[논 문] - 비파괴검사학회지
Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing
Vol. 24, No. 3 (2004. 6)

광학적 면내 진동 측정기에 의한 불균일 도파관의 비틀림 진동 측정

Measurement of the Torsional Vibrations in Nonuniform Waveguides by Using an In-plane Laser Vibrometer

정형곤*, 김진오*,†

Hyung Gon Jeong* and Jin Oh Kim*,†

초 록 불균일한 원형 도파관에서 비틀림 진동을 광학적 면내 진동 측정기에 의해 측정하였다. 봉의 한쪽 끝에서 가진되는 비틀림 진동의 응답으로서 봉의 축을 따라 원주 방향 변위가 측정되었다. 2단 원형 봉과 원추형 테이퍼 봉에 대한 실험 결과들이 이론적 예측과 비교되었다. 본 논문의 결과들은 비틀림 진동 측정에 광학적 면내 진동 측정기를 사용하는 것이 가능함을 보여준다.

주요용어: 비틀림 진동, 도파관, 2단 원형 봉, 원추형 테이퍼 봉, 면내 진동 측정기, 모드 형상

Abstract Torsional characteristics of nonuniform circular waveguides were studied experimentally by using an in-plane laser vibrometer. The circumferential displacement along the axis of a rod was measured as a response of the torsional oscillation excited at one end of the rod. The experimental results obtained for a stepped circular rod and a conically-tapered rod were compared with theoretical predictions. The results of this paper show the possibility of using the in-plane laser vibrometer for the measurement of torsional vibrations.

Keywords: torsional vibration, waveguide, stepped circular rod, conically-tapered rod, in-plane vibrometer, mode shape

1. 서 론

초음파 용접기나 치과용 치석제거기는 압전(壓電) 또는 자왜(磁歪) 변환기에서 발생한 종파를 팁(tip)에서 사용하기 위해서 봉을 매개체로 하여 파동을 전달한다[1]. 그러한 봉은 파동을 전달하면서 증폭시키기 위하여 원형 단면이 팁에 가까울수록 작아지는 불균일 형상이다[2,3]. 이러한 원리는 비틀림 파동에도 적용될 수 있다. 압전 비틀림 변환기[4]에서 발생된 비틀림 파동을 봉에 전달하여 유체에 담기는 센서로 사용하는 초음파 점도계[5]가 그 예이다. 이는 변환기에 결합되는 균일 봉의 단면이 작아 파동이 전달되면서 증폭된다. 봉의 끝으로 갈수록 단면이 점점 작아지는 불균일 형상이면 파동은 더욱 증폭될 것이다.

다단 봉 또는 테이퍼 봉과 같은 불균일 봉의 종진동 특성에 관한 이론적 연구 결과는 이미 오래 전에 보고되었고[1], 최근에는 두 가지 불균일성이 복합적인 경우에 대한 연구도 이루어졌다[6]. 그러한 해석 과정을 불균일 봉의 비틀림 진동에 적용하면 이론적 해석이 가능하다. 그렇지만, 실험을 통해 그러한 연구를 행한 사례는 극히 드물다. 그러한 원인 중의 하나는 센서를 부착하는 방식으로는 제대로 실험 결과를 얻기 어렵기 때문일 것이다.

(접수일: 2003. 12. 16, 심사완료일: 2004. 3. 22) * 숭실대학교 기계공학과, † Corresponding author: Department of Mechanical Engineering, Soongsil University, Seoul 156-743 (E-mail: jokim@ssu.ac.kr)

본 논문은 레이저를 이용하는 비접촉식 광학적 면내 진동 측정기를 사용하여 원형 봉의 원주면 내에서 발생하는 비틀림 진동을 측정하는 실험적 연구를 다룬다. 광학적 면내 진동 측정기는 평면 반사체에서 정밀한 결과를 제공하는데, 회전축과 같은 곡면에도 적용이 가능함이 밝혀지고 있다[7]. 본 논문에서 다루는 대상은 Fig. 1의 (a)와 (b)에 각각 도시한 2단 원형 봉과 원추형 테이퍼 봉이고, 이론적 근사 해석 결과와 비교한다.

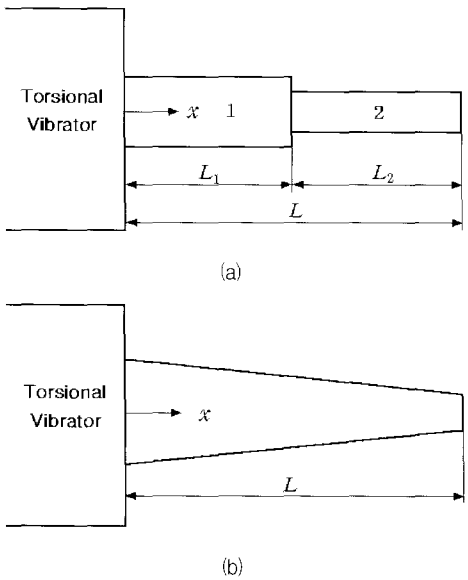


Fig. 1 Schematic diagrams of two-types of nonuniform waveguides; (a) a stepped rod, (b) a conically-tapered rod

2. 광학적 면내 진동 측정기

본 연구에 사용된 광학적 면내 진동 측정기는 레이저 간섭 방식으로서 독일 Polytec사의 콘트롤러(OFV-3320)과 센서헤드(LSV-065-306F)로 구성되어 있다. 이 장치의 원리는 차분(differential) 레이저 도플러(Doppler) 방법이다[8].

Fig. 2에 보인 바와 같이 레이저 다이오드에서 두 부분으로 분리되어 경사각 ϕ로 진행한 레이저 빔이 측정 표면에서 겹쳐져 간섭무늬(fringe)가 생긴다. 무늬의 간격 Δs 는 빛의 파장 λ 및 경사각 ϕ에 의해 다음과 같이 결정된다[8].

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin\phi} \tag{1}$$

따라서 Δs는 장치에 따라 일정한 시스템 상수이다. 표면 입자가 Fig. 2와 같이 간섭무늬를 가로지르는 방향으로 v_p의 속도로 이동할 때, 빛이 산란되면서 센서 헤드의 광 감지기(photo detector)가 도플러 주파수 f_D의 교류신호를 만들어낸다. 이들 간에는 다음의 관계가 있다.

$$v_p = f_D \cdot \Delta s \tag{2}$$

그러므로 도플러 주파수를 콘트롤러에서 측정하고 시스템 상수를 곱한 신호를 출력하여, 디지털 오실로스코프에서 진동속도를 측정한다.

Fig. 3은 이러한 진동 측정기를 사용하여 봉의 비틀림 진동을 측정하는 실험장치의 구성을 보여준다. 실험장치의 실물 사진이 Fig. 4에 보여 있는데, (a)는 센서헤드와 시편을 보이고 있고 (b)는 균일 봉과 두 종류의 불균일 봉 및 비틀림 파동 변환기를 보여준다.

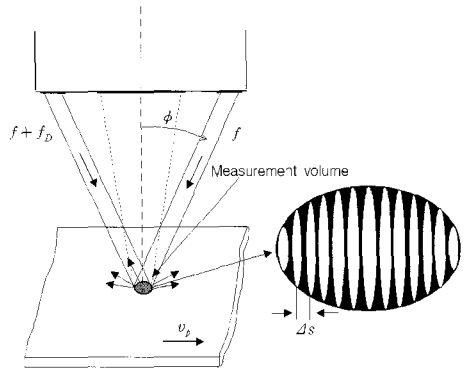


Fig. 2 Schematic diagram of the differential laser Doppler method

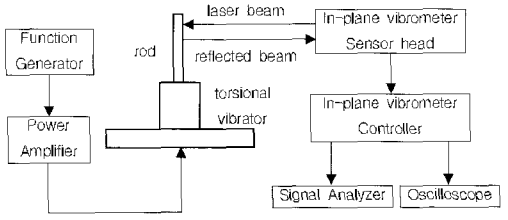
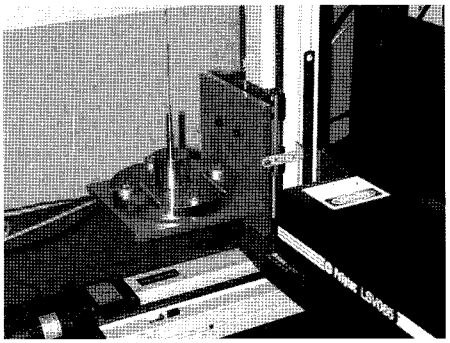
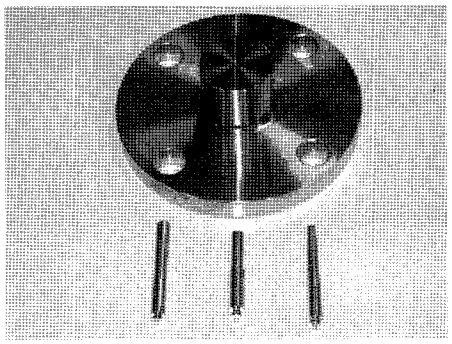


Fig. 3 Schematic diagram of the experimental measurement system



(a)



(b)

Fig. 4 Photographs of the experimental measurement system; (a) experimental apparatus, (b) rod specimen

3. 2단 원형 봉의 비틀림 진동

불균일 봉의 한가지로 Fig. 4(b)에 보인 2단 원형 봉을 우선 대상으로 하였다. 이는 단면 크기가 다른 균일한 봉 2개가 결합되어 있는 것과 같은 형상이다.

3.1. 이론적 예측

실험 결과의 타당성을 검증하기 위하여 이론적 해석을 Fig. 1(a)의 모델에 대하여 행하였다. 비틀림 진동을 하는 봉의 운동방정식을 각 변위 $\theta(x,t)$로 표현하면 다음과 같다[9].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right] = I(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

여기서 G는 전단 탄성계수이고, $J(x)$는 단면의 극모멘트이며, $I(x)$는 단위 길이당 극관성모멘트이다. 원형단면의 경우, 질량밀도가 ρ일 때 $I(x) = \rho J(x)$이다.

각 진동수 ω ($= 2\pi f$, f는 진동수)의 조화 가진에 의한 응답은 각 변위 $\theta(x,t)$를 다음과 같이 좌표 x에 관한 각 변위 $\Theta(x)$와 시간 t의 함수의 곱으로 변수 분리할 수 있다.

$$\theta(x,t) = \Theta(x)\,e^{j\omega t} \tag{4}$$

식 (4)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 $\Theta(x)$로써 비틀림 진동의 지배방정식이 표현된다.

$$J(x)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} + \frac{dJ(x)}{dx}\frac{d\Theta(x)}{dx} + k^2J(x)\,\Theta(x) = 0 \tag{5}$$

여기서 $k\,(=\omega/c)$는 파수(wavenumber)이고, $c(=[G/\rho]^{1/2})$는 비틀림 파동의 전파속도이다. 변수분리된 비틀림 모멘트, 즉 토크 $T(x)$는 $GJ(x)\cdot d\Theta(x)/dx$이다. 식 (5)의 해는 단면 변화에 따른 함수 $J(x)$와 경계조건에 의해 결정된다.

Fig. 1(a)의 2단 원형 봉에서 왼쪽 봉 1의 왼쪽 끝($x = 0$)에 진동수 $f\,(=\omega/2\pi)$이고 진폭이 Θ_0인 비틀림 진동을 가하면, 가진 부분의 경계조건을 다음과 같이 설정한다.

$$\Theta_1(0) = \Theta_0 \tag{6a}$$

또한 오른쪽 봉 2의 오른쪽 끝($x = L$)의 자유로운 상태를 표현하는 경계조건은 다음과 같다.

$$T_2(L) = GJ_2\frac{d\Theta_2}{dx}\bigg|_{x=L} = 0 \tag{6b}$$

한편, 단면이 불연속인 경계면($x = L_1$)에서의 조건으로, 각 변위와 비틀림 모멘트의 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$\Theta_1(L_1) = \Theta_2(L_1) \tag{6c}$$

$$GJ_1\frac{d\Theta_1}{dx}\bigg|_{x=L_1} = GJ_2\frac{d\Theta_2}{dx}\bigg|_{x=L_1} \tag{6d}$$

식 (5)와 경계조건 (6a~d)를 만족하는 해는 다음과 같다.

$$\Theta_1(x) = \frac{\Theta_0}{\Delta}\left[J_1 \cos kL_2 \cos k(L_1 - x) - J_2 \sin kL_2 \sin k(L_1 - x)\right] \quad 0 < x < L_1 \tag{7a}$$

$$\Theta_2(x) = \frac{\Theta_0}{\Delta} J_1 \cos k(L - x) \quad L_1 < x < L \tag{7b}$$

$$\Delta = J_1 \cos kL_1 \cos kL_2 - J_2 \sin kL_1 \sin kL_2$$

3.2. 실험 결과

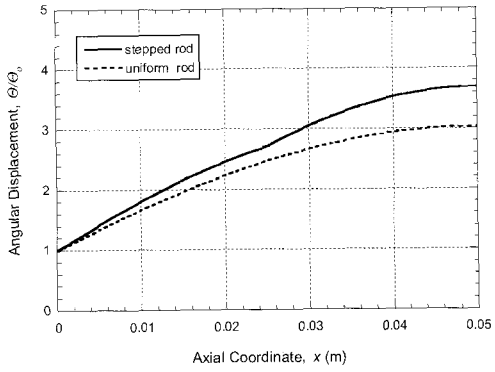
실험에 사용된 봉의 재질은 스텐레스 강(STS-302)으로서, 밀도는 7920 kg/m^{3}이고 전단 탄성계수는 75 GPa이다[10]. 봉 1, 2의 단면의 지름이 각각 8 mm와 7 mm이고, 길이는 동일하게 25 mm이다. 봉의 한쪽 끝에 비틀림 가진을 위해 비틀림 변환기[4]를 사용하였다. 이 변환기에 의해 봉에 굽힘진동과 같은 다른 모드의 진동이 발생되지 않고 비틀림 진동이 충실히 발생되는 것을 초음파 점도계 연구[5]에서 확인한 바 있다. 실험에서 14.6 kHz의 진동수로 가진하면서 봉의 길이 방향 2 mm간격으로 진동 응답을 측정하였다.

레이저 진동 측정기로 측정되는 진동속도를 각 진동수 ω로 나누어 진동 변위로 환산하고, 반지름으로 나누어 각 변위로 환산하여 Fig. 5(b)에 사각점으로 표시하였다. 이와 비교하기 위하여 식 (7)로부터 계산된 결과를 Fig. 5(a)에 실선으로 표시하였다. Fig. 5(a)의 점선은 균일한 봉에 대해 계산한 진동 응답으로서, 이에 비해 실선인 2단 봉의 진동 응답은 단면이 작은 쪽으로 갈수록 커진다.

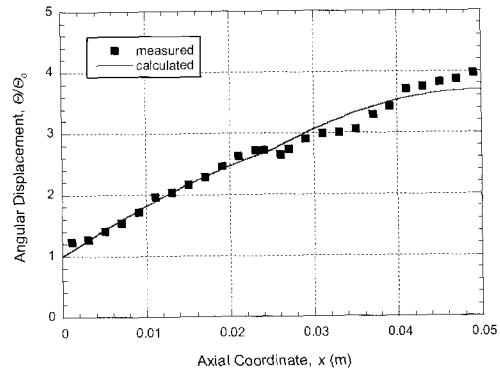
Fig. 5(b)에서 보듯이 측정결과와 계산결과가 서로 잘 일치하는 경향을 보여준다. 특히 2단 봉의 불연속 지점 (25 mm)에서 각 변위의 기울기가 불연속이며, 단면이 작은 쪽으로 기울기가 더 커지는 것을 알 수 있다.

4. 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동

단면 크기가 연속적으로 변하는 불균일 봉 중에서 Fig. 4(b)에 보인 원추형 테이퍼 봉을 대상으로, 비틀림 진동을 측정하고 이론적 예측과 비교하였다.



(a) calculated response



(b) measured response

Fig. 5 Calculated and measured response of the stepped circular rod (f = 14.6 kHz)

4.1. 이론적 예측

원추형 테이퍼 봉의 경우에, 종진동에 관해 해석된 사례[6]는 있으나, 비틀림 진동에 관해 해석된 사례는 없다. 봉의 길이 방향 단면 변화를 나타내는 반지름 함수 $r(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$r(x) = R\left(1 + \beta \frac{x}{L}\right) \tag{8}$$

여기서 R은 원추형에서 왼쪽 끝 ($x = 0$) 단면의 반지름이며, β ($= R_1/R - 1$)는 반지름 함수의 기울기이고 R_1은 오른쪽 끝 ($x = L$) 단면의 반지름이다. 단면의 극모멘트 $J(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$J(x) = \frac{\pi R^4}{2}\left(1 + \beta \frac{x}{L}\right)^4 \tag{9}$$

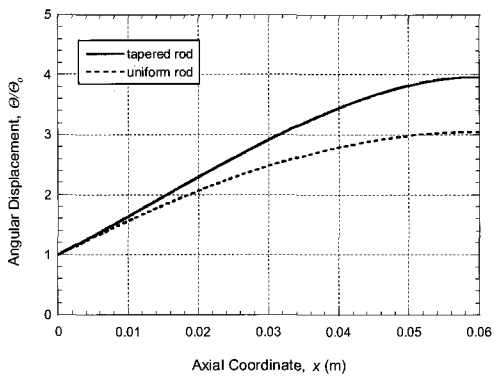
식 (9)의 $J(x)$ 를 식 (5)에 대입하고 정리하면 베셀 방정식이 얻어진다[6].

봉의 왼쪽과 오른쪽의 경계조건은 각각 식 (6a) 및 (6b)와 같은 형태이다. 식 (9)와 경계조건 (6a~b)를 만족하는 해는 다음과 같이 구해진다.

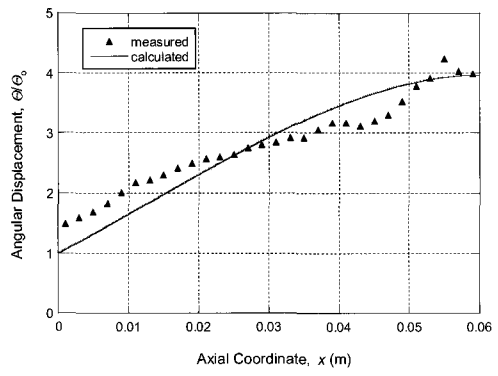
$$\Theta(x) = \frac{\Theta_0}{\Delta}\left(1+\beta\frac{x}{L}\right)^{-3/2} \times\left\{J_{5/2}[\lambda(1+\beta)]J_{-3/2}\left[\lambda\left(1+\beta\frac{x}{L}\right)\right] +J_{-5/2}[\lambda(1+\beta)]J_{3/2}\left[\lambda\left(1+\beta\frac{x}{L}\right)\right]\right. \tag{10}$$

$$\Delta = J_{-5/2}[\lambda(1+\beta)]J_{3/2}(\lambda)+J_{5/2}[\lambda(1+\beta)]J_{-3/2}(\lambda)$$

여기서 $\lambda = \omega L/(|\beta|\sqrt{G/\rho})$ 이다.



(a) calculated response



(b) measured response

Fig. 6 Calculated and measured response of the conically-tapered rod (f = 13.8 kHz)

4.2. 실험 결과

스텐레스 강 (SIS-302)로 제작된 원추형 테이퍼 봉의 왼쪽 끝 단면의 지름은 7.5 mm이고 오른쪽 끝 단면의 지름은 5.2 mm 이며 길이는 60 mm이다. 13.8 kHz의 진동수로 가진하면서 3.2절에 서술한 바와 같이 진동 응답을 측정하여 Fig. 6(b)에 삼각점으로 표시하였다. 이와 비교하기 위하여 식 (10)으로부터 계산된 결과를 Fig. 6(a)에 실선으로 표시하였다. Fig. 6(a)의 점선은 균일한 봉에 대해 계산한 진동 응답으로서, 이에 비해 실선인 원추형 봉의 진동 응답은 단면이 작아지는 끝으로 갈수록 커진다.

Fig. 6(b)에서 볼 때, 측정결과와 계산결과가 정확히 일치하지는 않지만 경향은 같음을 보여준다. Fig. 5(b)에서 본 이단 봉의 결과에 비해 테이퍼 봉에서 측정 오차가 큰 데, 이는 테이퍼 봉의 경사면으로 인한 것으로 사료된다. 특히 단면이 작은 쪽으로 갈수록 측정 오차가 커지는 데, 이는 봉 표면의 곡률이 클 때 측정 정확도가 떨어짐을 암시한다. 측정 정확도 확보를 위한 반사면의 경사와 곡률의 한계를 파악하기 위해서는 향후에 연구가 더 이루어져야 하겠다.

5. 결 론

광학적인 면내 진동 측정기를 이용하여 2단 원형 봉과 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동을 측정하였다. 여기서, 봉의 한쪽은 가진용 변환기가 부착되어 있고 다른 쪽 끝은 자유로운 상태에서 가진될 때의 응답을 계산하여 측정 결과와 비교하였다.

해석을 통해 검증한 실험 결과에 따르면, 가진부에서 멀어질수록 봉의 굵기가 가늘어지는 불균일 봉의 비틀림 진동은 균일한 봉의 진동에 비해 더 큰 진폭을 갖는다. 이러한 경향은 또한 굵은 쪽보다 가는 쪽으로 갈수록 더 크게 나타난다.

굽힘파와 같은 면외 파동과 달리 종파나 비틀림 파와 같은 면내 파동은 실험하기 어려운 대상인데, 광학적 면내 진동 측정기를 사용하면 타당한 실험 결과를 얻을 수 있음을 입증하였다.

후 기

본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 이루어졌음.

참고문헌

[1] L. D. Rozenberg, Sources of High-Intensity Ultrasound, Vol. 2, p. 125, Plenum Press, New York, (1969)

[2] 이건복, 김희수, "초음파 트랜스듀서의 종진동을 이용한 알루미늄 와이어 용접", 한국정밀공학회지, 제13권, 제11호, pp. 38-45, (1996)

[3] 최인석, 전한용, 김진오, 김인수, "열 차단용 초음파 도파관의 전파성능 향상 연구", 한국음향학회지, 제22권, 제7호, pp. 545-553, (2003)

[4] 권오수, 김진오, "압전 비틀림 파동 변환기 제작 및 평가", 비파괴검사학회지, 제21권, 제4호, pp. 434-438, (2001)

[5] 전한용, 김진오, "원형 봉의 비틀림 진동에 의한 유체 점도 측정 연구", 대한기계학회논문집(A), 제26권, 제6호, pp. 1016-1025, (2002)

[6] Q. S. Li, "Exact Solutions for Longitudinal Vibration of Multi-Step Bars with Varying Cross-Section," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, No. 2, pp. 183-187, (2000)

[7] S. Rothberg and J. Bell, "On the Application of Laser Vibrometry to Translational and Rotational Vibration Measurements on Rotating Shafts," Measurement, Vol. 35, pp. 201-210, (2004)

[8] L. E. Drain, The Laser Technique, Ch. 5 & 7, John Wiley & Sons, Chichester, (1980)

[9] L. Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, pp. 156-161, pp. 211-233, Macmillan Publishing Co., New York, (1967)

[10] F. P. Beer and E. R. Johnston, Jr., Mechanics of Material, 2nd ed. in SI units, Appendix B, McGraw-Hill Book Co., New York, (1992)