Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 27, No. 3, pp.26－30, September 2004.

단일 및 이중명령을 수행하는 자동창고 시스템의 성능분석

남진규 · 허 선 · 정석윤 · 김정기

한양대학교 산업공학과

A performance analysis of AS/RS with single and dual commands

Jin-Gyu Nam · Hur, Sun · Seok-Yun Jeong · Jeong-Kee Kim

Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University

We consider an AS/RS(Automated Storage/ Retrieval System) which performs both of single and dual commands. The service times of single and dual commands are assumed to be differently distributed. Steady-state probabilities at the service completion epochs are calculated. Then, we transform the arrival rates of storage and retrieval commands into those of single and dual commands. Using this, we propose a non-preemptive queueing model with priority for the performance analysis of an AS/RS, and obtain approximated means of queue lengths and waiting times.

Keywords : AS/RS, priority queueing theory, dual command, performance analysis

1. 서 론

자동창고시스템(AS/RS)은 물건을 저장하는 랙(rack)과 저장위치의 안과 밖으로 움직이는 운반대 역할을 하는 저장불출기계(Storage/Retrieval machine: S/R machine), 입출력 주문명령이 대기하는 공간인 버퍼(buffer)와 입/출력 스테이션으로 구성되어 있다.

저장불출기계는 입/출력 스테이션으로부터 랙 안으로 물품을 저장하거나 랙으로부터 보관품을 꺼내어 입/출력 스테이션으로 운반해주는 일을 한다. 또한 무거운 물건을 운반할 수 있고, 이동시간을 단축하여 목적지에 도달할 수 있도록 수평방향과 수직방향으로 동시에 움직일 수 있다. 저장불출기계는 한 번 이동에 저장 혹은 불출 중 한 가지만 수행하는 단일명령모드와, 한 번 이동에 저장과 불출을 동시에 수행하는 이중명령모드의 두 가지 처리 형태를 가지고 있다.

저장불출기계의 운용정책을 보다 현실적이고 융통성 있도록 선택하고, 자동창고시스템의 성능을 분석하기 위해서는 수리적 평가도구를 사용하는 것이 불가피하다. 자동창고시스템의 성능은 사용하고 있는 제어정책에 따라 여러 가지 다른 평가도구의 사용이 가능한데, 본 연구에서는 평균 대기중인 명령의 개수와 임의의 명령의 평균 대기시간을 성능치로 사용하고자 한다.

자동창고시스템을 확률론으로 분석하는 접근법은 Bozer와 White[2]에 의해 처음으로 소개되었으나 이들의 연구는 저장 혹은 불출명령이 언제나 서비스를 받을 수 있다는 가정을 함으로써 저장불출기계의 효율성을 과대평가하였다. Lee[4]는 대기모형을 적용하는 방법으로 자동창고시스템의 성능을 분석하였다. 여기서는 저장명령과 불출명령이 각각의 대기공간을 가지는 M/M/1 타입의 대기모형을 분석하였으나, 이 연구는 분석의 편의상 저장 및 불출에 걸리는 시간이 지수분포를 따른다는 가정을 하여 현실성을 결여하였다. Lim 등[5]은 시스템 내에 단일명령과 이중명령이 동시에 존재하는 단위부하(unit-load) 자동창고시스템에서, 각 명령의 수행시간의 분포가 동일하다고 보고 이를 M/G/1 대기모형에 의해 분석하였다.

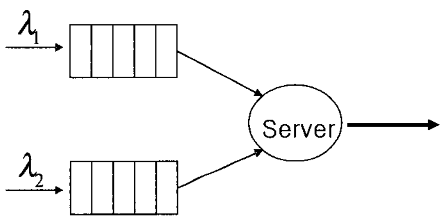
본 연구에서는 단일명령과 이중명령의 수행 시간이 서로 다른 일반분포를 따르는 단위부하 자동창고시스템의 성능을 분석하였다. 이 모형의 분석에는 이탈시점, 즉 저장 혹은 불출 명령을 끝마친 시점에서의 대기중인 명령 개수에 대한 확률분포를 우선 구한다. 이를 이용하여 저장명령과 불출명령이 시스템에 도착하는 도착률을 단일명령과 이중명령의 가상적인 도착률로 바꾸어 시스

템을 변형 시키고 이 변형된 모형은 우선순위를 가지는 비축출형 대기모형으로서 분석하였다. 이를 통해 근사적으로 임의의 명령이 시스템에 도착한 후 처리될 때까지의 평균 대기시간과, 임의시점에서 대기중인 명령들의 평균 개수를 제시하였다. 이는 기존 Lee[4]의 연구에서 명령 처리시간의 분포를 일반분포로, Lim 등[5]의 연구에서 단일명령과 이중명령의 처리시간의 분포를 동일하지 않은 경우로 확장시킨 것이며, 이를 통해 실제 시스템에의 적용 가능성을 넓혔다.

본 논문은 2절에서 모형 및 기호에 대한 설명을 하고, 3절에서는 이탈시점 고객수확률분포를 구하였고 4절에서는 3절의 결과를 근거로 근사적으로 임의 시점에서의 명령의 평균 대기시간 및 대기중인 명령의 개수를 구하였다. 마지막 5절에서는 결론 및 추후과제를 나타냈다.

2. 모형 및 기호 설명

일반적인 형태의 단위부하 자동창고시스템은 아래 <그림 1>처럼 나타낼 수 있다. 저장과 불출 등 두 가지의 명령(고객)이 하나의 저장불출기계(서버)에 의해 처리되고(서비스를 받고) 시스템을 떠나게 된다. 저장 및 불출 명령들은 각각 도착률이 λ_1과 λ_2인 독립적인 포아송 과정을 따르며 도착순간 서버가 서비스 중일 경우에는 각각 다른 대기공간에서 대기하게 된다. 여기서 각 대기공간의 크기는 무한하다고 가정하였다.



<그림 1> 단일서버와 두 개의 대기공간을 가지는 AS/RS모형

서비스 종료 직후 하나의 대기공간에만 대기 중인 명령이 있으면 서버는 그 명령만을 처리한다(단일명령 모드). 그러나 서비스 종료 직후 시점에서 두 대기공간에 모두 대기중인 명령들이 있다면, 저장과 불출을 한꺼번에 처리하는 것이 효율적이므로 다음 서비스는 대기하고 있는 두 개의 명령들을 동시에 서비스하게 된다(이중명령 모드).

고객수 분포를 유도하면서 사용하는 기호들은 다음과 같다.

λ_1, λ_2: 각각 저장명령과 불출명령의 도착률

$S_s(x), S_d(x)$: 각각 단일명령 및 이중명령 서비스 시간의 분포함수

또한 이후 과정에서 필요한 다음과 같은 확률 값을 정의한다. u_{ij} $(i, j=0,1,2,\cdots)$를 하나의 단일명령을 처리하는 동안 저장명령이 i개 도착하고 불출명령은 j개가 도착할 확률이라 하자. 이는 식 (2.1)과 같이 구해진다.

$$u_{ij}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^j}{j!}dS_s(t) \quad \cdots\cdots (2.1)$$

마찬가지로, v_{ij} $(i, j=0,1,2,\cdots)$는 하나의 이중명령을 처리하는 동안 저장명령이 i개 도착하고 불출명령은 j개가 도착할 확률이라 하면 이는 다음 식 (2.2)과 같다.

$$v_{ij}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^j}{j!}dS_d(t) \quad \cdots\cdots (2.2)$$

3. 이탈시점 고객수확률분포

3.1 전이확률 행렬

$X_n=(i,j)$를 n번째 서비스가 끝난 직후 시점에서 저장명령 대기공간과 불출명령 대기공간에 있는 명령들의 개수가 각각 i, j개임을 나타내는 확률변수라고 하자. 그러면 이차원 이산시간 확률과정 $\boldsymbol{X}=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$는 상태공간이 $E=\{(i,j)\mid i,j=0,1,2,\cdots\}$인 이산시간 마코프 과정임을 알 수 있다. 앞에서 정의한 확률 u_{ij}, v_{ij}를 이용하여 상태 전이확률을 표현할 수 있다. 예를 들면, 전이확률 $\Pr(X_{n+1}=(3,5)\mid X_n=(3,4))=v_{12}$는 저장불출기계가 이중명령을 수행하고 있는 동안 한 개의 저장명령과 두 개의 불출명령이 도착하는 확률을 나타낸다. 상태들을 사전편찬식으로(lexicographically) 정렬한 후 이 마코프 과정의 1단계 전이확률 행렬 P를 다음 식 (3.1), (3.2), (3.3)과 같이 구할 수 있다.

$$P=\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \cdot & \cdot \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3.1)$$

$$\text{단, } A_i=\begin{bmatrix} u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} & \cdot & \cdot \\ v_{i0} & v_{i1} & v_{i2} & v_{i3} & \cdot & \cdot \\ 0 & v_{i0} & v_{i1} & v_{i2} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & v_{i0} & v_{i1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots (3.2)$$

$$B_i=\begin{bmatrix} u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} & \cdot & \cdot \\ u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} & \cdot & \cdot \\ 0 & u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & u_{i0} & u_{i1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots (3.3)$$

$i=0,1,2,\cdots$

여기에서 P와 A_i , B_i 는 모두 크기가 무한대인 행렬이다.

3.2 고객수 분포

π_{ij}를 마코프 과정 $\boldsymbol{X}$의 안정상태 확률이라고 하자. 이는 곧 안정상태에서 이탈시점에 저장명령이 i개, 불출명령이 j개가 각각의 대기공간에 있을 확률이다. 확률벡터 $\pi_i=(\pi_{i0},\pi_{i1},\pi_{i2},\cdots)$, $i=0,1,2,\cdots$에 대해서 다음과 같은 발생함수(generating function)들을 정의하자.

$$\Pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i,\quad A(z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i z^i,$$
$$B(z)=\sum_{i=0}^{\infty}B_i z^i.$$

식 (3.1)의 행렬 P를 이용하여 이탈시점에서의 안정상태 방정식을 세우면 식 (3.4)와 같다.

$$\pi_i=\pi_0 B_i+\sum_{j=1}^{i+1}\pi_j A_{i+1-j},\quad i=0,1,2,\cdots. \cdots (3.4)$$

식 (3.4)를 풀기 위해서, 행렬 P의 형태를 살펴보면 이는 행렬기하접근법(matrix geometric approach)에서 이른바 M/G/1 형태의 전이확률 행렬이다(Neuts [6]). 이러한 M/G/1 형태의 안정상태 방정식을 풀기 위해서 개발된 Ramaswami[7]의 알고리듬을 이용할 수 있다. 이 알고리듬에 의하면 확률벡터 π_i를 다음과 같은 순환식에 의해 구할 수 있다. (이 과정에 대한 자세한 내용은 Hur and Choi[3]을 참조)

$$\pi_i=[\pi_0\overline{B}_i+\sum_{j=1}^{i-1}\pi_j\overline{A}_{i+1-j}](I-\overline{A}_1)^{-1},\text{ 단 },$$

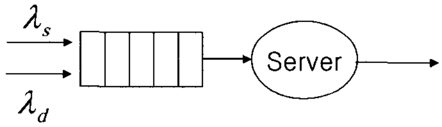
$$\overline{A}_j=\sum_{i=j}^{\infty}A_iG^{i-j},\quad \overline{B}_j=\sum_{i=j}^{\infty}B_iG^{i-j},$$
$$G=\sum_{i=0}^{\infty}A_iG^i,\quad i\ge 1. \cdots\cdots (3.5)$$

4. 모형변형에 의한 임의시점 성능치 계산

4.1 모형 변형

2절과 3절에서 고려한 대기모형에 대하여는 잘 알려진 PASTA(Poisson Arrivals See Time Average) 원리와 Burke의 정리가 성립하지 않기 때문에 전통적인 방법에 의해서는 임의시점에서 대기중인 고객수의 확률분포를 구할 수가 없다. 또한 본 연구에서와 같이 단일 및 이중명령의 처리시간의 분포가 다르다고 가정하는 경우에는 Lim 등(2001)에서 채택한 부가변수법을 적용하는 데에도 한계가 있다.

따라서 본 연구에서는 3절에서 구한 이탈시점에서의 고객수 확률을 이용하여 저장 및 불출명령의 도착률을 가상적인 단일 및 이중명령의 도착률로 변형시킨다. 즉, 실제로 도착하는 명령들은 저장 혹은 불출명령이지만, 이를 마치 단일명령과 이중명령이 도착하는 것으로 간주하는 것이다. (그림 2 참조)



<그림 2> single과 dual 두 개의 class를 가지는 AS/RS 모형

변형된 대기 시스템에서는 하나의 대기공간만을 가지게 되며, 이중명령이 단일명령에 대해 서비스 우선순위를 가지지만 현재 서비스 받고 있는 단일명령을 새로 도착한 이중명령이 축출하지 않는다(비축출형 모형). 그리고 단일명령과 이중명령의 도착은 도착률이 각각 λ_s, λ_d이며 서로 독립인 포아송 과정을 따른다고 본다. 저장불출기계의 서비스 시간들은 이전 모형과 다름없이 단일 및 이중명령에 대해 각각 $S_s(x)$과 $S_d(x)$의 분포함수를 가진다.

이렇게 변형된 모형은 두 개의 계층을 가지는 비축출형 우선순위의 M/G/1 대기모형으로서, 도착률 λ_s, λ_d들을 적절히 표현할 수만 있다면 이미 잘 알려진 방법에 의해서 임의시점 확률과 각종 성능치들을 구할 수 있다. 3절에서 구한 이탈시점 확률들을 이용하여 이들 두 모

수들을 다음과 같이 근사한다.

$$\lambda_d \approx \lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \pi_{ij} + \lambda_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} \pi_{ij} \quad (4.1)$$

$$\lambda_s \approx \lambda_1 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \pi_{ij} + \lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \pi_{ij} - \lambda_d \quad (4.2)$$

위 두 식을 설명하면 다음과 같다. 시스템의 상태가 (i, j), 단 $i=0,1,2,\cdots, j=i+1$일 때에 저장명령이 도착하거나, 시스템의 상태가 (i, j), 단 $j=0,1,2,\cdots$, $i=j+1$일 때에 불출명령이 도착하면 이 도착은 이중명령의 도착이 되는 셈이다. 따라서 단위시간당 도착하는 저장명령의 개수 λ_1 가운데 $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \pi_{ij}$의 비율로, 그리고 불출명령의 개수 λ_2 중에서 $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} \pi_{ij}$의 비율로 이중명령이 된다 (식 (4.1)).

한편, 시스템의 상태가 (i, j), 단 $j=0,1,2,\cdots$, $i=j, j+1, j+2, \cdots$일 때에 저장명령이 도착하거나, 시스템의 상태가 (i, j), 단 $i=0,1,2,\cdots, j=i, i+1, i+2, \cdots$일 때에 불출명령이 도착하면 단일명령이 도착하게 되는 셈이 된다. 하지만 이 경우 현재 단일명령으로서 대기공간에 존재하더라도 추후에 도착하는 고객에 의해 이중명령으로 바뀔 수 있다. 그러므로 이중명령의 도착률 만큼을 빼주어야 한다 (식 (4.2)).

또한 단위시간당 단일명령과 이중명령에 의해 처리되어 시스템을 이탈하는 명령의 총 개수는 저장명령과 불출명령의 도착률의 합과 같아야 한다. 이는 식 (4.1)과 (4.2)에서

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_s + 2\lambda_d \quad (4.3)$$

이 성립함을 통해서 확인할 수 있다. 이로서 원 모형을 단일명령과 이중명령 등 두 개의 계층이 존재하고 특히 이중명령이 단일명령 고객에 대해 비축출형 우선권을 가지는 모형으로 변형하였다.

4.2 성능치 계산

M/G/1 비축출형 우선순위 대기 모형에 대해서는 각 계층별 고객의 평균 대기시간 및 고객수가 이미 잘 알려져 있으므로(예를 들어 이호우[1]), 이를 이용하여 단일명령과 이중명령의 평균 대기시간과 평균 대기명령수를 구할 수 있고 또한 대기중인 저장명령과 불출명령의 평균 개수 등의 성능치도 근사적으로 구할 수 있다. 이를 아래와 같이 정리하였다.

(1) 이중명령의 평균 대기시간

$$W_{q(d)} = \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)}, \quad (4.4)$$

여기서 $\rho_d = \lambda_d E(S_d)$ 이다.

(2) 단일명령의 평균 대기시간

$$W_{q(s)} = \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)(1-\rho)}, \quad (4.5)$$

여기서 $\rho_d = \lambda_d E(S_d)$, $\rho = \lambda_d E(S_d) + \lambda_s E(S_s)$이다. 위 두 식 (4.4)와 (4.5)로부터 이중명령의 평균 대기시간이 단일명령의 평균 대기시간보다 작다는 것을 알 수 있다. 위 두 식으로부터 다음과 같이 임의의 명령의 평균 대기시간을 구할 수 있다.

(3) 임의의 명령의 평균 대기시간

$$W_q = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_d} W_{q(s)} + \frac{\lambda_d}{\lambda_s + \lambda_d} W_{q(d)}, \quad (4.6)$$

(4) 대기중인 이중명령의 평균개수

$$L_d = \lambda_d \left\{ \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)} + E(S_d) \right\} \quad (4.7)$$

(5) 대기중인 단일명령의 평균개수

$$L_s = \lambda_s \left\{ \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)(1-\rho)} + E(S_s) \right\} \quad (4.8)$$

시스템 내 전체 평균 대기명령 개수를 L, 대기 중인 저장과 불출명령의 평균개수를 각각 L_1, L_2라 한다면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

(6) 시스템 전체 평균 대기명령 개수

$$\begin{aligned} L &= L_s + 2L_d \\ &= \lambda_s \left\{ \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)(1-\rho)} + E(S_s) \right\} \\ &\quad + 2\lambda_d \left\{ \frac{\lambda_d E(S_d^2) + \lambda_s E(S_s^2)}{2(1-\rho_d)} + E(S_d) \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(7) 대기중인 저장명령의 평균개수

$$L_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) (L_s + 2L_d) \quad (4.10)$$

(8) 대기중인 불출명령의 평균개수

$$L_2=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)(L_s+2L_d) \quad (4.11)$$

5. 결 론

본 논문에서는 단위부하 자동창고시스템에 대한 성능 분석 방법을 제시하였다. 저장불출기계가 단일명령을 처리할 때와 이중명령을 처리할 때에 서로 다른 처리시간 분포를 따른다고 가정하였으며, 이탈시점에서의 고객수 확률을 이용하여 저장과 불출명령의 도착률을 단일과 이중명령의 도착률로 바꾸어 시스템을 변형시켰다. 이 변형된 시스템은 근사적으로 우선순위를 가지는 비축출형 M/G/1 모형으로 볼 수 있다. 이중명령은 단일명령에 대해 우선순위를 가진다고 볼 수 있는데, 저장불출기계는 저장과 불출명령 둘 다 대기행렬에 존재할 경우 둘을 한꺼번에 서비스하기 때문이다. 이 모형으로 단일과 이중명령의 대기시간 및 고객수를 구할 수 있고, 이를 통해 storage와 retrieval command의 평균 고객수와 전체 평균 고객수를 제시하였다. 추후 연구과제로는 임의시점에서 근사해가 아닌 정확한 성능치들을 구하는 것이며, Ramaswami의 알고리듬을 적용한 소프트웨어를 이용하여 다양한 수치예제를 제시하는 것이다.

참고문헌

[1] 이호우, 대기행렬 이론, 시그마프레스, pp. 555-597, 1998.
[2] Bozer Y A. and White J A. "Design and performance models for end-of-aisle order picking systems" Management Science, 36 (7): 852-866, 1990.
[3] Hur, S. and Choi, H. "An analysis of AS/RS performing both single and dual commands", 한국산업경영시스템학회 추계학술대회 논문집, 2002.
[4] Lee H. F. "Performance analysis for automated storage and retrieval systems" IIE Transactions, 29: 15-28, 1997.
[5] Lim, S., Hur, S., Lee, M. H. and Lee, Y. H. "M/G/1 queueing model for the performance estimation of AS/RS" Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers. 27(1): 111-117, 2001.
[6] Neuts, M. F., "Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications", Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1989.
[7] Ramaswami V. "A Stable Recursion for the Steady State Vector in Markov Chains of M/G/1 type," Communications in Statistics - Stochastic Models, 4(2): 183-188 1988.