한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 1-16

조선 시대의 방정식론*

숙명여자대학교 수학과 홍영희
yhhong@sookmyung.ac.kr

조선 시대의 산학서 묵사집산법(默思集算法), 구일집(九一集), 차근방몽구(借根方蒙求), 산학정의(算學正義) 및 익산(翼算)에 나타나는 방정식 이론을 조사함으로써, 조선 시대의 방정식론의 역사를 연구한다. 먼저 조선 산학에서 다항식과 방정식의 표현 방법의 변화를 취급한 후 방정식의 해법에 관한 역사를 다룬다.

주제어 : 조선 시대의 방정식, 묵사집산법, 구일집, 익산, 차근방몽구, 산학정의

0. 서론

인류가 사칙 연산에서부터 벗어나 수학으로 발전하는 가장 초기 단계가 방정식을 이해하고 또 그 풀이를 하게 되었다는 사실임은 잘 알려져 있다. 실제로 직사각형 모양의 밭에서 가로와 세로가 주어졌을 때 그 넓이를 구하는 문제는 실생활에서 대단히 중요한 문제이지만 넓이와 그 가로와 세로의 합이나 차를 알고 있을 때 가로와 세로를 구하는 문제는 실생활과 전혀 상관없는 방정식의 문제이다. 이를 넓이의 계산의 검산으로 이해하려는 것보다는 일종의 수학적 사유의 초기 단계로 보는 것이 타당하다. 따라서 방정식의 문제는 수학사에서 초기부터 취급되고, 그 후 대수학의 발전이 바로 방정식의 발전이라고 하여도 될 만큼 방정식론은 수학에서 가장 중요한 대상이 되었고([1], [15]), 현재도 초등학교부터 대학까지 수학의 교과 과정에서 가장 큰 비중을 차지하고 있는 분야가 방정식론이다.

서양의 방정식론과 동양의 방정식론은 문제의 접근을 제외하고는 매우 다른 역사를 가지고 있다. 그 표현 방법, 즉 다항식의 표현 방법에서도 서양의 기호화와 동양의 기호화는 매우 다르다. 천원술, 더 나아가 사원술로 발전된 중국의 다항식 표시는 계수만을 표시하는 것으로 다항식환을 나타내고 서양은 미지수를 나타내는 기호와 함께 계수와 미지수를 동시에 써서 나타내는 것이 다르다는 것도 잘 알려져 있다([14], [15]).

* 본 연구는 숙명여자대학교 2003년도 교내연구비 지원에 의하여 수행되었음.

한편 방정식의 풀이는 동서양이 전혀 다른 방법으로 접근하고 있다. 서양에서는 일찍부터 직선과 원추곡선의 교점으로 방정식의 해를 이해한 것과 인수분해를 통한 해의 접근과 후에 다항함수의 그래프를 통한 해의 접근 등을 통하여 해의 성격을 여러 가지로 이해하여 방정식에 대한 연구를 하였는데, 중국 수학은 13세기에 확립된 증승개방법(=Ruffini-Horner 방법)을 통한 근사해를 구하는 방법만 통용되고, 또 그 해도 양의 실수해만 구하는 것으로 한정되어 19세기까지([14], [15]) 방정식론은 주어진 현상을 나타내는 방정식을 구성하는 것만 취급하게 되고 방정식의 수학적 이론은 거의 취급되지 않고 있다. 복소수에 대한 정보는 전혀 없었다는 사실로도 근대 이전의 중국의 방정식 이론의 실상을 잘 알 수 있다. 그러나 주어진 현상을 취급하는 점에서는 증승개방법을 통한 근사해만으로도 충분하다는 것을 간과해서는 안 된다. 왜냐하면 근호를 사용한 무리수근은 결국 실생활에서는 근사해로 대치하여야 하기 때문이다. 중국 수학의 다항식에 대한 자료는 [3], [4], [5], [9], [12] 등을 참조한다.

우리는 서양과 중국의 방정식론의 역사에 대한 자료를 정리하여 발표하였는데([14], [15]) 이는 조선 산학의 방정식론의 역사에 대한 연구의 기초자료로 연구하였다.

이 논문의 목표는 조선 산학을 대표하는 慶善徵(=慶善行, 1616~?)의 **默思集算法**[6], 洪正夏(1684~?)의 **九一集**[16], 李尙赫(1810~?)의 **借根方蒙求**(1854)[10], **翼算**(1868)[11], 南秉吉(=南相吉, 1820~1869)의 **算學正義**(1867)[8]에 나타나 있는 방정식의 이론을 조사하여 조선 산학의 방정식에 대한 역사를 연구하는 것이다.

이들 사료를 선택한 이유는 조선 산학에서 최초의 서적인 **묵사집산법**에서부터 19세기에 가장 잘 정리된 산학서인 **익산**과 **산학정의**까지 자료를 모두 망라하고 있고, 그 밖에 한국과학기술사자료대계의 수학편[13]에 나와 있는 다른 산학서들에 나와 있는 방정식에 대한 이론은 우리가 선택한 다섯 권의 책의 내용과 큰 차이를 보이지 않기 때문이다. 물론 이들 나머지 산학서에서 취급하고 있는 방정식 이론과 우리가 선택한 산학서의 내용과의 자세한 비교도 연구할 대상인 것은 틀림없다. 1차방정식과 연립 1차방정식은 우리의 연구 대상에서 제외하기로 한다. 그 이유는 표현과 풀이 모두에서 현재의 것과 차이가 없고, 또 1차방정식은 이차항이 없는 2차방정식으로 이해하는 경우도 있기 때문이다([2], [7]).

첫째 절에서는 다항식의 표현과 방정식의 표현에 대한 역사를 다루고, 둘째 절에서는 방정식의 해법에 대한 역사를 다루기로 한다.

사료는 가능한 대로 일차 사료를 사용하고 조선 산학은 위의 자료대계를, 중국 산학은 **中國歷代算學集成**[12]을 참고하고, 이차 사료로는 [3], [5], [9]를 이용한다.

1. 조선 시대의 방정식 표현

조선 시대의 다항식과 방정식의 표현은 시대와 저자에 따라 조금씩 변화하고 있다. 특히 방정식의 이론과 정부술(正負術)을 함께 생각하고 있으면서 그 계수의 부호를 정확히 나타내지 못하고 있고 따라서 그 풀이 과정에서 혼동을 가져오게 하는 일은 19세기 산학서까지 계속되어 나타나고 있다. 이는 전통적인 사고의 틀에서 벗어나지 못하고 있기 때문인 것으로 추정된다. 실제로 제곱근과 세제곱근을 구하는 문제와 그 밖의 일반 2차방정식과 3차방정식의 문제를 모든 책에서 같은 절에 넣어 동시에 취급하고 있지만 그 풀이 과정과 표현에서 통일성을 제대로 인식하지 못하고 있고, 또 증승개방법도 같은 혼동을 나타내고 있다.

모든 문제들이 "今有" 형태, 즉 어떤 현상을 나타내는 서술형 문제(word problem)를 방정식을 세워서 풀어내는 과정을 유지하는 것은 구장산술이래 일관되는 동양 수학의 전통을 그대로 유지하고 있다. 이 경우에도 주로 기하학적인 현상, 즉 넓이, 부피, 구고정리, 즉 피타고라스 정리와 유한급수를 통하여 그 조건이 주어지고 있는 것도 전통을 그대로 유지하고 있는 한 단면이다.

구체적으로 각 산학서에 나타나 있는 다항식과 방정식의 표현에 대하여 알아보자.

1) 경선징의 묵사집산법

경선징의 묵사집산법에서 이차 이상의 방정식은 開方解隱門의 절에서 취급하고 있는데 방정식을 취급하고 있지만 이들을 모두 제곱근, 세제곱근의 풀이로 해결하고 있어서 방정식의 표현에 대하여 거의 무관하게 이들을 취급하고 있다. 주로 2차방정식은 두 변의 합, 혹은 차가 주어지고, 그 넓이가 주어 진 경우와 동치인 한 개의 1차방정식과 2차방정식으로 이루어진 연립방정식, 또는 직각삼각형의 세 변에 대한 조건을 가지고 얻어지는 2차방정식을 다루고 있는데 이들 모두 완전제곱 형태로 풀어내고 있기 때문에 방정식의 표현에 관심을 두지 않고 있다. 단지 제곱근과 세제곱근을 구하는 과정에서 나타나는 2차방정식, 3차방정식 형태를 나타내는데 2차방정식에 해당되는 것은 상수항을 實, 1차항의 계수를 方法, 2차항의 계수를 廉法으로 나타내고, 또 3차방정식의 경우는 차례로 실, 방법, 염법, 隅法으로 나타내고 있는데, 이것도 다항식으로 이해하고 있지는 않은 것으로 보인다. 다만 구장산술이래 제곱근, 세제곱근을 구하는 방법에서 나타나는 용어일 따름인데 특이한 점은 개방해은문의 유한급수의 합, 즉 삼각타의 합을[11] 알고 항의 수를 구하는 제17문의 경우 두 가지 法을 들고 있는데 그 중의 하나가 3차방정식 $x^3+3x^2+2x=50,616$을 나타내는 방법으로 50,616을 실, 2를 종방, 3을 종렴, 1을 우법("置積六之 得五萬六百一十六爲實 以二爲從方 三爲從廉 一爲隅法 一依立方開之 得合問")을 사용하고 있는데 그 다른 법과 그 나머지 문제들의 법은 같은 방법으로 다항식 표현이 제대로 되고 있지 않은 상태이다. 추측으로

이는 후에 저자가 아닌 다른 사람이 첨가하였을 가능성이 있는 것으로 보인다. 자세한 설명은 다음 절에서 취급한다.

나머지 문제들도 마찬가지인데, 방정식과 다항식의 표현과 상관없는 예를 다음과 같은 개방해은문의 제23문을 통하여 알아보자.

今有直田八畝五分五厘 只云長濶和九十二步 問長濶各幾何

答曰 長五十四步 濶三十八步

法曰 置八畝五分五厘 (四之) 以畝法二百四十通步 得八千二百八步寄位 又列和得自乘得八千四百六十四步 於內以減寄位 餘二百五十六步爲實 用平方法 開之 得十六步 是卽濶不及長 加入和 得共得一百八步 卽半之爲長也 以減十六 (卽半之) 得濶 此爲合問也

즉 이 문제는 $xy=2,052$, $x+y=92$를 푸는 것인데 묵사집산법 이후의 산학서에는 이를 2차방정식 $x^2-92x+2,052=0$으로 변환하여 해결하는데 경선징은 고법으로 알려져 있는 방법, 즉 $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$을 이용하여 제곱근을 구하는 문제로 변형하여 $x-y$를 구하고 이를 이용하여 x와 y를 구하는 것으로 풀고 있다. 따라서 2차다항식을 취급하지 않고 문제를 풀고 있다.

또 개방해은문 제26문, 즉 $xy=864$, $3x+5y=228$도 같은 방법을 써서 풀고 있다.

今有直田元積八百六十四步其長闊步也 亦無分數而 只云三長五闊共和二百二十八步 問長闊各幾何

答曰 長三十六步 闊二十四步

法曰 置共和二百二十八步子乘 得五萬一千九百八十四步寄位 又列元積以十五乘之 又四之 得五萬一千八百四十步 以滅寄位內 餘一百四十四步爲實 用平方法開之 得一十二步 加入共和 得二百四十步 卽折半得一百二十步 是爲五闊也 以五歸之 得元闊 又列二百二十八步 於內減五闊餘爲三長也 以三歸之 得元長 爲合問也

이 문제는 楊輝算法의 田畝比類乘除捷法 下卷(1275)에 나와 있는 제12문과 제13문에서 활과 장을 따로 구하는 문제의 인용인데[12, p. 964], 양휘는 위의 두 식에서 x와 y를 소거하여 2차방정식을 구하여 증승개방법을 써서 풀어놓았는데, 경선징은 그의 방법을 따르지 않고 있고, 실제로 이 문제를 풀면 (36, 24) 이외에 (40, 21.6)도 해가 되는데 이를 양휘와 경선징 모두 무시하고 있다. 이와 같이 양의 근이 여러 개 있는 경우는 조선 산학서에서 전혀 취급되지 않고 있지만, 중국 산학에서는 汪萊(1768~1813)가 그의 衡齋算學 第五卷(1810)에 처음으로 이 문제를 취급하고 그 후 李銳

(1773~1817)가 그의 開方說에서 왕래의 결과를 일반화하여 정리하였다([3], [9]).

2) 홍정하의 구일집

방정식에 관한 한 홍정하의 **구일집**은 조선 산학서 가운데 가장 많은 양의 문제를 취급하고 있다. 그 출판 연도는 알 수 없으나, 구일집의 雜錄에 1713년 윤 오월 29일(계사년, 숙종 39년)에 중국의 사신으로 온 五官司曆 何國柱와 산학에 대한 이야기를 나눈 이야기가 들어 있으므로 아마도 18세기초에 저술된 책이 틀림없다. 위의 묵사집 산법과 비교하면 방정식의 이론이 크게 발전되었음을 알 수 있고 또 천원술을 이용한 다항식의 표현과 증승개방법에 대한 이해가 완전히 이루어 졌음을 알 수 있다.

구일집에서 다항식은 제 4권에 들어 있는 毬隻解隱門, 缶瓶堆垛門, 倉囤積粟門 등 세 절과 제5권의 句股互隱門, 제6권, 제7권, 제8권인 開方各術門 上, 中, 下등에서 다루어지고 있다. 구척해은문과 창돈적속문에서는 여러 종류의 입체의 부피에 관한 문제를 다루면서 생기는 방정식들로, 부병퇴타문에서는 유한급수의 합을 알고 항의 수를 구하는 방정식들로 모두 3차 이하의 방정식들이 취급되고 있다. 또 구고호은문에서는 구고술을 사용하여 얻어지는 방정식들을 다루는데 이 경우에는 4차방정식까지 취급하고 있다. 마지막으로 개방각술문 상, 중, 하 세 권에서는 10차방정식까지 취급하고 있고 또, 증승개방법을 이용하여 방정식의 해법을 자세히 설명하고 있다.

홍정하는 구척해은문에서부터 개방식이라는 단어를 사용하여 현재 우리가 사용하고 있는 방정식을 나타내고 있다. 방정식의 표현은 구하는 미지수를 천원일로 놓고 천원술을 써서 다항식을 나타내고 있고, 또 2차방정식은 천원술을 설명하면서 상수항을 실, 1차항의 계수를 종방, 2차항의 계수를 우법이라 하는데, 다만 구척해은문은 구의 부피를 다루는 것이므로 모든 다항식이 3차식인데, 마지막 두 문제에서 구하는 방정식은 이차방정식으로 이 경우 2차항의 계수를 염법이라 하고 있다. 이는 3차항이 0인 3차방정식으로 이해하고 있는 것으로 보아야 할 것이다. 또 3차방정식의 경우도 상수항을 실, 1차항의 계수를 종방, 2차항의 계수를 종염, 3차항의 계수를 우법으로 나타내는데 부병퇴타문의 제17문까지는 상수항을 제외한 나머지 계수가 모두 正, 즉 양수인 것만 취급하고 있다. 구일집에도 다른 산학서와 마찬가지로 실에 대한 언급은 없지만 천원술로 나타내는 경우는 負, 즉 음수로 하여 계산하는 것으로 되어 있다. 이것은 상수항이 없는 다항식 $p(x)$에 대하여 방정식 $p(x)=a$ $(0<a)$인 경우만 취급하는 것이기 때문이다. 다항식 $p(x)$의 계수들이 모두 양수인 경우 2차방정식을 帶從平方法, 3차방정식을 帶從立方法이라 하고, 그 나머지 2차방정식, 즉 1차항과 2차항의 계수가 다른 것을 減從平方法이라 하고 있다.

한편 구척해은문의 마지막 두 문제에 이미 방정식이 아닌 다항식이 천원술로 나타나지만, 다항식의 계수를 본문에 설명하면서 천원술로 나타내고 있는 것은 부병퇴타

문의 제16문에서 처음으로 나타난다. 실제로 제16문과 제17문에서는 1차항의 계수를 방법, 2차항의 계수를 염법, 3차항의 계수를 우법으로 표현하고 있다. 다른 산학서와 마찬가지로 방법과 종방, 염법과 종염 등은 이와 같이 섞어 쓰고 있는 경우가 많다.

모든 동양의 산학서에서와 같이 다항식과 방정식의 표현에서 천원술이나 계수 즉 실, 종방, 종염, 우법을 써서 나타내는 데는 구별되지 않고 다만 방정식의 경우에 그 뒤에 개방식, 평방법, 입방법, 삼승방(=4차방정식), 사승방, … 등을 써서 나타내고 이 경우에 계수의 부호에 따라 대종, 감종 등의 수식어를 붙이고 "이를 풀면"(開之)을 첨가해서 구별하는 것은 구일집에도 그대로 적용되고 있다. 부병퇴타문의 제18문에 처음으로 실을 제외한 나머지 계수에 음수가 나타나기 시작하는데 이 경우 천원술의 경우는 음수의 경우에 한 자리 숫자에 사선을 첨부하여 나타내고, 종방, 종염, 우법 등의 경우에 양수인 경우에는 정, 음수의 경우에는 부의 수식어를 첨가하여 정확하게 나타내고 있다.

구고호은문의 제34문, 35문, 36문에서 네제곱근을 구하는 문제를 다루고 제39문부터 일반 4차방정식을 취급하는데 이 때 4차다항식의 상수항은 실, 1차항부터 차례로 갑종, 을종, 병종, 정종(즉 우)을 써서 나타내고 있다. 그 후 개방각술문에서 10차방정식까지 취급하는데 10차다항식의 1차항부터 10차항까지 십간인 갑종, 을종, 병종, 정종, 무종, 기종, 경종, 신종, 임종, 계종을 써서 나타내고 있다. 중국의 산학서는 이 경우 일렴, 2염, 3렴, … 등을 사용하고 있는데 홍정하는 십간을 사용하고 있다. 그는 천원술과 함께 이를 사용하고 있는데 이들의 자리를 갑위, 을위, 병위, … 등으로 나타내고 그 계수를 위와 같이 나타내고 있다. 10차다항식까지만 취급하고 있지만 그의 방법은 완벽한 다항식의 표현 방법이다.

3) 이상혁의 차근방몽구

남병길의 緝古演段[15] 및 無異解(1855)[15]와 함께 이상혁의 차근방몽구는 명대에 잊혀진 천원술 대신에 서양에서 들어온 다항식 표현 방법을 써서 방정식을 풀어내는 조선 산학서이다. 그는 수리정온에서 취급된 이 방법이 천원술과 다를 것이 없다고 하면서 이를 소개하고 있다. [14]에서 소개하였듯이 미지수를 根이라 하고, 이들의 제곱, 세제곱, 네제곱, … 등을 평방, 입방, 삼승방, … 등으로 나타내어 다항식을 표시하고 이를 푸는 방법이다. 실수 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여, a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, a_4x^4을 각각 진수 a_0, a_1근, a_2평방, a_3입방, a_4삼승방 등으로 나타내고 이들의 합을 계수가 양인 경우는 "多", 음인 경우는 "少"로 나타낸다. 이렇게 나타난 다항식 $p(x)$와 $q(x)$가 같다는 것을 $p(x)$ 與 $q(x)$等 혹은 $p(x)$ 與 $q(x)$相等을 써서 등식의 개념을 정확하게 써서 방정식을 나타내고 있다. 예를 들면 차근방몽구의 坤卷의 體類의 제15문에 "八十一平方 少十八立方 多一三乘方爲弦積與 一三乘方 多一百四十四尺

相等 八十一平方 少十八立方與 一百四十四尺相等"이 나타나는데 첫 문장은 $81x^2 - 18x^3 + x^4 = x^4 + 144$을 나타내고 양변에서 x^4을 빼서 방정식 $81x^2 - 18x^3 = 144$를 얻어내어 이를 풀면 되는 것을 설명하고 있다. 이 방법은 우리가 현재 사용하고 있는 것과 완전히 일치하고 있음을 알 수 있다. 물론 천원술에서도 등식의 성질을 사용하고 있지만 등호에 해당되는 표현이 없기 때문에 다항식과 방정식을 구별하기 위하여 위에서 언급한 대로 항상 개방식, 평방법, 입방법, 삼승방, … 등의 표현을 사용하고 이를 푼다는 문장을 첨가하고 있다. 실제로 **차근방몽구**에서도 그 전통은 남아 있어서, 위에 들은 예에서 이어서 "以縱和立方開之"등의 문장을 항상 첨가하고 있다. 차근방몽구에서는 천원술은 전혀 사용하지 않고, 이 둘을 동시에 나타내어 같은 방법인 것을 보여 준 산학서는 **무이해**이다[14].

이 표현 방법은 위의 세 산학서에 나타난 후 곧 사라지게 된다. 아마도 서양 학문에 대한 박해가 그 원인일 수 있다는 가정을 할 수도 있다.

4) 남병길의 산학정의

남병길의 **산학정의** 상편, 중편, 하편은 지금까지 취급한 산학서와 달리 "금유" 형태의 예제를 통한 산학서가 아니고 주제에 대한 정의를 먼저 하고, 그 후 그 정의를 뒷받침하는 예제로 금유 문제를 취급하고 있는 산학서로 이는 **수리정온**을 연구한 후 서양 수학과 동양 수학을 동시에 접목시킨 책으로 유명하다. 남병길은 먼저 상편에서 염법을 통한 방정식 이론을 정리하고 하편에 천원술과 다원술을 따로 분리하여 방정식을 취급하고 있다. 19세기의 조선 산학은 주세걸의 **사원옥감**이 들어오게 되어 전통적으로 연구되던 주세걸의 **산학계몽**이나 양휘의 **양휘산법**보다 발전된 산학을 연구하게 되어 그 이전의 산학과 크게 대별된다. 이 과정에서 천원술과 이것이 발전된 다원술에 대한 해설서가 주로 이상혁과 남병길의 공동 연구에 의하여 조선에 전파되게 된다[14].

먼저 2차방정식은 정사각형의 넓이에서 변을 구하는 문제, 즉 제곱근을 구하는 것에서 시작하여 직사각형의 넓이에서 변을 구하려면 두 변의 합이나 차를 알아야만 구할 수 있는 것으로 도입하여 일반 2차방정식, 즉 적어도 한 개의 양의 실근이나 두 개의 양의 실근을 가지는 2차방정식으로 정의하고 이를 帶縱平方法으로 정의한다. 전술한 홍정하의 대종평방법과 다른 정의인 것을 유의하여야 한다. 직사각형의 긴 변(=長)을 x, 짧은 변(=闊)을 y라하고 $x-y=a$, $xy=b$ (a, b는 양수)의 경우에 얻어지는 다음 방정식을 較數 帶縱法이라고 하였다.

$$y^2 + ay = b, \ \ x^2 - ax = b$$

특히 후자를 減縱 平方法으로 정의하였다.

또 $x+y=a$, $xy=b$ (a와 b는 양수)의 경우에 얻어지는 다음 방정식을 和數 帶縱法이라고 한다.

$-x^2+ax=b \quad (-y^2+ay=b)$

그러나 특이한 것은 이들 세 방정식을 모두 b를 실, a를 종렴, 1을 우법으로 나타내고 있다. 대종평방법의 제2문, 제3문은 교수 대종법의 두 가지 형태를 다루고, 제4문은 화수 대종법을 다루는데, 이 경우 모두 "法列 b爲實於上列 較(和) a爲縱廉於次置隅法一算於下"로 나타내고 있다. 교수 대종법과 화수 대종법은 "교"와 "화"에 의하여 구별되지만 교수 대종법의 두 가지 경우는 위의 방법으로 구별이 되지 않고 증승개방법을 사용하는 과정에서 1차항의 부호에 따라 달라지는 것으로 처리하고 있다. 정, 부를 엄격하게 사용하여야 한다고 강조하는 문장이 들어 있으면서 이와 같이 다항식의 계수의 부호를 무시하고 있는 것은 매우 특이하다. 이는 전통에서 벗어나지 못하고 있기 때문이다.

2차다항식은 상수항은 실, 1차항의 계수는 방, 염, 또는 종렴, 2차항의 계수는 염(1차항이 방인 경우), 우로 나타내고 있다.

3차방정식도 2차방정식과 마찬가지로 정육면체의 부피에서 변을 구하는 문제, 즉 세제곱근을 구하는 것으로 시작하여 직육면체의 부피를 알고 세 변에 대한 조건을 두 가지 주고 변을 구하는 것으로 정의하는데 이 경우 한 조건으로 두 변의 합이나 차를 주는 것은 2차방정식과 마찬가지이다. 이들에 의하여 주어지는 3차방정식을 帶縱立方法이라 부른다. 대종입방법의 경우에는 계수의 부호를 나타내어 정확하게 표시하고 있다. 3차다항식은 상수항은 실, 1차항의 계수는 縱方廉, 2차항의 계수는 縱長廉, 3차항의 계수는 우로 나타내고 이 경우 正, 負를 붙여서 계수의 부호를 나타내었다. 2차방정식은 세 가지로 분류가 되지만 3차방정식은 두 변의 차, 합이 주어지는 경우를 각각 較數 立方法, 和數 立方法으로 대별하고 3차항의 계수는 항상 양으로 주어지는 것만 취급하기 때문에 종방렴, 종장렴의 부호로 방정식을 분류하고 있는데 둘 중에 하나만 있는 경우를 帶一縱立方法이라 하고, 두 개 다 있는 경우에 그 부호가 같은 경우를 帶兩縱相同立方法, 다른 경우를 帶兩縱不同立方法으로 분류하고 있는데 실제로 문제 해결의 경우 계수의 부호를 나타내고 있어서, 증승개방법을 계산하는데 전혀 문제가 없으므로 저자는 "無異"라고 지적하고 있다.

4차 이상의 방정식을 도입하기 위하여 4차원 이상의 다면체를 귀납적으로 정의하고 이들의 부피를 각각 삼승방적($=x^4$), 사승방적($=x^5$), … 등으로 나타내어 다항식을 표시하고 있다. 예를 들어, 다음과 같은 제승방법 절의 제2문을 생각하자.

今有 五乘方積二倍 三乘方積五倍 平方積四十一倍 共數 內減 四乘方積三倍 立方積三

十倍 邊數五百倍 餘數五百二十七萬七千二百十六 問每邊數幾何

이는 다음과 같은 방정식이 된다.

$$(2x^6+5x^4+41x^2)-(3x^5+30x^3+500x)=5,277,216$$

그러므로 계수의 부호도 정확히 나타내고 또 천원술을 동시에 사용하여 이들을 정확하게 표현하고 있다.

전술한 대로 천원술과 사원술은 하편 마지막 大衍 절 앞에 천원일, 다원 두 절에서 취급하고 있다.

천원일 절에서는 먼저 천원술에 대한 정의를 하고 62개의 예문을 다루고 있다. 특이한 사실은 일반적으로 천원술 표시는 산대를 사용하고 있는데, 산학정의에서는 제1문에서만 산대 표시와 숫자 표시를 동시에 하고 나머지 문제는 모두 숫자 표시를 하고 있다. 예를 들면 천원일을 x라 할 때, 제49문의 경우 $-8,064+1,440x-76x^2+x^3$을 "八千六十四太負 一千四百四十元正 七十六平方負 一立方正", 또 제59문에서는 다항식 $9-96x+256x^2+2,500x^4$을 "九太正 九十六元負 二百五十六平方 二千五百三乘方俱正" 등으로 나타내고 있는데 이는 천원술에서 자리수를 써서 지수를 나타낼 수 있는 편리한 점을 "태", "원", "평방", "입방", "삼승방" 등으로 나타내어야 하고, 또 산대 표시에서 부호도 쉽게 나타낼 수 있는데 숫자 표시를 하고 있다. 한편 다음 절 다원에서는 두 개 이상의 미지수를 사용하므로 위의 천원술 표현 방법으로 이들을 나타낼 수 없어서, 모두 산대 표시를 사용하고 있다. 먼저 제1문에서는 천원술로 문제를 풀고 이를 차근방법으로 풀어내어 두 방법이 같음을 매우 쉬운 예에서 보여주고 있다. 제1문에서 제20문까지는 1차방정식을 취급하는데, 마지막 제20문은 상수항이 없는 2차방정식이므로 이를 1차방정식으로 변환하여 풀 수 있음을 보여주고 있다. 또 이들 대부분의 문제는 1차 연립방정식들인데 이를 천원술을 이용하여 1차방정식을 얻어내고 있는데 이미 중편에 방정 절을 두어 1차 연립방정식을 자세히 다룬 것을 보면, 이는 독자들의 천원술에 대한 이해를 돕기 위한 방편으로 이해하여야 한다.

제21문부터 제47문까지 2차방정식을 다루고 있는데, 마지막 제47문은 $a+bx^2+cx^4=0$ 형태의 4차방정식이지만 이를 2차방정식으로 변형하여 풀 수 있음을 보여주고 있다. 제21문은 교수 대종법에서 짧은 변을 구하는 방정식 $y^2+ay-b=0$을 얻어내는 과정인데 앞의 대종평방법 절에서는 기하적인 방법으로 방정식을 얻어낸 것에 반하여 천원술에서 대수적으로 얻어내고 있음을 보여주고 있다.

제48문부터 제61문까지 3차방정식을 취급하고, 이 중에 마지막 세 문제는 상수항이 없는 4차방정식으로 이를 모두 3차방정식으로 변환하여 풀고, 마지막 제62문이 4차방정식을 풀고 있다. 산학정의가 18세기 이전의 산학서와 다른 점은 이와 같이 낮은 차

수에서 높은 차수로 또 쉬운 문항에서 어려운 문항으로 배열을 하고 있는 점을 보면 전체 내용을 체계적으로 이해하고 이를 기술하고 있음을 알 수 있다.

천원일 절 마지막에 다음과 같이 천원술과 차근방법이 같음을 설명하고 있다.

按 眞數卽太也 根卽元也 多少卽正負也 是借根方法卽立天元一法 故西人謂之阿爾熱八達 譯云東來法也 但相消得式者 相消相長歸之一行 將隔行之異名變爲同名 隔行之同名變爲異名終焉 法實異號 而得異減同加式也 兩邊加減者 明其或加或減 仍歸同數之理 而已初不語到算式也

위의 내용은 남병길의 무이해에 나타나 있는 내용을 되풀이한 것이지만[14], 체계적으로 기술하고 있는 산학정의에서 적절한 자리를 차지하고 있다. 또, 등식의 양변에 같은 식을 더하거나 뺄 수 있음을 나타내고 있어서 저자가 등식의 성질을 이해하고 있음을 볼 수 있다.

다원 절에서는 사원옥감의 사원술을 설명하고 14개의 예문을 통하여 고차 연립방정식을 1원방정식으로 변환하여 문제를 해결할 수 있음을 보여주고 있다. 전술한 대로 이 절에서는 모두 산대 표시를 사용하고 있고, 처음 10 문제는 2원 연립방정식, 그 다음 3 문제는 3원 연립방정식, 마지막 제14문은 4원 연립방정식을 풀고 있다.

5) 이상혁의 익산

차근방법에서 시작한 등식으로의 방정식의 개념은 남병길의 무이해와 산학정의에서 정부상당의 개념으로 나타나고, 이를 통하여 모든 방정식을 연구한 산학서가 이상혁의 익산의 상편인 정부술이고 이에 대한 자세한 내용은 [11]에 들어 있다. 이상혁은 익산의 하편에서 유한급수의 이론인 퇴타설을 저술하였는데 이에 대한 자세한 내용은 본 논문의 범위에 벗어나므로 방정식에 관한 부분만 기술하기로 한다. 기하적인 입장에서 도입된 제곱, 세제곱은 쉽게 받아들일 수 있었지만 네제곱 이상은 귀납적으로 정의는 하였으나 그 사실을 나타내는 현상이 존재하지 않았으므로 동양의 산학자들에게는 항상 문제가 되었을 것이다. 그런데 네제곱 이상이 유한급수의 합에서 나타나게 되는 것을 처음 인지한 사람은 주세걸이고 그의 사원옥감에서 여러 종류의 다항방정식의 예로 사용되게 된다. 이를 해설하고 발전시킨 것이 익산 하편이다. 그는 유한급수를 완전히 정리하고 12개의 예문을 통하여 그의 이론을 활용하는데 처음 두 문제는 3차방정식, 제3문부터 제7문까지와 제11문은 4차방정식, 제8문부터 세 문제는 5차방정식, 제12문은 2원술을 사용하여 6차방정식을 얻어 이를 풀어 문제를 해결하고 있음을 볼 수 있다. 익산 이전의 산학서는 유한급수를 이용하는 문제를 취급하기는 하지만 3차 이하의 방정식뿐이고 이와 같이 4차 이상의 방정식을 주로 다룬 산학서는 익산이 유일하고, 이 역시 저자가 뚜렷한 동기를 가지고 체계적으로 저술하였음을 보여주고

있는 것으로 조선 산학서 중에 가장 훌륭한 산학의 수학화를 이룬 저서임을 확인할 수 있다.

2. 조선 시대의 방정식 해법

다항방정식의 해법은 구장산술에서 시작된 제곱근, 세제곱근의 풀이에서 시작하여 진구소의 **수서구장**(1247)에서 완전히 확립된 증승개방법을 사용하여 근사해를 구하는 것이 조선 산학에도 그대로 통용되고 있다. 따라서 우리는 조선 산학에서 방정식의 해법에 관하여 증승개방법 부분은 제외하고 논하기로 한다.

경선징은 그의 **묵사집산법**에서 제곱근, 세제곱근의 해법은 전통대로 사용하고 있는데 일반 2차 이상의 방정식의 풀이에 대하여는 모두 고법, 즉 완전제곱형으로 변형하여 풀거나 아니면 "用平方法 開之"라고 하였는데 그 자세한 내용은 알 수 없으나 "용평방법"의 문구로 보아 고법 형태로 풀어낸 것으로 추정된다.

그의 3차방정식의 해법을 보면 경선징은 조립제법을 이용한 증승개방법을 모르고 있는 것으로 보인다. 앞에서 기술한 개방해은문 제26문의 출처가 양휘산법 전무비류 승제첩법인 것을 감안하면 그는 틀림없이 양휘의 증승개방법을 이해하고 있어야 하는데 왜 조립제법을 쓰는 방법을 언급하지 않았는지 알 수 없다.

그의 개방해은문 절에서 취급한 3차방정식은 1절에서 언급한 유한급수의 문제 제17문과 제18문 밖에 없는데 두 문제의 풀이는 완전히 일치하므로 제17문의 해법을 들어 그의 해법과 증승개방법의 차이를 논하자. 풀어야 할 방정식은 $x^3+3x^2+2x=50,616$ 이다. 그의 풀이는 다음과 같다.

今有 三角果一垜共積八千四百三十六箇 問底脚一面幾何 答曰 三十六箇

法曰 置積六之 得五萬六百一十六爲實 以二爲從方 三爲從廉 一爲隅法 一依立方開之 得合問

法曰 置積六因 得五萬六百一十六爲實 一依立方法開之 得三十 以三十爲方面 再自乘 得二萬七千 別置 又從方法自之 仍以三箇乘之 得二千七百 別置 又從方面 只以二箇乘之 得六十 倂三位共 得二萬九千七百六十[a] 卽減於爲實積內 餘二萬八百五十六[b] 亦爲實 方面自乘三因 得二千七百 以此爲法除餘積 得六箇[c] 又有餘積 四千六百五十六[d] 別以六爲廉法三因 得一十八却 以八乘之 - 以八乘之者乃廉法內加二也 - 又以方面三十乘之 得四千三百二十[e] 以減餘積 又以六爲隅法再自乘 得二百一十六 又減餘積 又置六箇 以三箇乘之 仍添二箇 得二十 又以六因之 又減餘積 得恰盡爲合問

이 풀이는 증승개방법과 마찬가지로 초상(=30), 차상(=6)을 구하는 것은 같은데, 그 과정은 증승개방법에서 사용하고 있는 조립제법을 사용하지 않고 있다는 것이다.

즉 초상을 a, 차상을 b라 하면 그 해 $a+b$는 방정식 $x^3+3x^2+2x=50,616$을 만족하므로, $(a+b)^3+3(a+b)^2+2(a+b)=50,616$이 되고 이를 전개하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$(a^3+3a^2+2a)+3a^2b+3ab(b+2)+b^3+3b^2+2b=50,616 \quad \cdots\cdots(1)$$

그리고 $a=30$을 얻어 위의 (1)식의 첫째 항에 대입하여 29,760[a]을 얻고, 양변에서 빼면 다음을 얻는다.

$$3a^2b+3ab(b+2)+b^3+3b^2+2b=20,856^{\text{b)}} \quad (a=30) \quad \cdots\cdots(2)$$

이때, b를 추정하기 위하여 $3a^2b=2,700b$와 실 20,856을 비교하여 $b=6$[c]을 구해내었다. 따라서 (2)의 양변에서 $3a^2b=3\times30^2\times6=16,200$을 빼면 다음을 얻는다.

$$3ab(b+2)+b^3+3b^2+2b=4,656^{\text{d)}} \quad (a=30,\ b=6) \quad \cdots\cdots(3)$$

그러므로 $3ab(b+2)=3\times30\times6\times(6+2)=4,320$[e]을 구하여 식 (3)의 양변에서 빼면 다음을 얻는다.

$$b^3+3b^2+2b=336,\text{ 즉 } b^3+b(3b+2)=336$$

이에 $b=6$을 대입하여 등식이 성립하는 것을 보이고 있다. 위의 본문과 해설의 위첨자들은 대응되는 식을 나타내고 있다. 증승개방법과 마찬가지로 파스칼의 삼각형으로 알려진 전개식을 사용하고 또 인수분해를 이용하고, a에 대한 내림차순으로 정리하여 차상을 차례로 대입하여 방정식의 해가 되는 것을 보이고 있다. 식 (1)을 b에 대한 내림차순으로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$b^3+(3a+3)b^2+(3a^2+6a+2)b+(a^3+3a^2+2a-50,616)=0$$

이는 조립제법을 써서 얻어지는 차상을 위한 방정식과 같아, 기본적으로는 증승개방법을 쓰고 있다고 할 수 있다. 제18문은 위의 식 (2)를 얻는 것은 마찬가지이지만 내림차순으로 정리하지 않은 채 항을 줄여 나가고 있는 것을 보면 내림차순으로 정리된 것은 우연일 수 있다. 이 방법은 아래에서 논할 **구일집**의 익적술에도 비슷하게 나타나고 있다.

홍정하의 **구일집**에서는 모든 방정식을 증승개방법을 사용하여 풀고 있다. 특히 그는 제곱근, 세제곱근 등을 구하는 문제도 이들을 방정식 $x^2-a=0$, $x^3-a=0$으로 놓고 이를 증승개방법으로 풀고 있는데 기본적으로 같은 방법이지만 구장산술의 제곱

근, 세제곱근 풀이와 약간의 차이가 있다([2], [7]). 즉 차상을 구하기 위한 방정식을 구하는데 증승개방법과 달리 구장에서는 그 계수를 "一退, 二退, 三退", 즉 자리수를 한 자리, 두 자리, 세 자리씩 낮추어야만 하는 번거로움이 있다. 진구소의 수서구장에서 도입된 법칙으로 소수점 이하의 해는 다음과 같은 보간법을 사용하여 구하고 있다.

지금 다항식 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x-b$에 대하여 다항방정식 $p(x)=0$의 근이 0과 1 사이에 있다고 가정하자. $(0,\ p(0))$과 $(1,\ p(1))$, 즉 $(0,\ -b)$와 $(1,\ a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1-b)$를 지나는 직선 $y=(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1)x-b$의 x 절편, 즉 $x=\dfrac{b}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}$를 해의 근사값으로 택하는 보간법을 사용한다.

앞에서 언급한 익적술은 개방각술문 상편의 제24문에 들어 있는데 산학정의의 정의대로 하면 교수대종법, 즉 두 변의 차와 넓이를 알고 두 변을 구하는 문제로 그는 두 가지 방법, 즉 긴 변, 짧은 변을 구하는 두 방정식의 풀이 및 고법과 함께 益積術을 도입하고 있다. 본문은 생략하는데 이는 [16]을 참조한다.

즉 방정식 $x^2-12x-864=0$을 $x^2=12x+864$로 변형하여 푸는데 초상을 a, 차상을 b라 하면 그 해 $a+b$는 방정식을 만족하여야 하므로, 다음이 성립한다.

$$a^2+2ab+b^2=12(a+b)+864 \quad \cdots\cdots(1)$$

즉

$$b^2+2ab=(12a-a^2+864)+12b$$

이에 $a=30$을 대입하여 다음을 얻는다.

$$b^2+2ab=324+12b \qquad (a=30) \quad \cdots\cdots(2)$$

그리고 차상 $b=6$을 얻어 (2)에 대입하여 등식이 성립하므로, 근이 구해지는 것을 익적술이라 하였다. 이때 (1)에서 $12a+864=12\times30+864=1,224$를 얻는 과정을 "익적"이라 하였는데 이는 곧 a^2을 다시 빼서 식 (2)를 얻게 된다. 또 위에 언급한 묵사집산법의 예에서와 같이 식 (2)를 다음과 같이 이항한다.

$$b^2+(2a-12)b-324=0$$

이는 주어진 방정식의 차상을 구하기 위한 방정식이다. 따라서 두 방법은 묵사집산법의 예와 같이 기본적으로 같은 것이다.

이 문제와 방법도 양휘산법의 전무비류승제첩법 하권의 제7문에 나와 있는 "益積開

方"을 인용한 것이고, 양휘는 이어서 "減從開方"으로 이 문제를 조립제법을 사용하여 풀어놓았다[12, p. 961].

남병길의 산학정의에서 a의 네제곱근은 a의 제곱근의 제곱근, 또 a의 여섯제곱근은 a의 제곱근의 세제곱근, a의 팔제곱근은 a의 제곱근의 네제곱근 또는 a의 제곱근의 제곱근의 제곱근으로 풀어 낼 수 있음을 보이고 있어서 곱의 지수 법칙 $(x^m)^n = x^{mn}$을 알고 있음을 나타내고 있다. 또 전술한 제승방법 절의 제2문에서 다음과 같은 6차방정식을 푸는 문제에서 차상을 구하는 방법으로 조립제법과 함께 다음을 사용하고 있다.

$$(2x^6+5x^4+41x^2)-(3x^5+30x^3+500x)=5,277,216$$

n차 다항방정식 $p(x)=0$에서 근의 초상을 a라 하면 차상을 구하기 위하여 조립제법을 사용하는 대신에 다음과 같은 테일러(Taylor) 급수를 이용한다.

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

그리고 다음 방정식을 통하여 차상을 구한다.

$$\frac{p^n(a)}{n!}y^n+\cdots+\frac{p''(a)}{2!}y^2+p'(a)y+p(a)=0$$

물론 각 항의 계수를 도함수의 개념을 사용하였다고 하기보다는 알고리즘으로 이들을 구하였다. 1차항의 계수를 조립제법을 써서 1,061,320을 구하고, 이어서 다음과 같은 주를 달고 있다.

卽初商數之四乘積二段六倍 立方積五段四倍 商數四十一段二倍 共數 內減三乘積三段五倍 平方積三十段三倍 及五百算之 餘數也

이는 위의 방정식을 $p(x)=0$으로 나타낼 때 다음에서 $p'(10)$을 구하고 있음을 뜻한다.

$$p'(x)=6(2x^5)+4(5x^3)+2(41x)-[5(3x^4)+3(30x^2)+500]$$

그 나머지 계수도 같은 방법의 주를 달고 있다.

이상혁의 차근방몽구는 해법에 대한 언급은 전혀 하지 않고 다만 차근방법을 사용하여 방정식을 구성하는 것만 취급하고, 또 그의 익산도 방정식의 구조만 다루고 있어서 거의 모든 산학서처럼 해법, 즉 증승개방법을 이용하는 것으로 충분하다고 생각

하고 있다.

3. 결론

동양 수학에서 가장 중요한 주제를 대별하면 계산법, 비례, 구고술, 넓이와 체적, 유한급수와 방정식인데 이 중에서 가장 중요한 주제는 역시 방정식론이다. 조선 산학에서도 이 전통은 그대로 유지되고 있고, 따라서 방정식론의 역사는 조선 산학의 역사에서 가장 중요한 주제이다. 우리는 17세기에 출판된 **묵사집산법**, 18세기의 **구일집**, 19세기의 **차근방몽구**, **산학정의**, **익산**에 나타나 있는 다항식의 이론을 조사하여 조선 산학의 방정식론의 역사를 연구하였다. 19세기에 남병길과 이상혁의 공동 연구를 제외하고는 이들 산학서에서 연속성, 즉 앞의 연구 결과에 대한 참조의 흔적은 찾을 수 없고, 중국 산학서 **산학계몽**, **양휘산법** 등의 영향을 많이 받은 것을 알 수 있다. 그러나 **묵사집산법**, **구일집**, **차근방몽구**에서는 많은 예를 통하여 스스로 그 내용을 이해할 수 있도록 구성되어 있으나, **산학정의**와 **익산**은 이론적으로 주제를 접근하고 또 이를 체계적으로 기술하고 있는 것으로 보아 저자들이 수학적 개념을 완전히 이해하고 또 이를 후학들에게 전파하려는 노력을 하고 있었으며, 또 동양의 방정식 이론을 정리하는데 어려움이 전혀 없는 것을 볼 수 있었다.

다만 인수분해나 음의 근을 취급할 수 없었다는 점과 방정식의 근의 성격 등을 취급할 수 없어서 현재 연구되고 있는 방정식론과 연결이 될 수 없음은 어쩔 수 없는 한계이다.

중국의 명대에 주산의 발전으로 산대를 이용하는 천원술, 다원술을 통한 방정식 이론이 소실되었다가 청대에 다시 이를 재발견하는 과정을 겪었지만 조선 산학에서 이들은 지속적으로 연구되어 19세기에 중국에서 이들이 다시 연구될 때 조선 산학자들은 이를 쉽게 받아 들일 수 있었다.

참고 문헌

1. I.G. Bashmakova · G.S. Smirnova, *The Beginnings and Evolution of Algebra*, MAA, 2000.
2. S. Kangshen · J.N. Crossley · A.W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford Univ. Press, 1999.
3. Y. Li · S. Du, *Chinese Mathematics, A Concise History*, tr. J.N. Crossely and A.W.-C. Lun, Clarendon Press, 1987.

4. U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, The MIT Press, 1973.
5. J-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.
6. 慶善徵, 默思集算法, 유인영 · 허민 譯, 한국수학사학회, preprint.
7. 郭書春 匯校, 九章算術, 遼寧教育出版社, 1990.
8. 南秉吉, 算學正義, 한국과학기술사자료대계, 수학편, 7券, 驪江出版社, 1985.
9. 吳文俊 主編, 中國數學史大系, 第一卷 - 第八卷, 北京師範大學出版社, 1998.
10. 李相赫, 借根方蒙求, 호문룡 역, 한국수학사학회, preprint.
11. 李相赫, 翼算, 홍성사 역, 한국수학사학회, preprint.
12. 中國歷代算學集大成 上 · 中 · 下, 山東人民出版社, 1994.
13. 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 1卷~10卷, 驪江出版社, 1985.
14. 홍성사 · 홍영희, "朝鮮 算學者 李尙赫의 方程式論," 한국수학사학회지 17(2004) No. 1, 1-14.
15. 홍영희, "다항식의 대수적 표현," 한국수학사학회지 16(2003) No. 4, 15-32.
16. 洪正夏, 九一集, 강신원 · 장혜원 역, 한국수학사학회, preprint.

Theory of Equations in Chosun Dynasty

Dept. of Mathematics, Sookmyung Women's Univ. **Young Hee Hong**

Investigating theory of equations in Chosun Dynasty mathematics books *Mooksa-jipsanbub*(默思集算法), *Guiljib*(九一集), *Chageunbangmonggu*(借根方蒙求), *Sanhakjungeui* (算學正義), and *Iksan*(翼算), we study the history of equation theory in Chosun Dynasty. We first deal with development of representation of polynomials and equations and then method how to solve them.

Key words: topological structure, uniform structure, André Weil.
2000 Mathematics Subject Classification: 01A13, 01A25, 01A55, 12-03