

논문 2004-41SP-6-

피셔 인포메이션을 이용한 영상 복원 알고리즘

(Image Restoration Algorithms by using Fisher Information)

오 춘 석*, 이 현 민*, 신 승 중**, 유 영 기*

(Choonsuk Oh, Hyunmin Lee, Seung-jung Shin, and Young-kee Ryu)

요 약

빛을 반사하거나 방출하는 물체의 형상은 여러 원인에 의해 왜곡된 영상으로 센서에 포착된다. 이러한 왜곡을 제거해 원래 물체의 형상을 추정하는 것을 영상 복원이라고 한다. 영상 복원은 결정론적 방법과 확률론적 방법이 있다. 본 논문에서는 확률론적 방법의 한 종류로서 피셔 인포메이션(Fisher Information)으로부터 유도된 MFI(Minimum Fisher Information)을 이용한 영상 복원을 제안한다. 이는 B. Roy Frieden에 의해 최근에 제안된 신호 추정 방법의 하나이다. MFI를 이용한 복원에서 노이즈 제어 파라미터에 따라 영상 복원의 결과가 어떻게 변화하는지를 조사하였으며, 복원의 정확도에 대한 기준으로 크로스 엔트로피(Kullback-Leibler entropy)를 사용하였다.

Abstract

An object to reflect or emit light is captured by imaging system as distorted image due to various distortion. It is called image restoration that estimates original object by removing distortion. There are two categories in image restoration method. One is a deterministic method and the other is a stochastic method. In this paper, image restoration using Minimum Fisher Information(MFI), derived from B. Roy Frieden is proposed. In MFI restoration, experimental results to be made according to noise control parameter were investigated. And cross entropy(Kullback-Leibler entropy) was used as a standard measure of restoration accuracy. It is confirmed that restoration results using MFI have various roughness according to noise control parameter.

Keyword : Image Restoration, Fisher Information, Entropy, MFI, Cross Entropy

I. 서 론

영상을 획득하는 과정에서는 여러 가지 요인이 영상의 질을 저하시키게 되며, 광학 렌즈의 결함이나, 센서의 비선형성, 카메라와 물체간의 상대 운동, 정확하게 맞춰지지 않은 초점, 대기 간섭 등의 영향이 그 원인으로 작용하게 된다. 영상 복원이란 이러한 원인으로 인해 저하된 영상을 원래대로 복원해 내는 것을 말한다.

영상 복원에는 여러 기법들이 있지만 크게 두 종류로 구분이 가능하다. 하나는 결정론적(deterministic) 방법

이라 하여 노이즈가 적고, 영상을 왜곡시키는 함수를 아는 경우에 사용할 수 있는 방법으로, 왜곡 함수의 역함수를 이용해 원래 영상을 복원해낸다. 다른 하나는 확률론적(stochastic) 방법이라 하여 특정한 통계적 기준에 준해서 가장 적합한 영상 복원을 시행하는 것이다.

결정론적 방법에서는 왜곡 함수를 정확하게 아는 것이 중요하다. 이 함수를 정확하게 알면 알수록 더 정확한 복원이 가능하다. 이 방법과 연관될 수 있는 간단한 경우들은 카메라에 대해서 물체가 등속도 운동을 하는 경우라든가, 잘못된 렌즈 포커스, 대기 교란 상태 등등이 있을 수 있다.

현실적으로 왜곡 함수에 대한 정보는 불충분하기 때문에 이를 모델링하거나, 추정하는 것이 필요하다. 이를 추정하는 방법에는 두 종류가 있을 수 있는데 이는 이

* 선문대학교 정보통신공학
(Dept. of Information and Communication
Engineering, SunMoon University)

** 한세대학교 컴퓨터공학
(Dept. of Information Technology, Hansei
University)

접수일자: 2003년9월1일, 수정완료일: 2004년11월4일

용 가능한 정보의 종류에 따른 것으로, 사전 정보를 이용하는 방법과 사후 정보를 이용하는 방법이 있을 수 있다.

왜곡에 대한 사전 지식은 영상이 저하되는 비교적 정확한 경위를 알 수 있는 경우에 해당한다. 예를 들어 카메라에 대해 물체가 상대적으로 움직인다고 하면 이러한 상황은 카메라에 대한 물체의 속도 벡터를 결정하는 것으로 모델링 될 수 있다. 이와 반대로 사후 지식은 이미 저하된 영상을 분석함으로써 얻을 수 있는 정보다.

확률론적 방법은 통계적 기준에 의해 영상을 복원하는 것을 말한다. 가장 간단한 예로는 최소 평균 자승 방법이 있다. 이 외에도 물체의 포지티브 특성을 이용하는 복원이라든지, 인포메이션 이론을 이용한 방법, MEM(Maximum Entropy Method)를 이용한 방법 등이 있다. 이 중에서 MEM이 특히 주목할 만한데, 흑서에서는 마술이라는 평가까지 받고 있으며, 동 분야뿐만 아닌 여러 다른 분야에서도 널리 이용되고 있다.

1920년대에 캠브리지의 통계학자 R. A. Fisher는 파악할 수 없는 불확정성이 주어질 경우에 시스템으로부터 얼마만큼의 정보를 얻어낼 수 있는지에 대한 연구를 하여 이 양을 "I"라 불렀고, 현재에는 이를 피셔 인포메이션^[1]이라 부른다. B. Roy Frieden^[2]은 그의 연구를 통하여 피셔 인포메이션을 이용하여 특정 제한 조건하에서 최적의 확률 분포를 구하는 것이 가능함을 보였으며, 이 기법이 MFI(Minimum Fisher Information)가 되었다.

II. 피셔 인포메이션

1. 유도 과정

1차원 시스템에 대해서 어떤 측정값으로부터 하나의 시스템 파라미터를 추정하는 문제를 생각하자. 파라미터를 θ 라 하고, 데이터를 y 라 하자. 이 시스템은 'likelihood law'라 불리는 조건부 확률 $p(y|\theta)$ 로 지정될 수 있다. x 는 데이터에 더해지는 변동값으로, $y = \theta + x$ 라는 표현이 가능하다. 수집된 데이터는 데이터에 대해 최적인 함수 $\hat{\theta}(y)$ 의 θ 를 추정하는 데에 사용된다.

다음을 따르는 $\hat{\theta}(y)$ 를 생각해 보자.

$$\hat{\theta}(y) - \theta \equiv \int dy [\hat{\theta}(y) - \theta] p(y|\theta) = 0 \quad (1)$$

확률 밀도 함수(PDF) $p(y|\theta)$ 는 파라미터 θ 가 있는 상황에서 데이터 값 y 의 변동을 기술한다. PDF $p(y|\theta)$ 는 'likelihood law'라고 불린다. 식 (1)을 미분하면

$$\int dy (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \int dy p = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p(y|\theta)}{\partial \theta} = p(y|\theta) \frac{\partial \ln p(y|\theta)}{\partial \theta} \quad (3)$$

p 가 정규화 되었다는 점과 식 (3)을 이용하면

$$\int dy (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial \ln p(y|\theta)}{\partial \theta} p(y|\theta) = 1 \quad (4)$$

적분되는 항을 아래와 같이 분해하자.

$$\int dy \left[\frac{\partial \ln p(y|\theta)}{\partial \theta} \sqrt{p(y|\theta)} \right] \left[(\hat{\theta} - \theta) \sqrt{p(y|\theta)} \right] = 1 \quad (5)$$

위 식을 제공하면 슈바르츠 부등식에 의해 아래와 같이 된다.

$$\left[\int dy \left(\frac{\partial \ln p(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(y|\theta) \right] \left[\int dy (\hat{\theta} - \theta)^2 p(y|\theta) \right] \geq 1 \quad (6)$$

위 식에서 맨 좌측 인자는 피셔 인포메이션 I 로 정의된다.

$$I \equiv I(\theta) \equiv \int dy \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta} \right)^2 p, \quad p \equiv p(y|\theta) \quad (7)$$

그리고 두 번째 인자는 평균 자승 오차 e^2 와 정확하게 일치한다.

$$e^2 \equiv \int dy [\hat{\theta} - \theta]^2 p \quad (8)$$

식 (6)을 식 (7)과 식 (8)을 이용해서 간결하게 나타내면

$$e^2 I \geq 1 \quad (9)$$

이 되고, 이를 Cramer-Rao 부등식이라고 부른다.

$y = \theta + x$ 라는 관계에서 $p(y|\theta)$ 의 의미는 시스

템의 파라미터가 θ 일 때, 측정 데이터가 y 일 확률이므로, 이는 변동값이 x 일 확률이라는 말과 같다. 그러므로 아래와 같은 유도가능하다.

$$p(y|\theta) = p(y - \theta) = p(x) \quad (10)$$

이를 이용하면 식 (7)을 더 간결하게 나타낼 수 있다.

$$I = \int dx \left(\frac{dp(x)}{dx} \right)^2 p(x) \quad (11)$$

2. 샤논(Shannon)의 엔트로피와의 비교

피셔 인포메이션은 I 로 표기하는 반면에 샤논의 엔트로피^[3] 정의는 H 로 표기한다. 이는 아래와 같은 형식을 가진다.

$$H = - \int dx p(x) \ln p(x) \quad (12)$$

피셔 인포메이션과 마찬가지로 H 도 확률밀도함수(PDF)에 대한 범함수이다. 두 정보량을 비교하기 위해서 두 정보량의 정의를 이산 형태로 나타내기로 한다.

$$H = - \Delta x \sum_n p(x_n) \ln p(x_n), \Delta x \rightarrow 0 \quad (13)$$

$$I = \Delta x^{-1} \sum_n \frac{[p(x_{n+1}) - p(x_n)]^2}{p(x_n)}, \Delta x \rightarrow 0 \quad (14)$$

위 식에서 보듯이, 샤논 엔트로피의 경우와 다르게 피셔 인포메이션 식은 어떤 한 점에 대해서 주위에 있는 포인트들과의 직접적인 비교가 이루어진다. 그러므로 H 는 전역적인 특성을 가진다고 말하며, I 는 지역적인 특성을 가진다고 말한다.

3. Kullback-Leibler 엔트로피와의 관계

Kullback-Leibler 엔트로피^[4] G 는 두개의 확률밀도함수(PDF)의 범함수이다.

$$G = - \int dx p(x) \ln \frac{p(x)}{r(x)} \quad (15)$$

이 엔트로피는 $p(x)$ 와 $r(x)$ 사이의 크로스 엔트로

피 또는 상대 엔트로피라고도 부른다. $r(x)$ 가 상수라면 G 는 기본적으로 H 와 같아진다. 또한, $G=0$ 이라면 $p(x)=r(x)$ 가 되는 성질이 있다. 그러므로 엔트로피 G 는 두 PDF의 모양이 얼마나 다른가를 측정하는 도구가 될 수 있다.

이제 피셔 인포메이션 I 가 G 와 어떤 관계를 가지는지 알아본다. 이전 절에서 사용한 이산 형태의 피셔 인포메이션을 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ 를 이용해 아래와 같이 변형시킨다.

$$I = \Delta x^{-1} \sum_n p(x_n) \frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} - 1 \quad (16)$$

Δx 를 0 극한으로 보낸다고 할 때, 위의 식에서 대괄호 안의 내용의 첫 번째 항은 1에 가까워진다. 그러므로 대괄호로 묶인 부분을 아래와 같이 나타내도록 한다.

$$\frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} - 1 = \nu \quad (17)$$

ν 값은 매우 작기 때문에 테일러 전개를 이용해 아래와 같은 근사식을 만들 수 있다.

$$\ln(1 + \nu) = \nu - \nu^2/2 \quad (18)$$

이 식을 변형시켜서,

$$\nu^2 = 2[\nu - \ln(1 + \nu)] \quad (19)$$

ν 의 정의에 의해

$$\left(\frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} - 1 \right)^2 = 2[\nu - \ln(1 + \nu)] \quad (20)$$

이 식을 식 (16)에 대입하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} I &= - 2\Delta x^{-1} \sum_n p(x_n) [\nu - \ln(1 + \nu)] \\ &= - 2\Delta x^{-1} \sum_n p(x_n) \frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} - \ln \left(1 + \frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} - 1 \right) \\ &= - 2\Delta x^{-1} \sum_n p(x_n + \Delta x) + 2\Delta x^{-1} \sum_n p(x_n) \ln \left(\frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

위 식에서 마지막 항의 로그 함수 내의 값은 1에 근접한 값이므로 항 전체의 값은 근사적으로 0이라고 생각할 수 있다. 남은 항을 아래와 같이 변형한다.

$$\begin{aligned}
I &= - (2/\Delta x) \sum_n p(x_n) \ln \frac{p(x_n + \Delta x)}{p(x_n)} \\
&\rightarrow - (2/\Delta x^2) \int dx p(x) \ln \frac{p(x + \Delta x)}{p(x)} \quad (22) \\
&= - (2/\Delta x^2) G[p(x), p(x + \Delta x)]
\end{aligned}$$

엔트로피 G 의 정의에 의해 피서 인포메이션 I 는 $p(x)$ 와 이동된 $p(x + \Delta x)$ 의 크로스 엔트로피라는 것을 알 수 있다.

이 결과는 피서 인포메이션 I 가 샤논 엔트로피와는 다르게 지역적인 특성을 반영한다는 것을 뒷받침한다.

III. 최소 피서 인포메이션 방법

최소 피서 인포메이션(Minimum Fisher Information Method: MFI)^[5]는 Maximum Cramer-Rao Bound (MCRB)를 만족하는 해를 구하는 과정에서 도출되는 방법이다.

1. MCRB

식 (9)에서 등호가 성립하는 경우에 평균자승오차는 I 의 역수이다. 그래서 I 는 어떤 추정 시나리오에서 얼마나 많은 예러가 내재하는지를 결정한다. 그렇다면 등호가 성립하는 경우는 어떤 때인가?

식 (5)의 좌변은 실제로 두 벡터 $A(y)$ 와 $B(y)$ 의 내적을 나타낸다.

$$A(y) = \frac{\partial \ln p}{\partial \theta} \sqrt{p}, \quad B(y) = (\hat{\theta} - \theta) \sqrt{p} \quad (23)$$

두 벡터의 내적이 가장 클 때는 두 벡터가 평행할 때이므로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$A(y) = k(\theta)B(y), \quad k(\theta) = \text{const.} \quad (24)$$

식 (23)과 식 (24)를 조합하면

$$\frac{\partial \ln p(y|\theta)}{\partial \theta} = k(\theta)[\hat{\theta}(y) - \theta] \quad (25)$$

위 식을 만족하는 시나리오는 아래 식을 만족하는 최소화된 예러 e_{\min}^2 를 만들어낸다.

$$e_{\min}^2 = 1/I \quad (26)$$

이럴 경우에 추정된 식 $\hat{\theta}(y)$ 는 효율적이다 라고 말할 수 있다. 여기서 예러가 인포메이션 I 에 대해 역으로 변함을 주목하면 I 는 측정 과정이 얼마나 정교한가에 대한 척도가 될 수 있다.

2. MFI

$1/I$ 는 Cramer-Rao bound 라고 부른다. 이것은 순수하게 I 의 함수이며, θ 의 함수가 아니다. 식 (9)로부터, MCRB를 만족하는 $p(x)$ 는 다음을 만족해야 한다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{p'(x)^2}{p(x)} = \text{minimum} \quad (27)$$

이 최소화는 $p(x)$ 에 대해 알려진 제한 조건을 통해 해를 구할 수 있다. 간단하게 라그랑지 멀티플라이어를 추가해 제한 조건을 반영할 수 있으며, x 의 평균값이 알려져 있다면, 그 식은 아래와 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{p'(x)^2}{p(x)} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \bar{x} = \text{minimum} \quad (28)$$

3. 일반적인 해

식 (28)의 해를 구하기 위해 가장 일반적인 경우를 고려해 본다. N 개의 측정 데이터 $\{d_n\}$ 이 아래와 같이 주어진다.

$$\int_a^b dx k_n(x)p(x) = d_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (29)$$

함수 $k_n(x)$ 는 알고 있는 함수이다. 그러면, MFI에 의해 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b dx \frac{p'(x)^2}{p(x)} + \sum_{n=1}^N \lambda_n \int_a^b k_n(x)p(x)dx - d_n = \text{minimum} \quad (30)$$

이제 식 (30)의 해를 구해야 하는데, 앞서 다루었던 Euler-Lagrange 방정식^[2]을 이용해 $p(x)$ 를 구할 수 있다. 우선 라그랑지언을 정의하면.

$$L = \frac{p'^2}{p} + \sum_{n=1}^N \lambda_n k_n p \quad (31)$$

Euler-Lagrange 방정식에 의해 아래의 식이 성립한다.

$$2\frac{d}{dx}[p'(x)/p(x)]+[p'(x)/p(x)]^2-\sum_n \lambda_n k_n(x)=0 \quad (32)$$

식을 더 간단하게 하기 위해 보조 함수 $q(x)$ 를 도입한다.

$$p(x)=(q(x))^2 \quad (33)$$

$$p'(x)=2q(x)q'(x) \quad (34)$$

위 두 식을 식 (32)에 대입한다. 그러면 아래의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$q''(x)=\frac{1}{4}q(x)\sum_n \lambda_n k(x) \quad (35)$$

이 미분방정식의 해가 MFI에 의한 $p(x)$ 추정치의 해가 된다.

4. 특별한 경우의 해^[13]

MFI의 성질을 이해하기 위해 특별한 경우의 몇 가지 해를 구한다.

(1) 일차 모멘트가 주어져 있는 경우

이 경우는 양수 x 에 대해 평균값 \bar{x} 가 데이터로 주어지는 경우이다.

$$\int_0^\infty dx xp(x)=\bar{x} \quad (36)$$

$p(x)$ 는 정규화 되었다고 가정하면 $a=0$, $b=\infty$, $M=2$, $k_1(x)=1$, $k_2(x)=\bar{x}$ 인 문제가 된다. 이 조건에 의하여 식 (35)은 아래와 같은 형태가 된다.

$$q''(x)=q(x)(c_1+c_2x) \quad (37)$$

이 식의 해를 구하기 위해 아래 식을 이용해서 치환한다.

$$c_1+c_2x=c_2^{2/3}y, q(x)=u(y)=u\left(\frac{c_1+c_2x}{b^{2/3}}\right) \quad (38)$$

그러면 원 식은 아래와 같이 된다.

$$u''(x)-xu(x)=0 \quad (39)$$

이 미분 방정식의 해는 Airy function^[6]이다.

$$u(x)=cAi(x), \text{ 상수 } c \quad (40)$$

원래대로 치환하면

$$p(x)=cAi^2\left(\frac{c_1+c_2x}{c_2^{2/3}}\right) \quad (41)$$

(2) 일-이차 모멘트가 주어져 있는 경우

이 경우는 구하고자 하는 PDF의 평균과 분산을 알고 있을 경우이다. 이럴 경우에 알고 있는 커널 함수는 3개로, $k_1(x)=1$, $k_2(x)=x$, $k_3(x)=x^2$ 의 3가지다. 이 경우의 해를 구하기 위해 아래와 같은 특별한 치환을 이용한다.

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=h(x) \quad (42)$$

위 식과 위 식을 미분한 식을 식 (35)에 대입하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$2h'(x)+h(x)^2-\sum_{n=1}^N \lambda_n k_n(x)=0 \quad (43)$$

이 식은 잘 알려진 Riccati 방정식이다. Riccati^{[7],[8]} 방정식의 일반적인 해법에 의해 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$p(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2\right] \quad (44)$$

이 식은 일-이차 모멘트가 주어졌을 때 피서 인포메이션을 최소화하는 PDF가 정규 분포라는 것을 말해준다. 식 (44)를 식 (27)에 대입하면 $I=1/\sigma^2$ 이라는 결과를 얻을 수 있다.

5. 영상 복원에의 적용

(1) 물체와 이미지 및 노이즈

물체 평면에 위치한 비간섭성이고 평면 방사 분포를 갖는 물체에 대하여, 물체 평면이 크기가 같은 M 개의 셀로 나누어진다고 하자. 그 크기를 Δx , m 번째 셀의 중심의 좌표를 x_m 라고 하자. m 번째 셀에서 나오는 광양자 수를 o_m 라고 하고, 물체 전체에서 나오는 광양자 수를 O 라고 하자.

$$O=\sum_{m=1}^M o_m \quad (45)$$

물체에서 나온 광양자는 렌즈를 통과해서 이미지 평

면^{[9],[10]}에 위치한 센서에 도달하게 된다. 이 센서의 크기는 Δy 이고 센서의 중심 좌표를 y_n 라고 하자. 센서를 통해 얻어진 이미지 데이터를 i_n 이라고 하면 각 셀에 영향을 주는 노이즈 n_n 를 고려하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$i_n = \sum_{m=1}^M o_m s(y_n, x_m) + n_n \quad (46)$$

여기서 s 는 센서를 포함한 광학계의 점퍼짐 함수^{[11],[12]}이다.

(2) 물체와 이미지의 해상도

이미지가 대역폭 제한을 받는 경우라면, 샘플링 이론을 따르게 된다. 이 경우에 y_n 은 나이퀴스트 간격에서 균일하게 위치하는 것이 당연하다. 이미지에서보다 물체에서 더 높은 해상도를 허용하려면 물체의 셀 크기 Δx 는 이미지 셀 사이의 간격보다 더 작아야 한다.

$$\Delta x < y_n - y_{n-1} \quad (47)$$

이 경우에 $N < M$ 가 된다. 즉, 이미지 셀의 개수가 물체 셀의 개수보다 작아야 한다. 이후의 분석은 이러한 조건하에서 이루어진다.

(3) MFI의 적용

앞에서 MFI 일반해를 구하는 방법에 대해 논의했다. 그러나 MFI의 일반해를 그대로 적용하는 것에는 한 가지 문제가 있다. 그것은 바로 노이즈의 존재이다. 노이즈가 없는 경우에는 MFI의 해를 구하기 위한 제한 조건으로 이미지 포메이션 식이 그대로 라그랑지 멀티플라이어를 통해서 적용될 수 있다. 그러나 노이즈가 있는 경우에는 데이터 자체가 노이즈로 인해 변형되기 때문에 식 (27)를 바로 적용할 수 없다.

그러므로 MFI의 변형된 형식을 도입한다.

$$I = \sum_{m=2}^M \frac{[o_m - o_{m-1}]^2}{o_m} + \lambda \sum_{n=1}^N n_n^2 = \text{minimum} \quad (48)$$

식 (48)에서 중변의 노이즈 항은 이미지 포메이션에서 직접 얻어지는데 아래와 같다. 여기서 i_n 은 영상의 밝기값이다.

$$n_n = i_n - \sum_{m=1}^M o_m s(y_n, x_m) \quad (49)$$

식 (27)에서의 미분은 위 식에서는 유한 차분으로 대체되었다. 실제로, 위 식의 우변 첫 항은 카이 제곱 검정(Chi Square Test)^[2]의 형식과 정확하게 일치한다. 이는 o_m 의 주변 값들과의 차이를 측정한다. 그러므로 주어진 식을 최소화하는 해를 구하는 것은 카이 제곱 검정에 따라 주변의 값들과 최대한 닮은 곡선을 만들어낸다. 결론적으로 MFI는 스무딩 연산의 한 종류가 될 수 있다. 그러므로 MFI는 인접한 셀들끼리의 카이 제곱 검정에 의해 최대한으로 부드러운 곡선을 만들어낸다.

파라미터 λ 는 I 를 최소화하는데 노이즈 제곱의 함이 얼마나 영향을 미치게 할 것인가를 결정한다. IV 절에서 실험을 통하여 분석하겠지만, λ 의 값에 따라 해의 부드러운 정도가 달라진다.

IV. 실험

1. MFI 해

MFI 솔루션은 식 (44)의 해를 얻는 것으로 가능하다. 이 해를 얻기 위해서는 최적화 문제를 해결하기 위한 다양한 방법들이 사용될 수 있지만 본 논문에서는 구현의 용이함을 위해 매트랩^[14]을 사용하였다.

매트랩에서 최적화 문제의 해를 구하기 위해 제공되는 함수인 fmincon에서는 해의 수렴 속도를 빠르게 하기 위해 주어진 비선형 방정식의 그라디언트 행렬과 헤시안 행렬을 사용한다.^{[15],[16]}

그라디언트 행렬은 주어진 식을 각 변수들에 대해 편미분한 식을 행렬 형태를 나타낸 것이다. 헤시안 행렬은 주어진 식을 각 변수들에 대한 2차 편미분 식을 행렬로 나타낸 것이다.

매트랩에서 그라디언트 행렬과 헤시안 행렬을 사용하기는 하지만 내부적으로 구해서 사용하는 것이 아니라 사용자의 입력을 받게 되어 있으므로 해석적으로 이 두 행렬을 직접 구해서 fmincon 함수에 대한 입력으로 넣어준다.

$$\begin{pmatrix} -2 - 2\frac{o_1}{o_2} \\ \vdots \\ 2\frac{o_m}{o_{m+1}} - \left(\frac{o_{m-1}}{o_m}\right)^2 - 1 \\ \vdots \\ 1 - \left(\frac{o_{M-1}}{o_M}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (50)$$

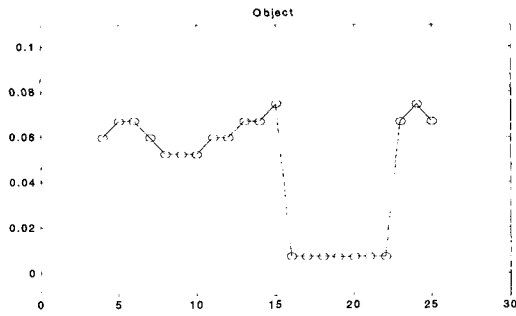


그림 1. 실험 대상 영상
Fig. 1. Experimental object.

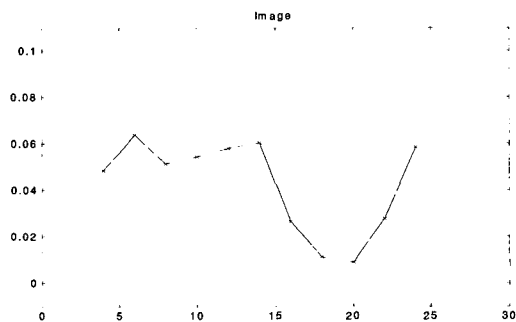


그림 2. 획득된 영상
Fig. 2. Captured image.

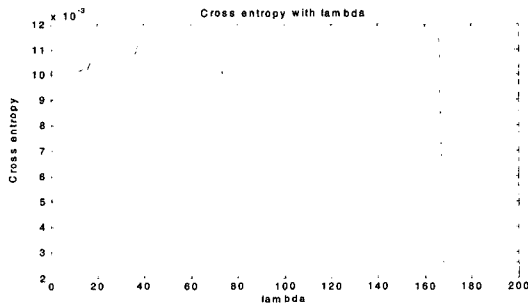


그림 3. λ에 따른 크로스 엔트로피
Fig. 3. Cross entropy with varying λ.

헤시안 행렬의 경우에 해석적인 방법을 이용하지 않고 차분법을 사용할 수도 있으나, 이럴 경우에는 해가 발산하는 경우가 있게 된다. 그러므로 헤시안 행렬을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -2 - \frac{2}{o_2} & -2 + 2\frac{o_1}{o_2^2} \\ -2 + 2\frac{o_1}{o_2^2} & \dots \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \frac{2}{o_{m+1}} + 2\frac{o_{m-1}^2}{o_m^3} & -2\frac{o_m}{o_{m+1}^2} \\ -2\frac{o_m}{o_{m+1}^2} & \dots \end{bmatrix} \\
 & \dots \\
 & \begin{bmatrix} 2\frac{o_{M-1}^2}{o_M^3} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (51)$$

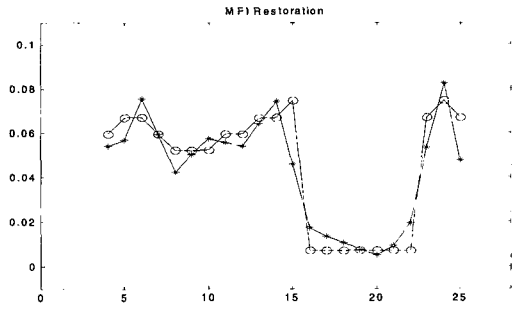


그림 4. λ = 100에서의 복원 결과
Fig. 4. MFI Restoration with λ = 100.

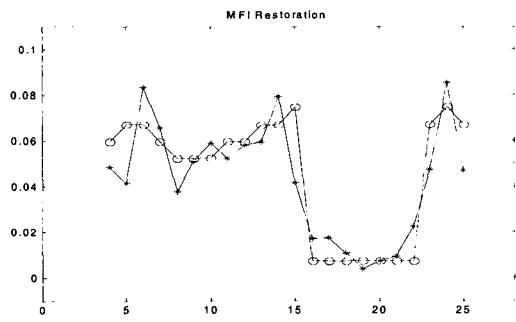


그림 5. λ = 1000에서의 복원 결과
Fig. 5. MFI Restoration with λ = 1000.

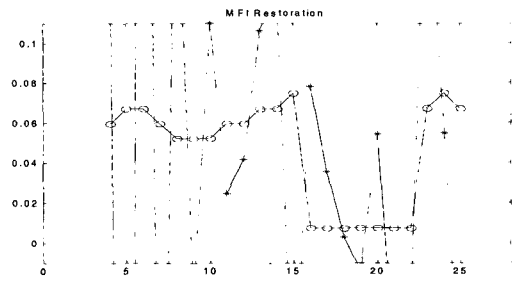


그림 6. λ = 2000에서의 복원 결과
Fig. 6. MFI Restoration with λ = 2000.

그라디언트 행렬은 벡터이고, 헤시안 행렬은 대칭 행렬이다. 그림 1과 그림 2는 실험에 사용된 물체와 영상이다.

점 퍼짐 함수로는, [0.0125 0.05 0.2375 0.4 0.2375 0.05 0.0125]의 값을 갖는 간단한 벡터를 사용하였고, 분산이 0.00001인 가우시안 노이즈가 더해졌다. 실험 대상체의 밝기는 1로 정규화 되어 있다.

2. λ에 따른 해의 수렴도 테스트

식 (44)에서의 λ는 해의 수렴을 조절하는 파라미터와 같은 역할을 하는 것처럼 보인다. 실제 λ에 따라서

해가 어떻게 수렴하는지 테스트해 보았다.

그림 3은 원래의 물체 영상과 각 λ 값에 따른 크로스 엔트로피를 도시한 것이다. II 절에서 다루었듯이 크로스 엔트로피는 두 신호의 차이를 정량화하는 도구이다. 그래프에서 보듯이 λ 가 일정한 값의 범위 내에 있을 때에는 거의 동일한 크로스 엔트로피를 가짐을 알 수 있다. 또한 λ 값이 크면 클수록 크로스 엔트로피도 작아지다 어느 값 이상에서는 다시 커짐을 알 수 있다.

그림 4, 그림 5, 그림 6를 살펴보면 λ 가 100 일 때의 복원 결과가 가장 원래 물체에 가까움을 알 수 있다. 이는 그림 3의 크로스 엔트로피 그래프의 값이 물체의 복원 결과와 어떤 관계가 있는지를 알려준다. 람다가 상당히 큰 값 일 경우에는 그림 6에서와 같이 값들이 원하는 해에서 멀어지기 시작하는 것을 볼 수 있다.

3. 해의 수렴에 따른 피셔 인포메이션의 변화 테스트

MFI의 기본 개념이 피셔 인포메이션을 최소화하는 해를 구하는 것이므로 임의의 해가 구해졌을 경우에 피셔 인포메이션의 변화가 어떻게 되는지 살펴볼 필요가 있다.

MFI 기법에서 사용된 식에 따르면 초기값에서 시작한 해가 원하는 해로 수렴해 감에 따라 피셔 인포메이션이 작아질 것임을 예상할 수 있다. 이에 따라 해의 수렴 상황에 따른 피셔 인포메이션의 변화를 조사하였다.

그림 7에서의 결과를 보면, 처음에는 상당히 컸던 값이 해가 수렴해 감에 따라 점점 작아지면서 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 이것은 MFI의 피셔 인포메이션 예상 변화와 맞아 떨어진다.

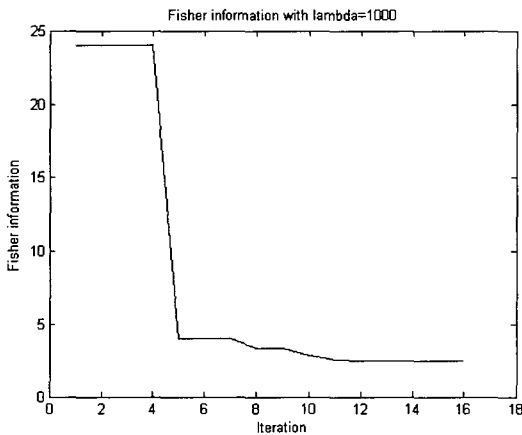


그림 7. 해의 수렴에 따른 피셔 인포메이션
Fig. 7. Fisher information with the number of iterations.

V. 결 론

본 논문에서는 영상 복원의 확률론적인 방법 중에 하나인 피셔 인포메이션을 이용하여 영상을 복원하는 방법을 제시하였다. 피셔 인포메이션을 Cramo-Rao bound로부터 유도하고 기존의 엔트로피와의 관계성을 설명하였다. 피셔 인포메이션은 지수함수 형태의 단순한 엔트로피 추정에 비해 지역적인 특성을 표현할 수 있는 큰 장점을 지니고 있다. 최소 피셔 인포메이션에서 얻어진 결과는 Airy 함수와 Riccati 방정식으로 주어지므로 이를 이미지 형성 모델과 연관시켜 카이 제곱 검정법의 해를 구하여 영상복원에 사용하였다. 이 과정에 매개변수 λ 의 변화에 따른 영상복원 결과를 도출하였고 크로스 엔트로피를 두 신호의 차이를 정량화하는 도구로 사용하게 되었다. MFI의 기본 개념이 피셔 인포메이션을 최소화하는 해를 구하는 것이므로 임의의 해가 구해졌을 경우에 피셔 인포메이션의 변화가 어떻게 되는지 살펴본 결과 수렴해 감에 따라 피셔 인포메이션이 점점 작아지면서 수렴해 가는 것을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] R. A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Decision Theory*, Second Edition. Oliver and Boyd, London, 1959.
- [2] B. Roy Frieden, *Probability, Statistical Optics, and Data Testing*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] Shannon, C. E., *Bell Syst. Tech. J.* Vol. 27, pp. 379-623, 1948.
- [4] Kullback, S., *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York, 1959.
- [5] B. Roy Frieden, *Physics from Fisher Information: A Unification*, Cambridge University Press, pp. 71-80, 1998.
- [6] Hecht, 『광학』 (장수, 조재홍 역), 대웅출판사, pp. 534, 1996.
- [7] Shoichiro Nakamura, 『C로 쓴 수치해석』 (이현열, 박정희 역), 대영사, pp. 80-84, 1996.
- [8] William H. Press, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, pp. 286-289, 1998.
- [9] B. Roy Frieden and C. Oh, "Multiple-filter Approach to Phase Retrieval from Modulus Data," *Applied Optics*, Vol. 31, No. 8, pp. 1103-1108, 1992.
- [10] B. Roy Frieden and C. Oh, "Turbulent Image

Reconstruction from a Superposition Model," *Optics Communications*, Vol. 98, No. 5, pp. 241-244, 1993.

[11] B. Roy Frieden, "Statistical Models for Image Restoration Problem", *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 12, pp. 40-59, 1980.

[12] B. Roy Frieden, " Restoring with Maximum likelihood and Maximum Entropy", *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 62, No. 4, pp. 511-518, 1972.

[13] B. Roy Frieden, *Applications of Digital Image Processing X*, SPIE Vol.829, pp.2-14, 1987

[14] The Math Works Inc., Using Matlab, 2000.

[15] <http://www.mathworks.com/products/optimization>

[16]<http://math.skku.ac.kr/~sglee/linear/ocu/21104.html>

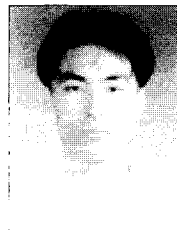
저자 소개



오 춘 석(정회원)
 1980년 서강대학교 전자공학과 (학사).
 1986년 Marquette University 컴퓨터공학과(석사).
 1992년 University of Arizona 컴퓨터공학과(박사).
 1980년~1993년 전자통신연구원(ETRI) 선임연구원.
 2001년 미국 Optical Sciences Center Visiting Scholar.
 1993년~현재 선문대학교 전자정보통신공학부 교수.
 <주관심분야 : 화상처리, 자동검사, 머신비전, 광학시스템설계>



신 승 중(정회원)
 1984년 2월 한성대학교 경영학과 졸업(학사).
 1988년 8월 세종대학교대학원 경영학과졸업(석사).
 1994년 2월 건국대학교 전자계산학과 졸업(석사).
 2000년 8월 국민대학교 정보관리학과졸업(박사).
 1990년~1994년 (주)대성MIS 기술이사.
 1995년~2003년 2월 중부대학교 정보보호 관리학 부교수 역임.
 현재 한세대학교 IT학부 컴퓨터공학전공 교수.
 <주요관심분야: 정보보호분야, 홈네트워킹, 메시지시스템, 전송프로토콜>



이 현 민(정회원)
 2000년 선문대학교 전자공학과 (학사).
 2003년 선문대학교 대학원 전자공학과(석사).
 2001년 (주)비전텍 연구원.
 2003년~현재 (주)인텍플러스 연구원.

<주관심분야 : 머신비전, 생체인식, 운영체제>



유 영 기(정회원)
 1987년 한양대학교 기계공학과 (학사).
 1989년 한국과학기술원 생산공학과(석사).
 1996년 한국과학기술원 자동화설계공학과(박사).

1989년~1992년 삼성종합기술원 전자기기연구소 연구원.

1996년~현재 선문대학교 전자정보통신공학부 조교수.

<주관심분야: 화상처리, 광계측 센서, 정밀측정시스템>

