

입력 신호의 크기에 제한을 갖는 2차 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어기의 슬라이딩 평면의 설계

Design of Sliding Surface of a Sliding Mode Controller for a Second Order System with Input Saturation

한 소 희, 손 성 한, 박 강 박*

(Sohee Han, Sung-Han Son, and Kang-Bak Park)

Abstract : In this paper, a novel sliding surface is proposed to guarantee that the sliding mode controller for a second order system produces a control signal whose magnitude is always within the bound of input saturation. The proposed sliding surface uses a time-varying function, and its time derivative works to make a control signal within the bounds of input saturation. Simulation results are presented to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords : sliding mode control, input saturation, sliding surface

I. 서론

일반적으로 제어 기법이 제안되는 경우에는 여러 가지 가정이 도입된다. 가장 일반적으로 사용되고 있는 것은 제어 신호의 크기에 제약이 없다는 가정이다. 즉, 제어기에서 생성되는 제어 신호의 크기가 아무리 크게 나온다고 하더라도 그러한 신호를 만들어낼 수 있다고 가정하며, 제어 대상 시스템은 그러한 신호를 받아들일 수 있다고 가정하고 있다. 그러나 실제 물리적 시스템은 생성할 수 있는 신호 및 받아들일 수 있는 신호의 크기에 제한이 있다. 따라서 실제 적용 가능한 제어 기법을 제안하기 위해서는 이러한 입력 신호에 대한 제약조건도 함께 고려해야한다.

슬라이딩 모드 제어기는 스위칭 제어 기법 중 하나이며, 외란 및 매개변수 변화나 불확실성에 대해 강인한 특성을 갖는 장점이 있다[1,3]. 이러한 제어 기법에 대하여 입력이 제한되는 시스템에 대한 기존의 연구는 주로 수렴영역을 구하는 문제에 집중되어왔다[4,5]. 즉, 일반적인 방법으로 설계된 제어기가 생성하는 신호의 크기가 지정된 값을 넘지 않게 되는 영역을 상태변수 공간에서 구하는 연구였다. 그러므로 기존의 제어기에 대해서, 적용이 가능한 초기 오차 범위는 제시할 수 있으나, 그 범위를 넘는 경우에 대해서는 해답이 제시되지 못했다. 따라서 본 논문에서는 생성되는 제어신호가 사전에 설정한 값을 벗어나지 않는 제어 기법을 제안하고자 한다.

슬라이딩 모드 제어기처럼 스위칭 기법을 사용하는 제어기에 대해서, 제어기에서 생성되는 신호의 크기가 일정한 범위를 벗어나지 않도록 하는 가장 손쉬운 방법은 스위칭 신호의 크기를, 제어기를 적용할 대상 시스템이 허용하는 최대에 가까운 신호 수준으로 놓는 것이다. 그러면 제어기

가 생성하는 신호는 항상 시스템이 수용 가능한 수준이 되며, 외란이나 매개변수 변화 등에 대하여 강인한 특성을 얻을 수 있다. 그러나 이와 같은 제어기를 적용하게 되면 정상상태에 도달한 이후에는 과도한 제어 입력이 들어가게 되므로, 시스템에 부담을 주게 된다. 제어 입력은 일반적으로 오차에 비례하는 관계를 갖고 있으므로, 초기에 오차가 큰 기간 동안에 과도한 제어 입력이 들어가게 되는 가능성이 높으므로, 모든 시간대에 대해서 항상 최대 허용 제어 입력을 넣을 필요는 없다. 뿐만 아니라, 과도한 입력이 들어가게 되면 떨림(chattering)현상이 쉽게 나타나게 되어, 시스템이 쉽게 파괴하게 되며 모델링 할 때 고려하지 않았던 동특성이 나타나게 되기도 한다[2].

따라서 본 논문에서는 함수가 첨가된 슬라이딩 평면을 도입하여, 기존의 슬라이딩 모드 제어 기법이 갖는 특성을 유지하면서, 초기에 발생할 수 있는 과도한 입력에 대하여 입력 제한 폭을 넘지 않도록 하는 제어 기법을 제안하고자 한다.

II. 문제 정의

다음과 같이 외란을 갖고 매개변수 불확실성을 갖는 선형 시변 시스템을 고려해보자:

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \Delta A(t))x(t) + Bu(t) + d(t), \quad (1)$$

여기서 $x(\cdot) \in \mathbb{R}^2$ 는 상태변수 벡터, $u(\cdot) \in \mathbb{R}$ 는 스칼라 입력, $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 선형 시변 시스템 행렬, $\Delta A(\cdot) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 시스템 행렬의 원소들 중 불확실성을 갖는 시변 요소들에 관한 행렬, $B \in \mathbb{R}^n$ 는 입력 벡터, 그리고 $d(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ 는 외란을 나타내는 벡터이다. 여기서, 시스템이 받아들일 수 있는 제어 입력 신호의 허용 범위는 다음과 같다.

$$|u(t)| \leq U_{\max}. \quad (2)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

접수일자 : 2004. 9. 25., 채택확정 : 2004. 10. 13.

한소희, 손성한, 박강박 : 고려대학교 제어계측공학과

(cie99@korea.ac.kr/sk0701@komet.net/kbpark@korea.ac.kr)

※ 본 논문은 고려대학교 특별연구비에서 지원하여 연구하였습니다.

또한 위의 (1)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad (3)$$

여기서, $\xi(t) = \Delta A(t)x(t) + d(t) \in R^2$ 이다.

이와 같은 시스템에 대하여 보다 구체적으로는 다음과 같은 시스템이라고 가정한다.

가정 1 : (3)의 형태로 표현되는 시스템 중 다음과 같은 canonical form으로 나타내어지는 2차 시스템을 고려 대상으로 한다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u(t) + \zeta(t)) \quad (4)$$

(4)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)x(t) = u(t) + \zeta(t), \quad (5)$$

여기서, $\zeta(t)$ 는 다음과 같이 알려진 함수(혹은 상수)에 의해서 유계된다고 가정한다.

$$|\zeta(t)| \leq D. \quad (6)$$

본 논문에서 다루는 시스템은 적용할 수 있는 제어 신호의 크기가 (2)와 같이 제한받는다. 주어진 시스템이 받아들일 수 있는 최대 입력을 넘어도 수렴하는 모습을 보이지 못한다면, 어떤 제어 기법을 적용해도 안정화시킬 수 없을 것이므로 다음과 같은 가정을 도입한다.

가정 2 : 주어진 시스템 (4)는 (2)로 제한되는 제어 신호를 적용하여도 안정화가 가능하다.

위의 가정 2가 만족되기 위해서는 외란이 있는 시스템의 경우에는, 적용할 수 있는 제어 신호의 상한치가 외란의 크기 보다는 커야할 것이다. 따라서 최소한 다음과 같은 가정이 만족되어야함을 쉽게 알 수 있다.

가정 3 : 외란의 크기와 제어 입력의 상한치와는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$D \leq U_{\max}. \quad (7)$$

III. 슬라이딩 모드 제어기 설계

일반적으로 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$s(t) = C^T x(t). \quad (8)$$

여기서 $C^T = (c \ 1)^T \in R^2$ 는 $C^T B$ 가 nonsingular하고, 슬라이딩 모드, 즉, $s(t) \equiv 0$ 에서 나타나게 되는 슬라이딩 동특성이 전역적(global)이고 점근적(asymptotical)으로 안정

하도록 설계한다. (8)의 경우에는 $c > 0$ 으로 놓으면, $s(t) = \dot{x}(t) + cx(t)$ 이 되므로, 슬라이딩 모드, $s(t) \equiv 0$, 예서의 동특성은 안정하게 된다. 본 논문에서는 (8)과 같은 일반적인 슬라이딩 평면에 시간 함수를 첨가하여 다음과 같은 슬라이딩 평면을 도입한다.

$$s(t) = C^T x(t) - h(t), \quad (9)$$

여기서 $h(t) \in R$ 이며, 각 요소는 시간에 대해 한 번 미분 가능한 함수라고 정의한다. 즉, $h(t) \in C^1[0, \infty)$ 이다. 따라서 (9)과 같은 슬라이딩 평면을 이용하여 다음의 정리를 도출할 수 있다.

정리 1 : (5)에 주어진 제어 대상 시스템에 대하여, (9)과 같은 슬라이딩 평면을 도입하여 다음과 같은 제어기를 적용하면, 생성되는 제어 신호는 제어 입력 허용 범위를 벗어나지 않는다.

$$u(t) = -(c - a_1(t))x_2(t) + a_2(t)x_1(t) + \dot{h}(t) - K \cdot \text{sgn}(s)$$

단, $K > 0$ 이며 $\dot{h}(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{h}(t) = \begin{cases} -(|u_1| - U_{\max})\text{sgn}(u_1) & \text{if } |u_1| - U_{\max} > 0 \\ -u_1 - U_{\max}\text{sgn}(h) & \text{if } |u_1| - U_{\max} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

여기서 $u_1(t)$ 는 다음과 같다.

$$u_1(t) = -(c - a_1(t))x_2(t) + a_2(t)x_1(t) - K \cdot \text{sgn}(s)$$

증명 : (9)에서 제안한 슬라이딩 함수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$s(t) = cx_1(t) + x_2(t) - h(t)$$

따라서 이를 시간에 대해 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= c\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) - \dot{h}(t) \\ &= c\dot{x}_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_1(t) + u + \zeta - \dot{h}(t) \end{aligned}$$

그러므로 일반적인 슬라이딩 모드 제어 기법을 적용한다면, 제어기는 다음과 같이 표현될 것이다.

$$u(t) = -(c - a_1(t))x_2(t) + a_2(t)x_1(t) + \dot{h}(t) - K \cdot \text{sgn}(s) \quad (11)$$

단, $K > D$. 그러나 시스템에 적용할 수 있는 입력 신호의 크기에 제한이 있다면, (11)을 이용하여 계산한 입력 신호가 언제나 적용 가능한 수준에 있음을 보장할 수 없게 된다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 슬라이딩 평면에 $h(t)$ 라는 함수를 첨가하였으며, 이를 통하여 입력 신호의 크기에 제한이 있는 경우에도 이를 극복할 수 있게 된다. 즉, 입력 신호의 제한이 U_{max} 인 경우에, (11)에서 $\dot{h}(t)$ 을 제외한 나머지 항들의 합, 즉 $u_1(t)$ 의 절대값이 U_{max} 를 넘는 경우에는, 그 만큼을 $\dot{h}(t)$ 를 이용하여 상쇄시킬 수 있으며 이는 (10)에 제안한 방법을 통해서 구현할 수 있다.

또한, $u_1(t)$ 의 절대값이 U_{max} 를 넘지 않는 경우에는 $h(t)$ 를 0으로 수렴하게끔 $\dot{h}(t)$ 를 조절할 수 있으며, 그 조절 방법이 (10)에 제안되어 있다.

IV. 모의실험 결과

다음과 같이 (4)에 주어진 것과 동일한 구조를 갖는, 시스템의 불확실성 및 외란 등을 갖는 2차 시변 시스템에 대하여 모의실험을 수행하였다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u(t) + \zeta(t))$$

여기서, $a_1(t) = 5 + \cos(5t)$, $a_2(t) = 10 + \sin(10t)$, $\zeta(t) = \sin(20t) + \cos(15t)$ 이다. 또한, 슬라이딩 함수 $s(t)$ 의 계수는 $c = 3$ 으로 설정하여 $h(t) = 0$ 이 된 후에 얻을 수 있는 특성을 정하였으며, 생성 가능한 입력 신호 크기의 제한은 $U_{max} = 35$ 이다. 그리고 (6)으로부터 $K = 2$ 로 설정하였다.

그림 1~8에 모의 실험한 결과를 제시하였다. 그림 1과 그림 2는 $x_1(t)$ 및 $x_2(t)$ 를 보여주고 있다. 그림 1에 보이는 바와 같이 출력이 잘 안정화되어 2초 부근에서 거의 0에 수렴한 모습을 보이고 있음을 알 수 있으며, 그 시간 미분(속도)인 $x_2(t)$ 는 그림 2와 같은 궤적을 보인다.

그림 1, 2의 정보를 이용하여 상태 궤적을 그림 3에 보였다. 상태 궤적에서 볼 수 있듯이, 궁극적으로는 상태가 $s(t) = x_2(t) + cx_1(t) = x_2(t) + 3x_1(t) = 0$ 으로 정의되는 슬라이딩 평면에 도달하는 모습을 보이고 있음을 알 수 있다.

슬라이딩 모드 제어기의 강점 중 하나는 슬라이딩 모드 ($s(t) = 0$)에 있으면, 매개변수 변화나 외란 등에 강인한 특성을 보인다는 점이다. 그러나 슬라이딩 모드에 들어가기 전까지의 도달구간에서는 그러한 특성을 얻을 수 없다. 그림 4는 슬라이딩 함수($s(t)$)를 보이는 그림이며, 여기서 볼 수 있듯이, 슬라이딩 함수 $s(t)$ 는 처음부터 끝까지 항상 0 근처에 있음을 알 수 있다. 따라서 제안된 방법을 이용하면

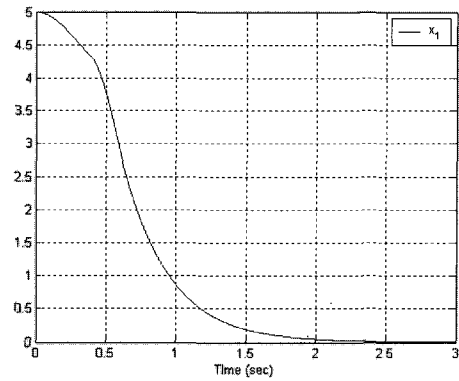


그림 1. 출력($x_1(t)$).
Fig. 1. Output($x_1(t)$).

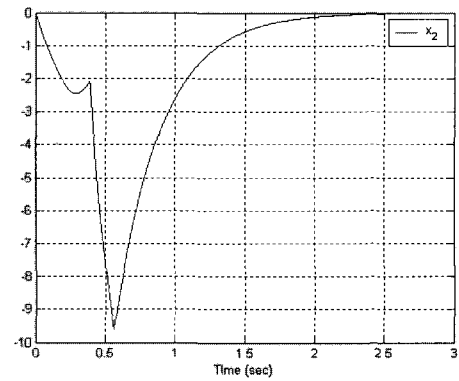


그림 2. $x_2(t)$.
Fig. 2. $x_2(t)$.

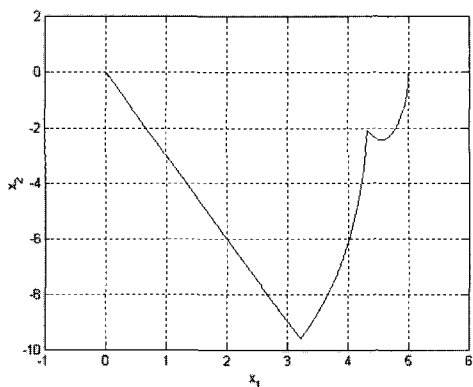


그림 3. 상 궤적.
Fig. 3. Phase portrait.

도달구간 없이 전체 시스템이 항상 슬라이딩 모드에 들어가 있음을 알 수 있다.

그림 5는 입력 제한이 없다는 가정 하에서 계산된 임시 제어 신호인 $u_1(t)$ 를 보이고 있다. 이 그림에서 볼 수 있

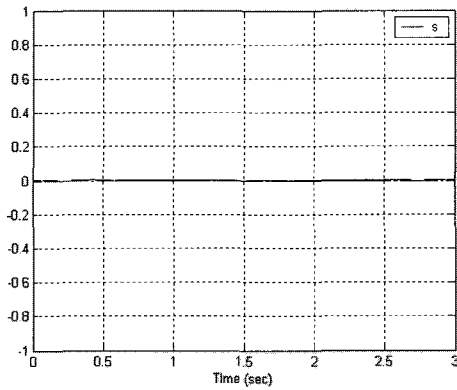


그림 4. 스위칭 함수 ($s(t)$).
Fig. 4. Switching variable ($s(t)$).

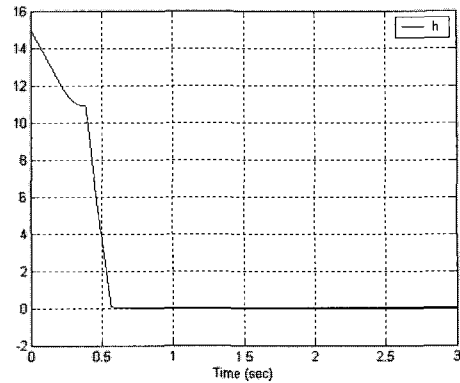


그림 7. 첨가함수 ($h(t)$).
Fig. 7. Augmented function ($h(t)$).

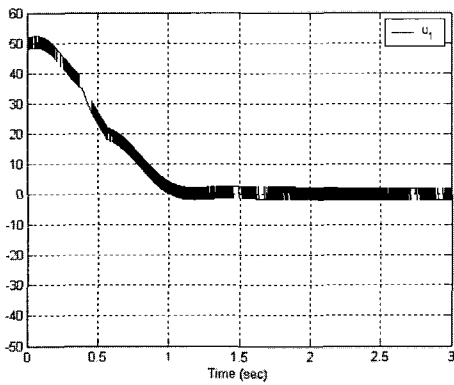


그림 5. $u_1(t)$.
Fig. 5. $u_1(t)$.

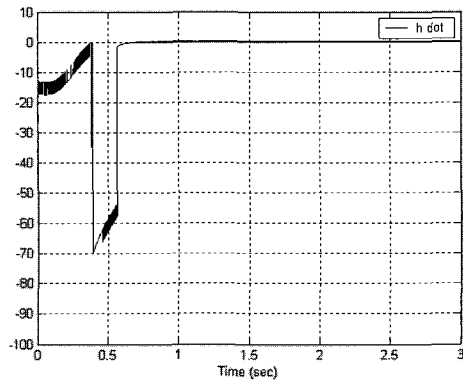


그림 8. $\dot{h}(t)$.
Fig. 8. $\dot{h}(t)$.

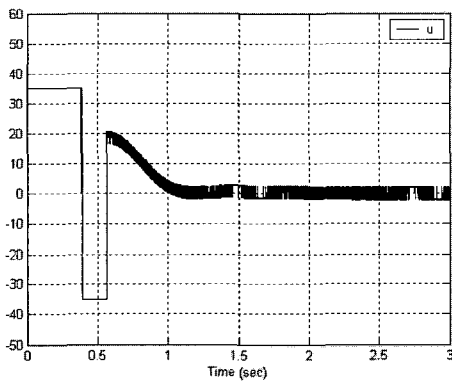


그림 6. 제어 입력 ($u(t)$).
Fig. 6. Control Input ($u(t)$).

는 바와 같이, 초기에는 상대적으로 큰 오차로 말미암아 $U_{max} = 35$ 를 넘는 큰 제어 신호를 생성하고 있음을 알 수 있다. 이러한 신호는 주어진 여건에서는 적용할 수 없으므로, 제안된 방법을 이용하여 제어 신호의 크기가 $U_{max} = 35$ 보다 작아지도록 만들었으며 그 결과는 그림 6

에 보였으며, 실제 제어 신호는 항상 주어진 범위 안에 들어 있음을 볼 수 있다.

본 논문에서 제안된 슬라이딩 평면에 추가된 함수 $h(t)$ 의 미분함수인 $\dot{h}(t)$ 의 궤적은 그림 7에 보였다. 따라서 $|\dot{h}(t)|$ 이 큰 값을 갖다가 시간이 감에 따라 점점 줄어드는 모습을 보이는 것을 알 수 있다. 그러다가 $|u_1| < U_{max}$ 가 되면, $h(t) \rightarrow 0$ 이 되는 방향의 부호를 갖도록 $|u| = U_{max}$ 가 되도록 입력을 넣고 있음을 그림 6과 7에서 알 수 있으며, $h(t)$ 가 0이 된 후에는 $s(t) = x_2(t) + 3x_1(t)$ 라는 일반적인 슬라이딩 평면을 따라 제어되고 있음을 알 수 있다.

그림 8은 $h(t)$ 의 궤적을 보이고 있으며, 0.6초 경에 0으로 수렴한 것을 볼 수 있다. 따라서 제안된 방법이 유효함을 알 수 있다.

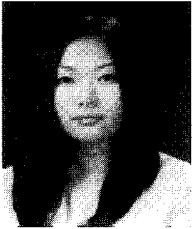
V. 결론

본 논문에서는 입력의 크기에 제한이 있는 시스템에 대하여, 주어진 제약을 넘지 않는 제어 입력 신호를 생성하는 슬라이딩 모드 제어기의 설계 기법을 제안하였다. 이를 위

하여 기존의 슬라이딩 모드 제어기의 슬라이딩 평면 함수에 임의로 설계 가능한 새로운 함수를 추가하고, 이 함수의 시간 미분을 적절한 알고리즘을 통해 변화시키는 알고리즘을 제안하여, 주어진 제어 신호 크기의 제약 조건을 만족하는 신호를 항상 생성함을 보였으며, 이의 검증을 위하여 모의 실험을 수행하였다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.
- [2] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, 1988.
- [3] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.
- [4] S. M. Madani-Esfahari, M. Hached and S. H. Zak, "Estimation of sliding mode domains of uncertain variable structure systems with bounded controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 446-449, 1990.
- [5] H. H. Choi and M. J. Chung, "Estimation of asymptotic stability region of uncertain systems with bounded sliding mode controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 2275-2278, 1994.



한 소 희

2003년 2월 고려대학교 제어계측공학과(공학사). 2003년 3월 ~ 현재 고려대학교 제어계측공학과(석사과정). 관심분야는 강인제어, 모터제어, SVM 등.



손 성 한

1988년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 동 대학원 석사(1990). 2000년 3월 ~ 현재 고려대학교 제어계측공학과(박사과정). 1990년 3월~현재 국방과학연구소 연구원. 관심분야는 가변구조제어이론, 비행체 유도제어이론 등.



박 강 박

1990년 2월 고려대학교 전자공학과(공학사). 1992년 2월 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학석사). 1997년 2월 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학박사). 1997년~1999년 2월 정보전자연구소 연구원.

1997년 12월~1999년 2월 큐슈공업대학(KIT) 객원교수. 1999년 3월~현재 고려대학교 제어계측공학과 교수. 관심분야는 강인제어, 비선형제어, 로봇제어 등.