한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 37-44

깊이의 식과 토르 게임에 대하여

건국대학교 수학교육과 최상기
schoi@konkuk.ac.kr

힐베르트 시지지 정리와 그에 따른 분해에서 호몰로지 대수의 흔적을 찾을 수 있다. 1950년대에 이르러 대수 위상의 발달과 함께 그의 이론적인 도구로서 호몰로지 대수의 실질적인 시작을 볼 수 있다. 1956년 쎄레는 정칙 국소환의 대역적 차원이 유한하다는 것을 증명하였는데, 이 정리는 호모로지 대수적인 문제 풀이에서 근본적인 도구를 제공하고 있다. 호모로지 대수에서 토르를 구하고 그의 깊이를 계산하는 것은 어려운 문제인데, 이 논문에서는 1961년 오슬랜더가 제시한 토르 가군의 깊이에 관한 문제와 그에 따른 토르 게임(Tor game)에 대하여 논하고자 한다.

주제어 : 호몰로지 대수, 대역적 차원, 깊이

0. 호몰로지 대수의 시작

가환 대수는 정수론이나 대수 기하와 같이 수에 대한 이해와 방정식의 풀이를 그 관심 분야로 하고 있으며, 가환 대수의 시작은 1890년대에 발표된 힐베르트의 세 정리인 기저 정리(Hilbert basis theorem), 근의 정리(Hilbert Nullstellensatz), 시지지 정리(Hilbert syzygy theorem)에서 찾을 수 있다.

정리 1. (힐베르트 기저 정리, 1890년 [6]) F가 체이거나 정수환일 때, F를 계수로 하는 다항식환 $F[x_1, \cdots, x_n]$의 모든 이데알은 유한 생성원을 갖는다.

환 R의 모든 이데알이 유한 생성될 때, 뇌터환이라 하며, 힐베르트의 제자인 뇌터(Emmy Noether)에 의하여 추상화되어 그 이론이 발전되어 왔다. 힐베르트의 기저 정리는 불변 이론(invariant theory)의 기본 정리이기도 하다.

1799년 가우스는 일변수 복소계수 다항식이 복소수체에서 근을 갖는다는 대수학의 기본 정리는 발표하여 대수와 기하를 연결하는 기본 고리를 마련하였는데, 힐베르트

의 영집합의 정리는 이를 다변수 다항식에 확장하여 대수와 기하가 연결될 수 있도록 하고 있다.

정리 2. (힐베르트 영집합의 정리 [7]) F가 대수적으로 닫힌 체이고 유한 개의 다항식 $f_1, \cdots, f_m \in F[x_1, \cdots, x_n]$이 진부분(proper) 이데알을 생성할 때, 연립 방정식 $f_1 = \cdots = f_m = 0$은 F^n에서 근을 갖는다.

대수 위상의 호몰로지 이론에서 비롯된 호몰로지 대수는 1950년대에 체계화된 연구가 시작되었다. 그러나 1890년에 발표된 힐베르트 시지지 정리는 다항식환 위에서 가군들의 분해(resolution)의 길이가 유한하다는 것을 보임으로써 호몰로지 대수가 시작할 수 있게 하였다.

정리 3. (힐베르트 시지지 정리, 1890년 [6]) R이 체 F를 계수로 하는 다항식환 $F[x_1, \cdots, x_n]$이고, M이 R 위에서 차수가 붙은(graded) 유한 가군일 때, M의 분해의 길이는 n 이하이다.

주어진 가군 M이 길이가 유한한 분해를 가질 때, 분해에 있는 자유 가군 사이의 선형 함수는 행렬로 나타낼 수 있으며, 바로 이 행렬들이 M에 관한 문제를 선형화해서 풀 수 있는 방법을 제공한다. 이와 같은 의미에서 호몰로지 대수를 간단히 설명할 때, 체를 스칼라로 하는 선형 대수와 비교하여 환 위에서의 선형 대수라고 말한다.

1949년 그뢰브너(Groebner)는 정리 3의 경우에 분해에 있는 i번째와 $i-1$번째 자유 가군 사이의 선형 함수를 나타내는 행렬을 표현하기 위해서는 i개 이상의 변수 x가 필요하다는 것을 증명하였다[6]. 따라서 그뢰브너의 결과는 힐베르트 시지지 정리를 다시 증명하고 있으며, 그의 결과는 그리피스·에반스의 시지지 정리[5]로 이어진다.

위에서 논의된 힐베르트의 결과들은 다항식 환에서 증명되었는데, 이는 국소환(local ring)에 관한 결과들로 자연스럽게 이어진다. 1930년대에 크룰(Wolfgang Krull)은 차원(Krull dimension)을 정의하고 국소화의 과정(localization)을 도입하여 힐베르트에 의하여 시작된 가환 대수의 이론적인 기초를 세운다. 국소환이란 극대 이데알이 하나뿐인 환을 말하는데, 주어진 방정식을 풀 때 그 방정식들을 나타내는 다항식을

포함하는 소이데알에 관하여 다항식환을 국소화하여(localize) 간단히 얻을 수 있다. 국소화란 대수적으로 그 소이데알에 속하지 않는 원소를 분모로 하는 분수들에 관한 셈이며, 기하적으로 그 소이데알이 정의하는 영집합에 국소화하여(초점을 맞추어) 문제를 푸는 것이다. 국소화의 기법은 한점의 부근에, 또는 하나의 소이데알에 초점을 맞추어 문제를 단순화시키는 과정이다.

크룰은 더 나아가 국소환의 완비화(completion)를 도입한다. 국소환 (R, m)의 두 원소 a와 b에 대하여 거리 d를 $d(a, b) = \frac{1}{2^n}$, $n = \max\{i \mid a - b \in m^i\}$로 정의하고, 이 거리에 대하여 R을 완비화하여(complete) 완비화된 국소환 $\widehat{R}$을 얻는다. 완비화는 다항식의 계산을 형식적 멱급수(formal power series)의 계산으로 바꾸며, 국소화보다도 적극적으로 한 점의 근방에 초점을 맞추어 계산을 단순화시킨다. 예를 들어 형식적 멱급수환 $F[[x_1, \cdots, x_n]]$에서는 국소환 $F[x_1, \cdots, x_n]_{(x_1, \cdots, x_n)}$보다도 더 원점 부근에서의 계산을 간단히 할 수 있다. 더욱이 1940년대 초, 코헨에 의하여 모든 완비화된 국소환(complete local ring)은 멱급수환 $F[[x_1, \cdots, x_n]]$의 치역으로 표시될 수 있다는 표현 정리가 완성됨으로써(F는 체이거나 discrete valuation ring), 구체적으로 표현되는 멱급수환을 따라 문제를 풀 수 있는 길을 마련하였다. 이제는 다항식환을 국소화하고, 그 국소환의 극대 이데알에 대하여 완비화하는 과정은 방정식의 풀이에서 첫 단계이자 표준적인 방법으로 자리하고 있다[9, p. 49].

국소환 위에서는 사영 가군이 자유 가군이 되며, 따라서 분해에서 함수는 행렬로 나타난다.

정리 4. (카플란스키, [12]) 국소환 (R, m) 위에서는 사영 가군은 자유 가군이다.

국소환 (R, m)에서 m의 최소 생성원의 개수인 $\dim m/m^2$은 항상 $\dim R$보다 크거나 같은데, $\dim R = \dim m/m^2$일 때, R을 정칙 국소환(regular local ring)이라 한다. 환 R의 모든 가군의 사영 차원의 최고상계(supreme)를 R의 대역적(global) 차원이라 부르는데. 힐베르트 시지지 정리는 정칙 국소환의 대역적 차원이 유한하다는 쎄레의 정리로 이어진다. 이 정리는 호몰로지 대수에서 선형 대수적인 계산을 가능하도록 하는 기본 정리 중 하나이다.

정리 5. (쎄레, 1956년 [14]) (R, m)이 국소환일 때, R 위의 모든 가군의 사영 차원

이 유계라는 사실, 즉 R의 대역적 차원이 유한하다는 것은 R이 정칙인 것은 동치이다.

정리 5는 호몰로지 대수에서 선형 대수적인 계산을 가능하도록 하는 기본 정리 중 하나이다. 즉, 완비화된 국소환은 정칙 국소환의 치역으로 표현되고, 정칙 국소환 위에서 나타나는 유한 분해는 선형 대수적인 풀이를 가능하도록 하는 것이다.

선형 대수에서는 가환 대수에서 고려되는 여러 차원들, 크룰 차원, 사영 차원(projective dimension), 단사 차원(injective dimension), 대역적 차원 등이 모두 0으로 나타난다. 이는 체가 크룰 차원이 0인 정칙 국소환이고, 체를 스칼라로 하는 모든 벡터공간은 자유 가군이며 또한 단사 가군(injective module)이기 때문이다.

유일 인수 분해의 문제는 다항식환에 대한 가우스(1800년)의 결과 이후로 계산에 있어 주된 문제였는데, 1940년대에는 멱급수환의 유일 인수 분해성과 정칙 국소환이 유일 인수 분해 정역(UFD)인가 하는 문제가 대표적인 미해결 문제였다. 1958년 오슬랜더와 부수바움은 호몰로지 대수적인 방법으로 정칙 국소환 이 유일 인수 분해 정역임을 보였는데, 이는 이론적으로 체계화되던 호몰로지 대수가 그 위력을 나타낸 최초의 결과라 할 수 있다.

정리 6. (오슬랜더-부수바움, 1959년) 정칙 국소환 (R, m)은 유일 인수 분해 정역(UFD)이다.

위의 결과는 국소환이 아닌 정칙 정역(regular domain)에서는 성립하지 않는다. $Z[\sqrt{-5}]$는 모든 소이데알에 관하여 국소화하면 정칙 국소환이 되는 정칙 정역이나 그 자신은 유일 인수 분해 정역이 아니다. 즉, $Z[\sqrt{-5}]$에서 다음과 같은 유일하지 않는 인수분해가 있다.

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

1. 깊이의 식과 토르 게임

국소환 (R, m)에서 가군 M에 대하여 극대 이데알 m의 원소 $x_1, \cdots, x_n$이 x_1이

M의 영인자가 아니면서, 모든 i에 대하여 x_i가 $M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M$의 영인자가 아닐 때, $x_1, \cdots, x_n$을 M-수열이라 한다. M-수열들의 길이의 최대값을 depth M으로 정의한다. 일반적으로 depth M은 dim M 이하이며, depth M은 $Ext_R{}^i(R/m, M) \neq 0$인 최소의 i가 된다. 호몰로지 대수의 많은 결과들이 사영 차원과 깊이(depth)에 관한 귀납법으로 증명되는데, 오슬랜더-부수바움의 공식이라고 불리는 다음의 정리도 사영 차원과 깊이에 관한 귀납법으로 증명되었다.

정리 7. (오슬랜더-부수바움의 공식, 1957년 [2]) 국소환 (R, m) 위에서 유한 가군 M의 사영 차원 pd M이 유한하면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{depth}\, M + \mathrm{pd}\, M = \mathrm{depth}\, R$$

오슬랜더-부수바움의 공식은 유한 사영 차원 가군을 연구하는 데 기본적인 도구가 되며, 이 경우 사영 차원에 대한 수학적 귀납법이 증명 방법으로 고려된다. 오슬랜더-부수바움의 공식에 대한 수많은 일반화와 변형이 이제까지 나타났는데 그 중 하나는 토르(Tor) 가군의 깊이에 대한 연구로 오슬랜더 자신에 의하여 시작되었다. 오슬랜더가 그의 논문[Au]에서 제기한 다음의 문제는 '깊이의 식'이라 불리며, 이후 40년 넘게 미해결이 문제로 남아있다.

문제 8. 국소환 (R, m) 위에서 두 유한 가군 M과 N에 대하여 M의 사영 차원이 유한할 때, 다음이 성립하는가?

$$\mathrm{depth}\, M + \mathrm{depth} \mathrm{N} - \mathrm{depth}\, R = \mathrm{depth}(\, Tor_s(M, N)) - s$$

$$(s = \sup\, \{i \mid Tor_i(M, N) \neq 0\})$$

정리 9.(오슬랜더, [1] Theorem 1.2) $s = 0$이거나 $\mathrm{depth}(\, Tor_s(M, N)) \leq 1$이면, 문제 8이 성립한다.

정리 9는 문제 8을 위와 같이 극히 제한된 경우에 성립함을 증명하였지만, 오슬랜더-부수바움의 공식을 일반화하고 있다. 즉, $N = R/m$으로 하면, 다음이 성립한다.

$$\operatorname{depth} N = \operatorname{depth}(Tor_s(M, N)) = 0$$

이어서 정리 9가 성립하며, $s = \operatorname{pd} M$이므로 문제 8의 식은 오슬랜더-부수바움의 공식을 포함하고 있다. 문제 8은 일반적으로 성립하지 않으며, 그에 대한 반례는 무티에 의하여 발견되었다[13, p. 565].

스펙트럼 수열(spectral sequence)은 문제 8의 답을 주고 있는데 다음과 같다.

정리 10. 국소환 (R, m) 위에서 두 유한 가군 M과 N의 사영 차원이 유한할 때, $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R \geq -s$이며, $Tor_s(M, N)$의 관련 소이데알이 $\operatorname{depth} R$과 길이가 같은 R-수열을 가지면, 등호가 성립한다.

증명. $\operatorname{depth} R = n$이라 하고, R-수열 $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$을 택한다. 이제 다음과 같은 스펙트럼 수열을 생각한다.

$$Tor_i(M, Tor_j(R/(\underline{x}), N)) \Rightarrow Tor_{i+j}(R/(\underline{x}), M, N)$$
$$Tor_i(R/(\underline{x}), Tor_j(M, N)) \Rightarrow Tor_{i+j}(R/(\underline{x}), M, N)$$

여기에서 N의 최소 분해를 고려하면, 다음을 얻는다.

$$Tor_{\operatorname{pd} N}(R/(\underline{x}), N) \neq 0, \quad Tor_{\operatorname{pd} M}(M, Tor_{\operatorname{pd} N}(R/(\underline{x}), N) \neq 0$$

또한, $i \geq n+1$이거나 $j \geq s+1$이면, $Tor_i(R/(x), Tor_j(M, N) = 0$ 이므로, $\operatorname{pd} M + \operatorname{pd} N - \operatorname{depth} R \leq s$이고, 이식에 오슬랜더-부수바움의 공식을 적용하면, $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R \geq -s$을 얻는다.
이제 소이데알 p를 R-수열 $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$을 포함하는 것으로 택하면, $Tor_n(R/(\underline{x}), Tor_s(M, N)) \neq 0$이므로, $n + s = \operatorname{pd} M + \operatorname{pd} N$이다. 오슬랜더-부수바움의 공식에 의하여, 다음이 성립한다.

$$\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R = -s$$

문제 8은 토르 가군의 깊이의 값을 제시한 최초이 문제인데, 그의 변형으로 토르 게임(Tor Game)이라 불리는 다음의 문제가 제시되었다.

문제 11. [C-I p3137] 국소환 (R, m) 위에서 두 유한 가군 M과 N에 대하여 M의 사영 차원이 유한할 때, 다음 식이 성립하는 i가 적어도 하나 존재하는가?

$$\operatorname{depth} N - \operatorname{pd} M = \operatorname{depth}(Tor_i(M, N)) - i$$

문제 12. 국소환 (R, m) 위에서 두 유한 가군 M과 N에 대하여 M의 사영 차원이 유한할 때 $s = \sup\{i \mid Tor_i(M, N) \neq 0\}$라 하면,

(1) $\operatorname{pd} M - \operatorname{depth} N - s$의 상한을 구하여라.

(2) $\operatorname{depth} Tor_s(M, N) = 2$인 경우, $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - \operatorname{depth} R$의 값을 구하여라.

참고 문헌

1. Auslander, M., "Modules of unramified regular local rings," *Illinois J. Math.* 5 (1961), 631-647.
2. Auslander, M. · Buchsbaum, D., "Homological dimensions in local rings," *Trans. Amer. Math.* 85(1957), 390-405.
3. Avramov, L. · Gasharov V. · Peeva I., "Complete intersection dimension," *Pulb. Math. I.H.E.S.* 86(1997), 67-114.
4. Choi, S. · Iyengar, S., "On a depth formula for modules over local rings," *Comm. Algebra* 29(2001), 3135-3143.
5. Evans, G. · Griffith, P., "Syzygies," *LMS* 106(1985), Cambridge Univ. Press.
6. Groebner, W., *Moderne Algebraische Geometrie*, Berlin, Springer, 1949.
7. Hilbert, D., "Uber die Theorie der algebraischen Formen," *Math. Ann.* 36(1890), 471-534.
8. Hilbert, D., "Uber die vollen Invariantensysteme," *Math. Ann.* 42(1893), 313-373.
9. Huneke C., "An algebraist commuting in Berkeley," *Math. Intelligencer* 11, No. 1(1989), 40-52.
10. Huneke C. · Wiegand R., "Tensor products of modules and the rigidity of Tor," *Math. Ann.* 299(1994). 449-476.
11. Huneke C. · Wiegand R., *The Tor game*, preprint.
12. Kaplansky, I., "Projective modules," *Ann. Math.* 68(1958), 372-377.
13. Murthy, M., "Modules over regular local rings," *Ill. J. Math.* (1963), 7, 558-565.
14. Serre, J.P., "Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noetheriens," *Proc. Intern. Symp. Tokyo-Nikko* (1956), 175-189.

On Depth Formula and Tor Game

Department of Mathematics Education, Konkuk University **Sangki Choi**

Homological algebra has emerged and developed since 1950s. However, in 1890's Hilbert investigated the resolutions in his Syzygy Theorem which is a vital ingredient in homological algebra. In 1956 Serre has proved the finite global dimension of regular local rings. His result give a basic tool in homological algebra. This paper also deals with the depth formula that was raised by Auslander in 1961.

Key words: homological algebra, global dimension, depth
2000 Mathematics Subject Classification : 01A55, 01A60, 13D02, 13D05