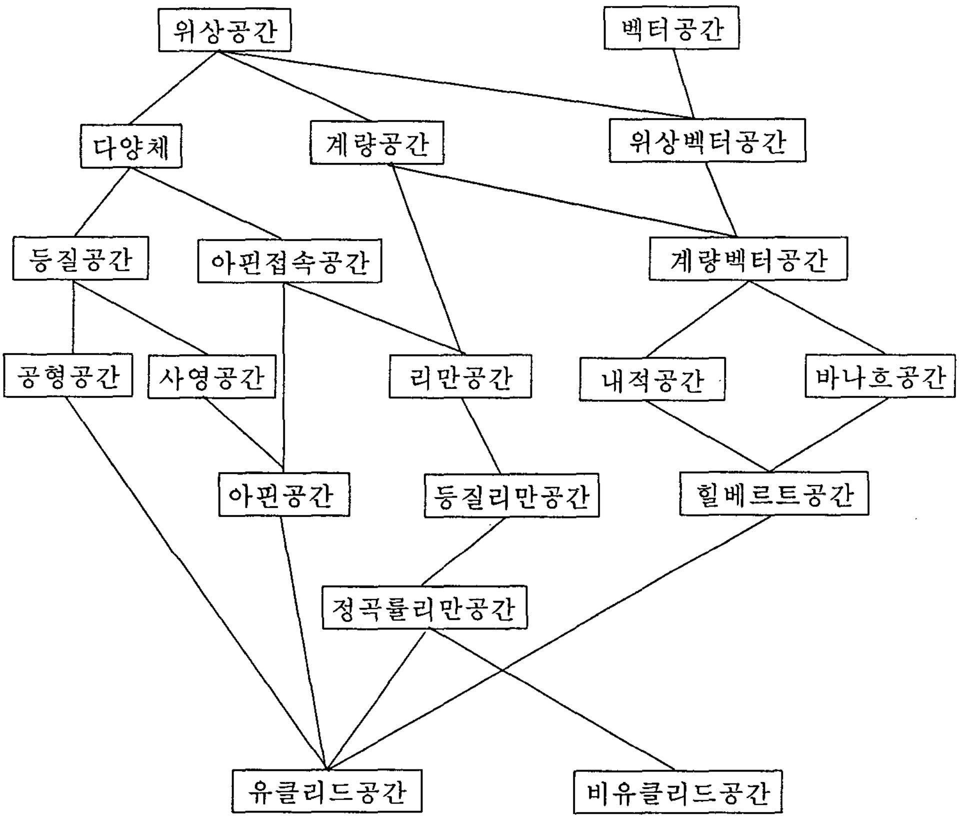
우리는 앞에서 상호 작용의 관점에서 기하학의 역사적 변천 과정을 살펴보았다. 이러한 상호 작용은 부정적이거나 긍정적인 측면으로 나뉠 수 있지만 여기서는 발전의 입장에서 긍정적인 측면을 고려하였다. 지금까지의 고찰을 토대로 기하학의 역사적 순서는 문제 해결 과정으로서 <그림 4>와 같이 도시할 수 있다.



<그림 4> 기하학의 역사적 순서

(2) 이론적 체계

이론적 체계는 이해의 측면에서 단순한 구조에서 복잡한 방향으로 나아간다. 여기서의 논의와 관련하여 기하학을 중심으로 공간의 개념에 대한 전체적인 이론적 체계를 간단히 도시하면 <그림 5>와 같다.



<그림 5> 공간 개념의 이론적 체계

(3) 강의적 체계 순서

지금까지 기하학을 대상으로 역사적 순서와 이론적 체계를 도출하였다. 이것은 실제 교육 현장에서 강의적 체계 순서를 정하는데 활용해야 할 기초적인 고려 사항이다. 그 순서를 정함에 있어 가장 중요한 관건이 '어떤 관점에서 강의를 할 것인가'라는 교사의 교육관임은 의심할 나위가 없다. 말하자면 강의적 체계 순서는 이러한 교사의 교육관에 따라 다양한 순서를 정할 수 있을 것이다. 가령, 본 논문에서와 같이

현대 기하학은 유클리드 기하학으로부터 문제 해결의 관점에서 순서를 정할 수 있는데. 사실 [박홍경 외 3, 2002]에서는 대수학의 경우에 대해 방정식의 문제 해결의 관점에서 역사적 변천 과정을 자세히 분석하였다.

참고 문헌

1. 김용운(1996), "수학사학과 수학교육," **한국수학사학회지 3**, 서울: 한국수학사학회, 21-33.
2. 김용운 · 김용국(1986), **수학사대전**, 서울: 우성문화사.
3. 박홍경(1994), "수학적 진리관의 탐색," **경산대학교논문집 12**, 경산: 경산대학교, 1-16.
4. 박홍경 · 장이채 · 김태균 · 임석훈(2002). "수학사를 활용한 수학교육," *Proceeding of Jangjeon Mathematical Society* **5**, 합천: 장전수리과학회, 73-86.
5. 이종우(1998), **기하학의 역사적 배경과 발달**, 서울: 경문사.
6. Gamkrelidze, R.V.(1991), *Geometry I*, Berlin: Encyclopaedia of Mathematical Science, vol. **28**.
7. Gray, A.(1993), *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Tokyo: CRC Press, Inc..
8. Iseki, K. · Kindo, M.(1977), **現代數學 - 成立と課題**, 東京: 日本評論社.
9. M. Kurita, M.(1972), **現代幾何學**, 東京: 筑摩書房.
10. Millman, R.S. · Parker, G.D.(1977), *Elements of Differential Geometry*, New Jersey: Printice-Hall, Inc.
11. Nagel, E./전영삼 역(2001), **과학의 구조 I**, 서울: 아카넷.
12. Rucker, R./김량국 역(2001), **사고혁명**, 서울: 열린 책들.

On Education of Mathematics Using the History of Mathematics II

- Focused on geometry -

Dept. of Computer & Information Security, Daegu Haany Univ. **Hong Kyung Pak**
Dept. of Mathematics Education, Shilla Univ. **Tae Wan Kim**
Dept. of Mathematics Education, Chonnam National Univ. **Inchul Jung**

It has been always the issue to discuss 'how we teach mathematics' for the mathematical learning. As for an answer to this, it was suggested to use the history of mathematics. The reason is simple that is, the education of mathematics requires to understand mathematics and to know the history of mathematics is effective for mathematical understanding. In particular, the history of algebra was discussed to some extent as an illustration.

This study focuses on the history of geometry from this point of view. We review the history of geometry by comparison in terms of three criteria from the origin of geometry to modern differential geometry in the middle of the 20th century, which are backgrounds (inner or outer ones), characterizations (approach, method, object), influences to modern mathematics. As an application of such historical data to the education of mathematics, we pose the problem to determine the order of instruction in mathematics.

Key words : History of geometry, Mathematics education, Order of instruction
2000 Mathematics Subject Classification : 97-03, ZDM Csification : G19