한국학교수학회논문집 제 7 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 7, Number 1, 37-48, June 2004

학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구 -구세프의 실험 교과서를 중심으로-

한인기[1]

본 연구는 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 문헌연구로서, 러시아의 기하교육자인 Gusev의 실험용 기하교과서에 제시된 교과서의 체제, 학습 내용 및 연습문제의 틀과 내용을 분석하여 수준별 수학교육을 위한 수학적 지식의 교수학적 변환의 사례를 고찰하였다. 이를 위해, 1995년에서 1999년에 걸쳐 저술된 5~11학년의 기하학 실험교과서를 본문 내용, 연습문제를 중심으로 분석하였다.

주요용어: 개인차, 차등적 접근, 수학교과서

Ⅰ. 서 론

수학교과서는 교과의 교육목표를 교사와 학생의 교수-학습 과정으로 구체화시키는 주된 매체이다. 수학을 학생들에게 가르치기 위해, 학문으로서의 수학적 지식을 가르칠 지식으로 교수학적 변환을 하게 되는데, 이러한 교수학적 변환의 구체적인 산물 중의 하나가 교과서이다. 우정호(2000, p. 454)는 '가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는데 실패하는 것은 가르치고자 하는 지식의 적절한 교수학적 변환에 실패했기 때문'이라고 주장하면서, 수학적 지식의 교수학적 변환 및 수학교과서의 중요성을 역설하였다.

수학과 7차 교육과정(교육부, 1998, p.28)에 보면, '...수학을 단계형 수준별 교육과정으로 구성한다. 단계형 수준별 교육과정은 학생의 인지 발달 수준을 고려하여 수학의 기본적인 필수 학습 내용을 정선하고, 학습 위계와 난이도에 따라 단계별로 구성한다. 또, 기본 과정과 심화 과정을 두어 학생 개개인의 학습 능력에 따라 자기 주도적 학습을 촉진하는 창의적 학습 기회를 제공한다'고 되어 있다. 수학과 7차 교육과정이 성공적으로 운영되기 위해서는, 수학교과서에 교육과정의 정신과 내용을 충실히 반영한 수학적 지식의 교수학적 변환이 이루어져야 하며, 수학적 탐구 방법의 본질과 학습자의 수학적 활동의 본질을 고려한 수학적 지식의 교수학적 변환이 구현된 수학교과서가 제작되어야 할 것이다.

현재까지의 수학교과서의 개정을 보면, 교육과정의 개편에 따라 교과 내용의 첨삭, 판형의 변화, 사용된 사진이나 삽화 등과 같은 측면의 변화가 주를 이루고 있다. 물론, 이러한 측면들은 수학적 지식의 교수학적 변환의 주요한 부분이라고는 할 수 없을 것이다. 최근에 발행된 7차 교육과정에 따른 수학교과서에는 단계형 수준별 교육과정에 상응하는 수학적 지식의

1) 경상대학교 사범대학 수학교육과(inkiski@gsnu.ac.kr)

교수학적 변환을 위한 시도가 있었지만, 이것의 성공 여부에 대해서는 아직 많은 논란이 제기되고 있다. 그러므로, 학습자의 개인차를 고려한 수학적 지식의 교수학적 변환을 시도한 외국의 교과서에 대한 진지한 고찰은 우리나라의 수학교과서의 개선을 위해 의미로울 것이다.

수학교과서에 관련된 최근의 국내 연구들은 크게 세 가지 방향으로 나눌 수 있는데, 첫째 수학 교과서의 문제점, 구성 방향, 교과서 체계에 관련된 연구들(김홍기, 2001; 유병훈 · 엄정하, 2002; 황혜정, 2000 등), 둘째 수학 교과서 내용의 국제 비교 · 분석 연구들(김삼태 · 이식, 1999; 최택영 · 김인영, 1998; 박문환, 2002; 박경미 · 임재훈, 2002; 이용곤 · 신현용 · 서보억, 1995; 한인기 · 신현용 · 서보억, 1995 등), 셋째 수학교과서에서 교과 내용의 연계성, 사용되는 정의, 교과 내용의 분석 연구들(송순희 · 김윤영, 1998; 박경미, 2000; 우정호 · 조영미, 2001; 현진오 · 이중석, 2001; 조영미, 2002 등) 등으로 나눌 수 있다.

기술한 수학교과서에 관련된 국내 연구들은 수학교과서의 구성 및 체계, 교과 내용의 연계성, 정의를 비롯한 교과 내용 자체의 분석, 외국의 수학교과서와의 비교 등이 중심을 이루고 있다. 그러나, 학생들의 개인차를 고려하는 수준별 수학교육에 관련하여, 학습자의 다양한 지적 활동, 수학적 흥미, 능력 등을 고려한 수학교과서의 체계, 교과서의 내용에 관련된 구체적인 연구는 드물었다.

본 연구는 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관련된 문헌연구로서, 러시아의 기하교육자인 Gusev의 실험용 기하교과서에 제시된 교과서의 체제, 학습 내용 및 연습문제의 틀과 내용을 분석하여 수준별 수학교육을 위한 수학적 지식의 교수학적 변환의 사례를 고찰할 것이다. 이를 통해, 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서의 체제, 학습 내용 및 연습문제의 유형, 수준 등에 관련된 의미있는 자료들과 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

II. 차등적 접근과 Gusev의 기하교과서

러시아에서는 20여 년 전부터 학생들의 요구, 흥미, 재능에 상응하는 수학교육의 구현에 관련된 연구가 '수학교육의 개별화와 차등화'라는 개념을 중심으로 활발하게 진행되고 있다. Shahmaev(1992)는 학습-보육 과정에서 학습자의 전형적인 개별적 차이를 고려하는 것을 차등화라 하고, 이러한 조건에서의 교육을 차등화된 교육이라고 했으며, Gleizer(1981)에 의하면, 학습자에 대한 차등적 접근이란 학습자의 개별적인 심리적 차이(특성)와 학습자 집단의 전형적인 특성들을 고려해 학습자들의 개별적 행동들을 통제, 조절하는 체계이며, 차등화된 교육은 이러한 체계에서의 학습-보육의 과정이다. 결국, 교육의 개별화란 학생 개개인의 개별적인 심리적 특성들을 고려하여 학습자들의 학습-인지적 활동들을 조절하는 체계를 말하며, 이와 같이 방향지워진 교육을 개별화된 교육이라고 할 수 있다. 개별화된 교육은 차등화된 교육의 한 유형으로, 차등화된 교육이 이상적으로 구현된 것으로 볼 수 있다.

Dorofeev외 3인(1990)에 의하면, 차등화는 크게 내적 차등화와 외적 차등화로 나뉜다. 내적 차등화는 한 학급에서 같은 교육과정과 교과서로 배우면서도 학생들은 다양한 수준에서 학습 자료를 획득한다는 것에 관련된다. 이때, 중요한 것은 학습자에게 필수적인 학습의 양과 수준으로, 학습 내용의 필수적인 수준과 양을 추출하고, 이에 도달하기 위해 학습자의 특성을 고려하며, 좀더 높은 수준의 학습 자료를 획득할 수 있도록 절절한 학습 과제를 제시

하는 것이 매우 중요하다. 내적 차등화는 수준별 차등화라고도 부른다.

한편, 외적 차등화는 내용에 의한 차등화이다. 외적 차등화에서는 서로 다른 학생 집단을 내용 진술의 깊이, 지식의 양, 전문 용어의 수준에 따라 구분되는 다른 교육과정에 의해 교육하는 것을 전제로 한다. 외적 차등화는 계열별 차등화라고도 불린다. 예를 들어, 수학 심화학급의 교육과정을 따로 편성하는 것, 실업계, 인문계, 자연계의 구분, 과학고등학교의 독자적인 교육과정 운영 등은 수학교육의 외적 차등화의 한 형태로 볼 수 있다.

수준별 차등화와 관련하여, Gusev는 첫째, 교육 내용의 복잡화나 간소화를 통한 구현이 아니라, 학습 내용의 수준은 그대로 두고 학습자에 대한 적절한 도움을 통해서 구현해야 하며, 둘째 학생들을 유익하고 흥미로운 수학적 활동에 참여시키는 것은 차등화의 중요한 문제가 되며, 셋째 차등화된 교육의 중요한 목표 중의 하나는 자기교육, 자기보육, 자기조절을 포함하는 모든 형태의 독자성과 자발성을 개발, 육성하는 것이라고 하였다(Gusev & Silaev, 1996).

이러한 수준별 차등화를 교수학적으로 구현하기 위해, Gusev는 5~11학년의 기하학 실험 교과서 총 10권을 1995년에서 1999년에 걸쳐 완성하였다. Gusev(2002, p.3)에 의하면, 자신의 기하학 과정에서는 '모든 학생들이 인접 교과의 학습을 위해 필요한 지식과 기능을 획득하며, 일반 중등교육을 지속할 수 있는 가능성을 보장하며, 학생들의 요구, 흥미, 재능에 상응하는 고등교육을 받을 수 있도록 보장하는 것'을 지향한다.

기하학 교과서 기술에 바탕이 되는 교수학적 원리로 Gusev(2002)는 첫째, 교과서에는 국가적 규준에 의거하여 모든 학생들이 필수적으로 획득해야 하는 학습 내용이 구분되어야 하며, 둘째 교과서는 기초 기하교육을 받도록 하는 가능성을 제공함은 물론, 학습 자료의 심화 및 확장을 위한 폭넓은 가능성을 제공해야 하며, 셋째 교과서에 포함된 교육내용은 12년제 학교로 전환하는 경우에도 사용할 수 있어야 한다는 것을 들고 있다.

이러한 교과서 기술의 원리에 바탕을 둔 Gusev의 실험 교과서에는 (1) 모든 학생들을 위한 필수적인 이론적 내용들; (2) 학습자의 인지적 발달과 심화학습을 할 수 있도록 하는 보충적인 이론적 내용들; (3) 기본 지식들의 견고한 획득을 보장하는 문제 자료들; (4) 심화된 기하학 학습에 대한 학생들의 요구를 만족시킬 수 있는 체계화된 창의적 문제들, 탐구 과제들, 間教科的 내용들; (5) 학습 내용에 상응하는 수학사적 자료들이 체계적으로 기술되어 있다.

III. 교과서 본문의 차등적 접근

Gusev의 실험 교과서에서 살펴볼 수 있는 개인차를 고려한 수학적 지식의 교수학적 변환의 구체적인 모습을 교과서의 본문, 연습문제를 중심으로 고찰하자. 우선, 교과서 본문에서의 차등적 접근에 대해 살펴보자.

해당 학년의 기하학 과정에서 모든 학생에게 필수적인 이론적 내용들은 본문의 왼쪽에 선이 그어져 있다(그림 1). 이 부분은 수준별 차등화에서 가장 중요한 부분 중의 하나인 필수적인 학습 내용의 양과 수준을 규정하게 된다.

Как мы уже говорили, отношение длины окружности к ее диаметру обозначается буквой π. Так как оно для всех окружностей одинаково, то для всех окружностей справедлива формула

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

, где r – радиус окружности.
Это и есть *формула для вычисления длины окружности.*
Длина дуги в n° вычисляется по формуле

$$l = \frac{2\pi r}{360} \cdot n = \frac{\pi r n}{180},$$

так как длина дуги в 1° равна $\frac{1}{360}$ длины окружности.

История появления и вычисления значения числа π очень интересна. Приведем некоторые сведения по этому вопросу .

<그림 1>

한편, 기하학을 깊이있게 공부하거나 기하학의 활용에 관련된 내용들이 본문의 나머지 부분에 제시되어 있다. Gusev(1995, p.3)는 이 부분에 관련하여, '일부 학생은 단순히 읽어갈 수도 있고, 일부 학생은 거기에 제시된 과제들을 해결하려고 시도하고, 기술된 책이나 논문들을 찾아 읽을 수도 있을 것'이라고 했다. 이 부분에서는 학생들의 흥미, 가능성, 재능에 상응하여 심화된 이론적인 학습 자료를 제공하게 된다.

본문에는 <그림 2>와 같은 내용이 제시되어 있는데, 이것은 공리를 의미한다. 'A.n'에서 n은 공리의 일련 번호를 나타낸다. 한편, <그림 3>에 제시된 기호 'O.n'은 정의를 나타내며, n은 교과서에 제시된 정의의 일련 번호이다.

A.2 ***Прямая, проходящая через две точки плоскости, принадлежит этой плоскости.***

<그림 2>

O.142 ***Площадью круга, ограниченного окружностью C, называется предел площадей вписанных в C правильных многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.***

<그림 3>

<그림 4>에서 'T.n'은 정리를 나타내며, n은 교과서에 제시된 정리의 일련 번호이다. <그림 4>와 같이 'T.n'과 함께 제시된 모든 정리에 대해서는 증명이 함께 제시된다. 만약, 정리의 내용만 기술되고, 증명이 제시되지 않은 경우에는 'T.n'의 기호는 첨부되지 않는다. 결국, 교과서에서 정리로서 기술된 모든 내용은 엄밀한 증명이 함께 제시된다.

T.126 *Отношение длины окружности к диаметру одинаково для всех окружностей.*

<그림 4>

<그림 5>에서 '?'는 이론적 내용의 기술에서 발생하는 다양한 물음이나 심도있는 문제들을 표시하기 위해 사용된다. <그림 6>에서 '!'는 문장 중에서 중심적인 수학적 생각을 나타내기 위해 사용되며, '!'와 함께 제시된 내용은 해당 단원이나 기하학 과정의 학습에 있어서 중요한 역할을 하게 된다.

? **Как можно построить сферу? Как можно построить шар?**

<그림 5>

! **Важно, что на сфере есть две координаты; это выражает тот факт, что сфера – поверхность; она двумерна.**

<그림 6>

살펴본 바와 같이, Gusev의 실험교과서에서는 본문의 내용 기술에 있어, 최소 필수 수준에 해당하는 이론적 내용을 교과서에 명확히 구분되어 표시되었기 때문에, 교사가 이를 고려하여 수준별 차등화를 고려한 수학교육을 진행할 수 있도록 하였으며, 기하학의 깊이있는 이해나 활용에 관련된 심화된 내용도 함께 제시하여, 교사가 다양한 수준의 수업을 운영할 수 있도록 배려하였다.

필수적인 이론적 내용의 규정은 수준별 수학 수업의 운영에 있어 매우 중요하다. 우리나라의 수학교과서에는 필수적인 이론적 내용은 보통 정리로서 기술되는데, 과연 정리로 기술된 것만이 필수적인 이론 내용이라 할 수 있는가? 아니면, 교과서에 제시된 예제도 필수적인 이론적 내용을 포함하고 있는가? 이러한 문제는 수학교사라면, 특히 부진아를 지도해 본 경험이 있다면, 누구나 한번쯤은 가지게 되는 물음일 것이다. 이러한 측면에서 본다면, Gusev의 실험교과서에는 수준별 차등화에 따른 수학교육을 구현하기 위한 기본 바탕은 제공되었다고 할 수 있을 것이다.

IV. 연습문제의 차등적 접근

Gusev의 기하교과서에는 많은 양의 연습문제가 본문의 다음에 제시되어 있다(보통 본문에는 예제가 거의 제시되지 않음). 예를 들어, 직각삼각형에서 각들의 삼각함수, 탄젠트와 코탄젠트, 직선의 방정식, 삼각형의 풀이와 코사인 정리, 삼각형의 넓이 계산을 위한 공식, 평면에 사영된 도형의 넓이, 사인 정리, 벡터의 내적 등의 소단원으로 구성된 '삼각함수의 활용' 단원에는 연습문제로 232개의 다양한 문제가 제시되어 있다. Gusev(1995, p.4)는 '기하학을 배우는 것은 문제를 푸는 것이며, 실제로 이론적인 부분에서 정리를 증명하는 것도 문

제를 푸는 것'이라고 주장하면서, Gusev는 자신의 기하교과서에 학습 내용의 견고한 획득, 심화학습, 학생들의 인지적 활동의 활성화를 목적으로 하는 다양한 유형의 문제를 제시하였다.

기하교과서의 연습문제들은 그 수준과 성격에 따라 여섯 가지 유형으로 구분된다. 첫 번째 유형과 두 번째 유형의 연습문제는 학생들의 지적 활동 형성 및 육성에 관련된 것이다. Gusev(2002, p.6)에 의하면, '5~11학년 기하학을 통해, 모든 학생의 사고 활동 형성을 위한 폭넓은 가능성을 제시하였다. 기하학에서는 지적 활동의 구체적인 방법의 연마를 통해 학생들의 지적 발달을 지향한다'고 했으며, 특히 Gusev는 지적 활동의 구체적인 방법으로 우선 분석과 종합을 들었으며, 그리고 나서 추상화, 비교, 일반화, 구체화, 유추를 나열하였다. 분석과 종합을 바탕으로 하는 이러한 접근은 러시아의 심리학자 Rubinstein(1958)에 의해 폭넓게 연구되어, 각 교과의 교수-학습에 있어 학생들의 인지 활동 활성화를 위한 심리적 바탕으로 폭넓게 인정받고 있다.

⇓ **110. Дан правильный *n*-угольник ($n \geq 3$). Какими свойствами для каждого *n* обладают стороны и углы этого правильного многоугольника? Сколько диагоналей имеет правильный *n*-угольник ($n \geq 3$)?**

<그림 7>

<그림 7>에 제시된 유형의 연습문제는 중요한 인지 조작인 '종합'에 관련된다. 이러한 유형의 연습문제를 통해, 결론을 도출하는 것, 즉 문제의 조건들로부터 결론을 유도하는 것을 배우게 된다. 그리고, 이들 연습문제를 이용하여, 필수적인 이론적 내용을 획득했는가, 필수적인 수준의 문제를 학생들이 풀 수 있는가에 대해 확인하게 된다. 예를 들어, 어떤 수학적 개념이나 정리를 배우고 난 다음에, 종합에 관련하여 다음과 같은 전형적인 물음을 제시할 수 있다: '문제나 정리에서 주어진 것에 대해, 혹은 어떤 개념에 대해 무엇을 알고 있는가?' 또는 '주어진 것들로부터 어떤 것을 유도할 수 있는가?' 등등.

<그림 8>에 제시된 유형의 연습문제는 자기조절 및 자기통제를 위해 제시된 좀더 어려운 문제들로, 이들 문제에서는 문제의 조건으로부터 결론을 얻는 것 뿐만 아니라 그러한 결론의 도출에 대한 원인을 설명해야 한다. 예를 들면, 첫 번째 유형의 연습문제에서는 '이등변삼각형이 주어졌다. 이등변삼각형의 요소들은 어떤 성질을 가지는가'라고 묻는다면, 두 번째 유형의 연습문제에서는 '주어진 삼각형이 이등변삼각형이라고 주장하기 위해서는, 삼각형에 대해 무엇을 알아야 하는가'와 같은 문제가 제시된다. 분석에 관련된 전형적인 물음으로는 '이것을 위해서는, 어떤 사실을 알아야 하는가?'를 들 수 있다.

⇑ **111. Около круга описан многоугольник, все стороны которого равны. Будет ли этот многоугольник правильным?**

<그림 8>

<그림 9>에 제시된 유형의 연습문제는 가장 평이한 '표준문제'를 나타내며, 기하학 학습에서 낙제하지 않으려면 풀 수 있어야 하는 수준의 문제이다. 이 유형의 문제를 푸는데는 주로 <그림 7>에 제시된 유형의 문제를 해결하는 능력, <그림 8>에 제시된 유형의 문제에

서 가장 평이한 문제를 해결하는 능력 등을 필요로 한다. '표준문제'는 부진아를 대상으로 하는 교육에서 이들이 도달해야 하는 최소 필수 수준의 목표점이라 할 수 있다.

С **177. Вычислите длину окружности, если радиус ее равен 12,5 *см*.**

<그림 9>

<그림 10>에 제시된 유형의 연습문제는 '학습문제'로, 학교나 집에서 풀게 되는 가장 일반적인 유형의 문제라 할 수 있다. 이들 문제를 통해, 교과서에 제시된 기본적인 학습 자료를 공고히 다질 수 있으며, 좀더 어려운 기하학 문제의 해결로 들어설 수 있게 된다. 이 유형의 문제들은 '일반' 학생들이 수학을 공부하면서 푸는 평이한 대부분의 문제라고 할 수 있다.

У **179. Вычислите длину окружности, если: а) дуга окружности в 30° имеет длину 5 *см*; б) дуга окружности в 60° имеет длину 10 *см*; в) дуга окружности в 300° имеет длину 50 *см*.**

<그림 10>

<그림 11>에 제시된 유형의 연습문제는 '창의적 문제'로, 정형적인 방법으로는 문제가 해결되지 않으며, 문제해결을 위해선 어떤 수학적 아이디어를 발명해야 하는 것들이다. Gusev(1995, p.5)는 '창의적 문제에 있어 난이도는 수학적 아이디어의 수준에 좌우된다'고 했다. 창의적 수준의 문제는 중등학교 수학교육에서 다루는 난이도 높은 수학문제라 할 수 있다.

Т **241. Вычислите радиус окружности, которая делит круг радиуса *r* на две равновеликие фигуры – кольцо и круг.**

<그림 11>

<그림 12>에 제시된 유형의 연습문제는 '탐구과제'로, 이러한 문제의 해결을 위해서는, 몇몇 단원에서 배운 내용에 대한 종합적인 지식을 바탕으로 하며, 마치 수학자와 같은 진지한 탐구활동이 필요하며, 이들 문제는 보통 수학시간에는 다루지 않으며, 숙제로 제시하게 된다. NCTM(1989)에 의하면, 수학 문제해결력을 개발하기 위해 학생들은 몇 시간, 며칠, 몇 주가 걸리는 문제를 풀어볼 필요가 있다고 하는데, 탐구과제가 바로 그러한 유형의 문제라고 할 수 있다.

이러한 다양한 수준의 연습문제는 수업시간에 학습자료에 대한 교사의 교수학적 선택의 폭을 넓혀줄 수 있다. 즉, 교사는 학생의 수학적 흥미, 능력 등을 고려하여, 학생에게 적합한 학습문제를 어렵지 않게 선택하여 제공할 수 있게 된다. 이를 통해, 교사는 같은 교실에서 수업을 받는 서로 다른 수준의 학생에게 적절한 수학교육의 기회를 제공하는 수준별 차등화 실현의 가능성을 가지게 된다.

И

82. Вписанный четырехугольник[1]. Мы доказали свойство многоугольника вписанного в окружность, – Т.116.

Справедлив и соответствующий признак, – Т.117.

Таким образом мы доказали теорему:

Около четырехугольника можно описать окружность, тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Решим следующие задачи.

1. Докажите, что около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

2. Докажите, что если четырехугольник является вписанным, то центр описанной около него окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

<그림 12>

기술한 여섯 가지 연습문제의 유형들 중에서 표준문제, 학습문제, 창의적 문제, 탐구과제의 몇몇 예제를 살펴보자. Gusev(1998, pp.62-68)의 기하학 9학년의 '도형의 닮음, 삼각형의 닮음' 소단원에 대해 제시된 문제의 일부를 살펴보자. 이를 통해, Gusev가 의도한 각 유형별 문제에 대한 특징적인 정보를 얻을 수 있을 것이다.

표준문제로는 '한 삼각형(작은)의 변의 길이가 4cm, 3.6cm, 2.5cm이다. 주어진 삼각형과 닮음비가 1:1.6으로 닮음인 다른 삼각형(커다란)의 변의 길이를 구하여라'는 문제가 제시되었다.

학습문제로는 다음과 같은 문제들이 제시되어 있다.

1. 닮음인 두 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 변 AB, BC, AC의 길이는 각각 20cm, 18cm, 15cm이다. 삼각형 $A_1B_1C_1$의 변 A_1C_1의 길이가 10cm라고 할 때, 변 A_1B_1, B_1C_1의 길이를 구하여라.
2. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$은 닮음이다. 삼각형 ABC의 변 AB, BC, AC의 길이는 각각 20cm, 15cm, 12cm이고, 닮음비는 1:2.5이다. 삼각형 $A_1B_1C_1$의 둘레를 구하여라.
3. 주어진 삼각형의 변의 길이는 8cm, 6cm, 5cm이다. 주어진 삼각형과 닮음인 두 번째 삼각형의 가장 작은 변이 2.5cm이다. 두 번째 삼각형의 다른 변들의 길이를 구하여라.

   이와 같이 계산하는 문제 외에도 다음과 같은 증명 문제도 학습문제로 제시되어 있다.
4. 두 직각삼각형에서 밑변들이 비례하면, 두 직각삼각형은 닮음임을 증명하여라.
5. 직각이등변삼각형들은 닮음임을 증명하여라.
6. 닮음인 삼각형에서 상응하는 변들의 비는 상응하는 (1) 높이들; (2) 각의 이등분선들; (3) 중선들의 비와 같음을 각각 증명하여라.

창의적 문제로는 다음과 같은 문제들을 볼 수 있다.

1. 어떤 삼각형과 닮음인 두 삼각형은 서로 닮음임을 증명하여라.
2. 삼각형의 닮음 조건을 이용하여, 삼각형의 두 중선은 이들의 교점에 의해 2:1의 비로 분할됨을 증명하여라.

3. AB=BC인 이등변삼각형 ABC가 주어졌다. 서로 같지 않은 높이 AM, BN을 작도하였다. 삼각형 AMC와 ABN이 닮음임을 증명하여라.

한편, 제시된 탐구과제들 중의 하나로 피타고라스 정리의 증명에 관련된 다음 7개의 부분문제로 구성된 과제가 주어졌다.

(1) 직각삼각형들의 닮음 조건을 정형화하고, 이들을 증명하여라.
(2) 삼각형 ABC에서 각 C가 직각이라 하자. 그러면, 높이 CH는 삼각형 ABC를 삼각형 ABC와 닮음인 삼각형 CAH, CBH로 분할한다. 이를 증명하여라.
(3) 문제 (1)과 (2)를 이용하여, 피타고라스 정리를 증명하여라.
(4) 피타고라스 정리의 역인 '삼각형 ABC에서 $AB_2=AC_2+CB_2$이면, 각 C가 직각'임을 증명하여라.
(5) 사각형의 대각선이 직교하면, 사각형의 대변들의 제곱의 합은 서로 같음을 증명하여라.
(6) 직각삼각형의 가장 작은 중선의 제곱은 다른 두 중선의 제곱의 합보다 5배가 더 작다는 것을 증명하여라.
(7) 반지름이 각각 32cm, 72cm인 두 원이 서로 외접한다. 어떤 직선이 이들 원과 점 A, B에서 접한다. 거리 AB를 구하여라.

5. 결론

본 연구는 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서 구현에 관련된 문헌연구로서, 러시아의 기하교육자인 Gusev의 실험용 기하교과서에 제시된 교과서의 체제, 학습 내용 및 연습문제의 틀과 내용을 분석하여 수준별 수학교육을 위한 수학적 지식의 교수학적 변환의 사례를 고찰하였다.

러시아에서는 학생들의 요구, 흥미, 재능에 상응하는 수학교육의 구현에 대한 연구가 '수학교육의 개별화와 차등화'라는 개념을 중심으로 진행되어 왔다. Gusev는 수학교육의 차등적 접근 분야에서 최고의 권위를 인정받는 기하학 교수학자로, 수학교육의 차등적 접근을 구현하기 위해, 1995년에서 1999년에 걸쳐 5~11학년의 기하학 실험교과서를 저술하였다. Gusev는 이들 교과서의 기술에 있어, 모든 학생들이 필수적으로 획득해야 내용이 구분되어야 하며, 교과서는 기초 기하교육을 받도록 할 뿐만 아니라, 심화 및 확장을 위한 폭넓은 가능성을 제공해야 한다는 교수학적 원리를 바탕으로 삼았다.

본 연구에서는 Gusev의 기하교과서에 제시된 차등적 접근 방법에 대한 고찰을 위해, 본문의 체제, 내용, 연습문제의 유형을 분석하였다. 교과서의 본문에는 필수적인 이론적 내용들을 구분하기 위해, 본문의 왼쪽에 선이 그어져 있다. 그리고, 교과서에 제시된 그밖의 내용은 학생들이 단순히 읽을 수도 있고, 제시된 과제들을 해결하려 시도하고, 기술된 참고 문헌을 찾아 연구할 수 있도록 하기 위해 제시되었다. 한편, 본문에는 공리, 정의, 정리, 물음, 중요한 수학적 아이디어들이 명료하게 구분되어 제시되었다.

한편, 연습문제를 통한 차등적 접근에 관련하여서는, 수학 문제의 수준과 성격에 따라 여섯 가지 유형의 연습문제가 제시되어 있다. 첫 번째 유형과 두 번째 유형의 연습문제는 학생들의 지적 활동인 분석, 종합의 형성 및 육성에 관련된 것이다. 세 번째 유형의 연습문제

는 '표준문제'를 나타내며, 기하학 학습에서 낙제하지 않으려면 풀 수 있어야 하는 수준의 문제이다. 네 번째 유형의 연습문제는 '학습문제'로, 학생들이 일반적으로 풀게 되는 전형적인 유형의 문제이다. 다섯 번째 유형의 연습문제는 '창의적 문제'로, 정형적인 방법으로는 문제가 해결되지 않으며, 문제해결을 위해 어떤 수학적 아이디어를 발명해야 하는 것들이다. 여섯 번째 유형의 연습문제는 '탐구과제'로, 이 유형의 문제를 해결하기 위해서는 몇몇 단원의 학습 내용에 대한 종합적인 지식을 바탕으로 하여 수학자와 같은 진지한 탐구활동이 필요한데, 보통 숙제로 제시된다. 이러한 다양한 유형의 연습문제는 학습자료에 대한 교사의 교수학적 선택의 폭을 넓혀 수준별 차등화 실현의 가능성을 제공할 수 있을 것이다.

참고문헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

김삼태, 이식 (1999). 남・북한 중등학교 수학 교과서의 영역별 내용 비교 분석, 수학교육 38권 1호, 1-14.

김홍기 (2001). 제 7차 교육과정과 교과서의 문제점, 수학교육, 40권 1호, 139-159.

박경미 (2000). 중학교 수학 교육과정 및 교과서 내용의 양과 난이도 수준 분석, 수학교육학연구, 10권 1호, 35-56.

박경미, 임재훈 (2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교, 학교수학, 4권 2호, 317-331.

박문환 (2002). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남・북한 비교, 수학교육학연구, 12권 2호, 181-192.

송순희, 김윤영 (1998). 초・중・고 수학교과서 해석 영역의 연계성에 관한 연구, 수학교육, 37권 1호, 87-100.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대출판부.

우정호, 조영미 (2001). 학교 수학교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구, 수학교육학연구, 11권 2호, 363-384.

유병훈, 엄정하 (2002). 공업계 고등학교 수학과 교과서 구성에 관한 연구: 전자과 교육과정을 중심으로, 수학교육, 41권 1호, 1-18.

이용곤, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 I, 수학교육, 34권 1호, 107-118.

조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색-기하 영역을 중심으로, 학교수학, 4권 1호, 15-28.

최택영, 김인영 (1998). 남북한 수학 교과서 비교, 수학교육 37권 1호, 35-54.

한인기, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 II, 수학교육, 34권 1호, 119-130.

현진오, 이중석 (2001). 공간 논증 기하 단원의 교재 내용 분석 및 개선 방안, 수학교육학연구, 11권 2호, 403-419.

황혜정 (2000). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고, 수학교육 39권 1호, 1-10.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Virginia: NCTM.

<러시아어 참고문헌>

Dorofeev G.V., Kuznetsova L.V., Cuvorova S.B., & Firsov V.V. (1990). 수학교육에서 차등화, 학교에서의 수학, 4권, 15-20.

Gleizer G.D. (1981). 야간학교에서 차등화와 개별화 교육의 문제들. 레닌그라드: 교육아카데미출판부.

Gusev V.A. & Silaev E.V. (1996). 중등학교에서 수학교육의 차등화에 대한 교수학적 기초. 모스크바: PRINT.

Gusev V.A. (1995). 기하학-6. 모스크바: 아반가르드.

Gusev V.A. (1998). 기하학-9. 모스크바: 아반가르드.

Gusev V.A. (2002). 5-11학년 기하학. 모스크바: 러시아어출판사.

Rubinstein S.L. (1958). 사고와 사고의 연구 방법에 대해. 모스크바: 교육아카데미출판부.

Shahmaev N.M. (1992). 중등학교에서의 차등화 교육. 모스크바: 교육출판사.

한인기

A Study on the Mathematics Textbook Considered Student's Individual Difference -Laying Stress on the Gusev's Experimental Textbook-

Han, Inki[2)]

Abstract

In this article we study on a mathematics(geometry) textbook which is written for the purpose of considering student's individual difference by famous russian author V. A. Gusev. We analyze text and exercise of the experimental textbook, form and extract some didactical ideas that help us to design individualized mathematics classroom activities with students.

Keywords: individual difference, differentiated approach, mathematics textbook

2) Gyeongsang National University, Department of Mathematics Education(inkiski@gsnu.ac.kr)