

탄성기초 위에 놓인 파이프의 동적 안정성에 미치는 말단 질량의 영향

The Effect of a Tip Mass on Dynamic Stability of Pipes on Elastic Foundations

류 시 용† · 류 봉 조* · 김 건 희**

S. U. Ryu, B. J. Ryu and G. H. Kim

(2004년 6월 8일 접수 : 2004년 10월 1일 심사완료)

Key Words : Tip Mass(끝단질량), Elastic Foundation(탄성기초), Eigenvalue Branch(고유치 분기), Quasi Mode (준 모드), Flutter(플러터)

ABSTRACT

The paper discussed the effect of a tip mass on the stability of pipes on elastic foundations. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the numerical scheme using finite element method is applied to obtain the discretized equations. With or without internal damping, the critical flow velocities of the pipes are investigated according to the variation of elastic foundation parameters and tip mass ratios. Also, the relationship between the eigenvalue branches and the corresponding flutter modes of the cantilevered pipes with a tip mass on the elastic foundations is fully investigated.

1. 서 론

유동유체가 흐르는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동에 관한 연구로서는 Trans-Arabian 송유관의 진동문제를 설명 하려는 의도에서 비롯한 1950년의 Ashley와 Haviland⁽¹⁾의 연구를 들 수 있다. 그 후 Feodos'ev⁽²⁾는 외팔 송수관에 있어서 올바른 선형 운동방정식을 유도하여 동역학적 관점에서 해석을 시도 하였다.

1960년대에는 Benjamin^(3,4)은 2자유도 분절된 송수관을 모델로 하여 동역학과 진동에 관한 이론과 실험을 병행 하였고, Gregory와 Paidoussis^(5,6)는 유체

가 흐르는 외팔 수평 파이프에 있어서 진동에 대해 이론과 실험적 연구를 병행하여 비로소 초기의 연구들을 정립 하였다. 이러한 초기의 연구를 바탕으로 1970년 이후에는 시스템 파라미터(집중질량, 내부감쇠, 스프링, 외부감쇠, 중력 등)가 파이프의 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다.

집중질량이 파이프의 동적 안정성에 미치는 효과에 대해서는 Hill과 Swanson⁽⁷⁾에 의해 처음 연구되었는데 이들은 파이프에 부가 집중질량이 복수인 경우에 대해서도 확장하여 연구하였다. 그 후, Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽⁸⁾은 비보존계의 안정성 문제에 있어서 중요한 역할을 하는 것으로 알려진 내부감쇠의 효과를 고려하여, 이론과 실험을 병행하여 Hill과 Swanson의 연구를 확장하였다. Becker⁽⁹⁾는 수평 외팔 파이프의 자유단 만이 병진 스프링으로 지지된 경우 스프링 상수의 변화가 계의 동적안정성에 미치는 영향에 대해 연구하였고, Edelstein과 Chen⁽¹⁰⁾은 수평 외팔파이프에 있어서 중간지지점이 파이프의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. Sugiyama와

† 책임저자 : 정희원, 한국기초과학지원연구원

E-mail : ryu@kbsi.re.kr

Tel : (042) 870-1685, Fax : (042) 870-1689

* 정희원, 한밭대학교 기계공학부

** 한국기초과학지원연구원 제작지원팀

그의 공동연구자들⁽¹¹⁾은 2자유도 분절된 수평파이프를 모델로 하여 외부감쇠가 파이프의 안정성에 미치는 효과를 이론적으로 예측하고 실험적으로 검증하였다. 또한, Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽¹²⁾은 수평 파이프에 대해 탄성 스프링 지지와 집중질량이 계의 동적안정성에 미치는 복합효과에 대하여 조사하였다.

탄성기초 위에 놓인 외팔 파이프 내부를 유동 유체가 흐르는 경우에 있어서, Lottati와 Kornecki⁽¹³⁾는 분포스프링 강성의 변화에 따른 파이프의 안정성에 대해서 처음으로 연구를 하였고, 그 후 Impollonia와 Elishakoff⁽¹⁴⁾는 2자유도 분절된 수평파이프를 모델로 하여 파이프의 발산형불안정과 플러터 불안정에 미치는 탄성기초의 효과를 연구하였다.

그러나, 지금까지도 탄성기초 위에 있는 파이프의 안정성 문제에 있어서 파라미터의 효과에 대한 연구는 그다지 많지 않다. 탄성기초란 지반모델로 가정될 수 있는 병진 분포 스프링으로 모델화되며, 이러한 파이프의 안정성 및 진동특성 등에 대한 연구가 필요로 해진다.

따라서, 이 논문의 목적은 자유단에 집중질량을 갖고 탄성기초 위에 놓인 내부유동유체가 흐르는 파이프에 있어서, 집중질량 파라미터 값과 탄성기초 파라미터의 변화가 파이프의 동적 안정성에 미치는 효과를 내부감쇠를 무시한 경우와 고려한 경우에 대해서 연구하는데 있다.

2. 이 론

2.1 운동지배방정식

Fig. 1은 탄성기초 위에 놓여있고 자유단에 집중질량 M 을 가진 외팔 파이프의 수학적 모델을 보여준다. Fig. 1에서 L 은 보의 전체길이, EI 는 파이프의 굽힘 강성, v 는 유속을 나타낸다.

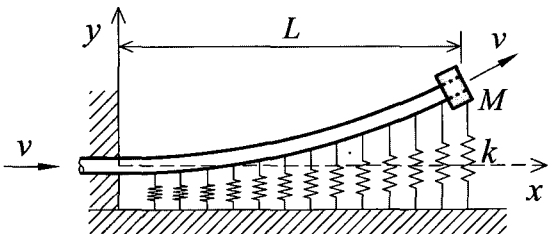


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered pipe conveying fluid with a tip mass on elastic foundation

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위해 확장된 해밀톤 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, W_c 는 유체력의 보존 성분에 의한 일, U 는 탄성포텐셜 에너지 δW_{id} 는 내부 감쇠에 의한 가상일, 그리고 δW_{nc} 는 비 보존성분에 의한 가상 일을 나타낸다.

$$T = \int_0^L \left[\frac{m_p}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_f}{2} \left\{ v^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx + \left[\frac{M}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]_{x=L} \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{m_f v^2}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L ky^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = -m_f v \left[\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} \delta y \quad (6)$$

식 (2)부터 식 (6)까지에 있어, m_p 와 m_f 는 각각 송수관과 유동유체의 단위길이 당 질량을 의미하고, E^* 는 내부재질 감쇠계수를 표시한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\{m_p + m_f\} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + m_f v \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_f v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + m_f v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - ky \delta y \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[M \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - m_f v \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\}_{x=L} \delta y \right] dt = 0 \quad (7)$$

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}},$$

$$\mu = \frac{M}{(m_f + m_p)L}, \quad \kappa = \frac{kL^4}{EI}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p},$$

$$\gamma = \frac{E^\circ}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \quad u = vL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad (8)$$

식 (8)의 무차원 파라미터들과 좌표들을 식 (7)에 대입하면 식 (9)와 같이 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \left[\eta_\tau \delta \eta_\tau + \beta^{\frac{1}{2}} u (\eta_\tau \delta \eta_\xi + \eta_\xi \delta \eta_\tau) + u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi - \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - \gamma \eta_{\xi\xi\tau} \delta \eta_{\xi\xi} - \kappa \eta \delta \eta \right] d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\mu \eta_\tau \delta \eta_\tau - \beta^{\frac{1}{2}} u \eta_\tau \delta \eta - u^2 \eta_\xi \delta \eta \right]_{\xi=1} d\tau = 0. \quad (9)$$

2.2 유한요소법의 적용

식 (9)의 무차원화된 지배방정식으로부터 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하였으며, 외팔 송수관을 개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

Fig. 2에서 국부좌표 ($\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} + \beta^{\frac{1}{2}} u N (\eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} + \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)}) + u^2 N^2 \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} - N^4 \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} \delta \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} - \gamma N^4 \eta_{\zeta\zeta\tau}^{(i)} \delta \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} - K \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right\} d\zeta + \left\{ \mu \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} - \beta^{\frac{1}{2}} u N \eta_\tau^{(N)} \delta \eta^{(N)} - u^2 N^2 \eta_\zeta^{(N)} \delta \eta^{(N)} \right\}_{\zeta=1} \right] d\tau = 0. \quad (10)$$

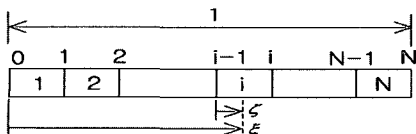


Fig. 2 Finite element model of the pipe

한편, 변위함수($\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \mathbf{e}^{(i)}(\zeta) \cdot \mathbf{v}^{(i)}(\tau)$)를 도입하고, 이를 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻게 된다.

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{v}_\tau\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{v}_\tau\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0} \quad (11)$$

2.3 고유치 문제

식 (11)에 있어 벡터 $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ 는 식 (12)와 같고,

$$\{\mathbf{v}(\tau)\} = \{\mathbf{x}\} \exp(\lambda\tau) \quad (12)$$

식 (11)은 식 (13)의 표준 고유치문제로 귀착된다.

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{A}][\mathbf{Z}] \quad (13)$$

식 (13)에서

$$\{\mathbf{Z}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{C}] \end{bmatrix}$$

이다. 여기서, $\{\mathbf{w}\}$ 는 $\{\partial \mathbf{v} / \partial \tau\}$ 를 의미한다.

계의 안정성 판별은 특성근 ($\lambda = \sigma \pm i\omega$)의 실수 부분인 σ 의 부호에 의해 판별된다. 즉 $\sigma > 0$ 일때 계는 불안정하게 되고, $\sigma < 0$ 일때 안정하게 된다. 따라서, $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계 조건으로 이때의 유속이 임계유속(u_{cr})이 된다.

2.4 모드 형상

플러터가 발생하는 임계유속($u_{cr} = u_k$)에서 고유벡터 \mathbf{x} 에 의해서 $\mathbf{v}(\tau)$ 를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

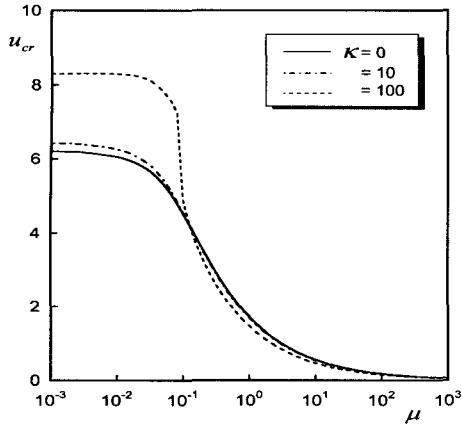
$$\mathbf{v}(\tau) = \|\{\mathbf{x}_i\}\| \cos(\omega_i \tau + \phi_i) \quad (14)$$

여기서 위상 각 ϕ_i 은 다음과 같다.

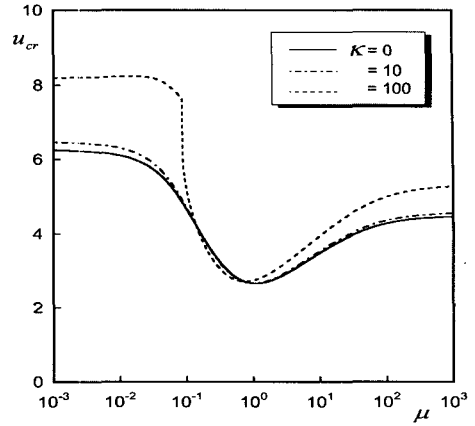
$$\tan \phi_i = \text{Im}\{\mathbf{x}_i\} / \text{Re}\{\mathbf{x}_i\} \quad (15)$$

3. 해석결과와 고찰

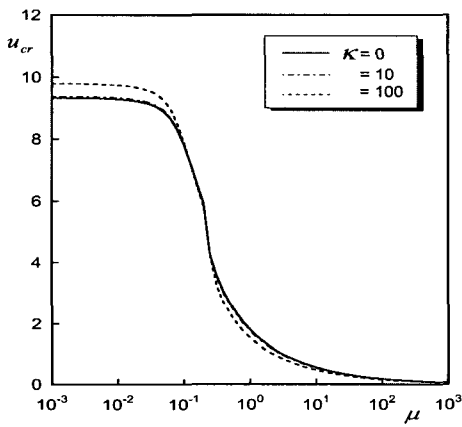
Fig. 3은 내부감쇠를 무시한 경우($\gamma = 0$), 탄성기초 파라미터 κ 값과 집중 질량 파라미터 값의 변화에 따른 임계 유속 값을 나타내고 있다.



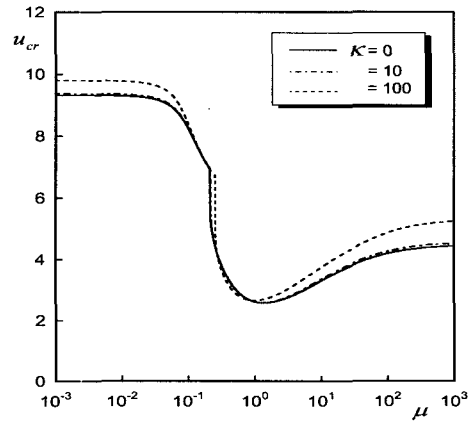
(a)



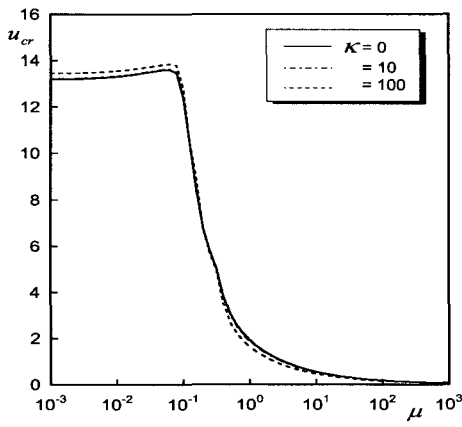
(a)



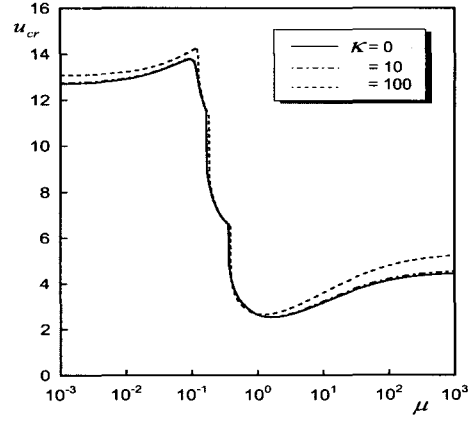
(b)



(b)



(c)



(c)

Fig. 3 Critical flow velocity as a function of the tip mass parameter for $\beta=0.25, 0.5, 0.75$ ($\gamma=0.0$)

Fig. 4 Critical flow velocity as a function of the tip mass parameter for $\beta=0.25, 0.5, 0.75$ ($\gamma=0.001$)

이 그림에서는 집중 질량 파라미터 값이 증가할수록 임계 값이 크게 감소해 가는 것을 알 수 있다. Fig. 3(a)의 $\beta=0.25$ 인 경우에 있어서는 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 증가하는 안정화 효과를 얻을 수 있고, $\mu \geq 0.126$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 감소하는 불안정화 효과를 얻을 수 있다. Fig. 3(b)의 $\beta=0.50$ 인 경우에 있어서 $\mu < 0.127$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 증가하는 안정화 효과를 얻을 수 있고, $\mu \geq 0.127$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 감소하는 불안정화 효과를 얻을 수 있다. Fig. 3(c)의 $\beta=0.75$ 인 경우에 있어서도 μ 가 0.201을 경계로 하여 각각 안정화 효과와 불안정화 효과를 가져 온다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 내부감쇠를 고려한 경우($\gamma=0.001$), 탄성기초 파라미터 κ 값과 집중 질량 파라미터 μ 값의 변화에 따른 임계 유속 값을 나타내고 있다. 이 그림에서는 집중 질량 파라미터 값이 증가 할수록 임계 값이 크게 감소하다가 다시 증가해 가는 것을 알 수 있다. Fig. 4(a)의 $\beta=0.25$ 인 경우에 있어서는, $\mu < 0.139$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 값이 크면 클수록 임계값이 증가하는 안정화 효과를 얻을 수 있고, $0.139 \leq \mu < 0.758$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 감소하는 불안정화 효과를 얻을 수 있으며, $\mu \geq 0.758$ 의 구간에서는 탄성기초 파라미터 κ 값이 크면 클수록 임계값이 다시 증가하여 안정화 효과를 얻을 수 있다. Fig. 4(b)의 $\beta=0.50$ 인 경우에 있어서도 κ 값이 크면 클수록 $\mu < 0.169$ 의 구간에서는 안정화 효과, $0.169 \leq \mu < 0.817$ 의 구간에서는 불안정화 효과, $\mu \geq 0.817$ 의 구간에서는 다시 안정화 효과를 얻을 수 있다. Fig. 4(c)의 $\beta=0.75$ 인 경우에 있어서도 κ 값이 크면 클수록 $\mu < 0.407$ 의 구간에서는 안정화 효과, $\mu \geq 0.977$ 의 구간에서는 불안정화 효과, 의 구간에서는 다시 안정화 효과를 얻을 수 있다.

Fig. 5는 파이프의 질량비 β 가 0.25이고, 질량 파라미터 μ 가 0.012일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수 축을 가로질러 플러터가 발생한다. 이때의 임계유속 값은 $u_{cr}=8.277$

이고, 고유진동수는 $\omega_* = 26.344$ 이다.

Fig. 6은 파이프의 질량비 β 가 0.25이고, 질량 파라미터 μ 가 0.0126일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생하며, 임계유속 값과 고유진동수 값은 각각 $u_{cr}=8.274$, $\omega_* = 26.449$ 이다. 즉 μ 값의 증가에 따라 임계유속 값과 고유진동수 값은 아주 미소하게 변화하지만 플러터가 발생하는 고유치 분기의 차수는 각각 2차에서 3차로 바뀌는 것을 알 수 있다.

이제 불안정에 관계하는 고유치 분기에 대해 상세히 관찰하기 위해서 Fig. 5의 점선부분을 확대하여 $\mu = 0.0122, 0.0125, 0.0126$ 일 때의 고유치 분기의 궤적을 추가하여 Fig. 7에 나타내었다. 2차 고유치 분기

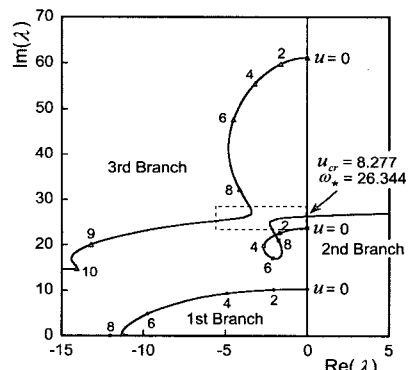


Fig. 5 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for ($\beta=0.25, \gamma=0.0, \kappa=100$)

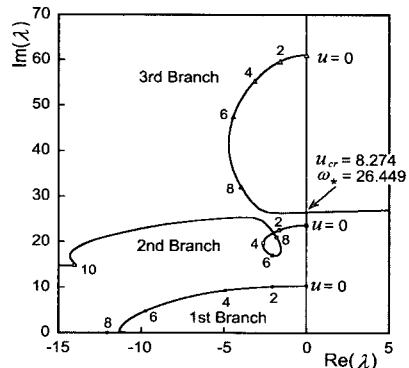


Fig. 6 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for ($\beta=0.25, \gamma=0.0, \kappa=100$)

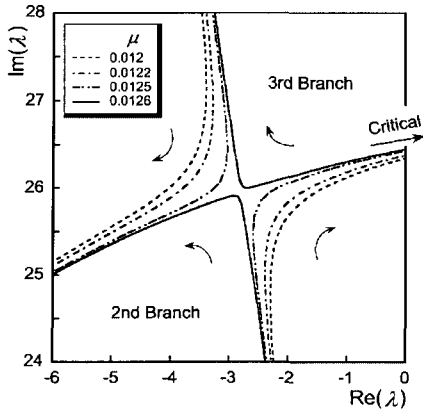


Fig. 7 Transfer of instability branch from the second to the third branch

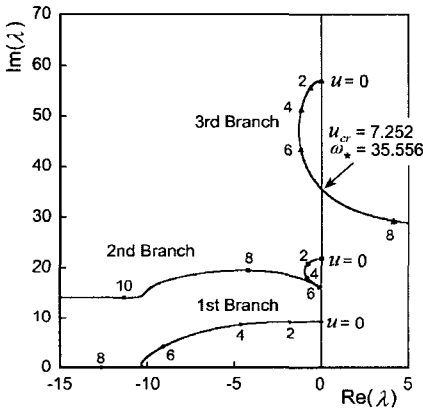


Fig. 8 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for ($\beta=0.25$, $\gamma=0.0$, $\kappa=100$)

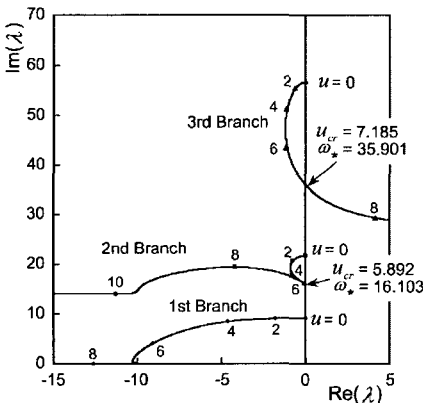


Fig. 9 Argand diagrams of the three lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for ($\beta=0.25$, $\gamma=0.0$, $\kappa=100$)

와 3차 고유치 분기가 유착하고 전환이 발생하여 에서는 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다.

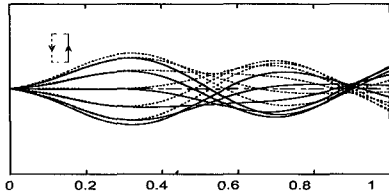
다음은 Fig. 3(a)에 있어서 임계값이 급격히 감소하는 이유를 설명하기 위하여 이고 과에 대한 고유치 곡선을 Fig. 8과 Fig. 9에 나타내었다

Fig. 8은 $\beta=0.25$ 이고, $\mu=0.08$ 일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 3차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수 축을 가로질러 플러터가 발생한다. 이때의 임계유속 값은 $u_{cr}=7.252$ 이고, 고유진동수 값은 $\omega_* = 35.556$ 이다.

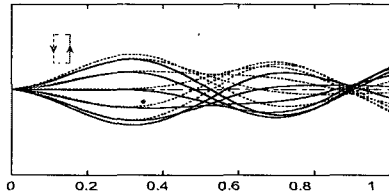
Fig. 9는 $\beta=0.25$ 이고, $\mu=0.084$ 이고, 일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 이 그림에서 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수 축을 가로질러 플러터가 발생하고 임계유속 값과 고유진동수 값은 각각 $u_{cr}=5.892$ 와 $\omega_* = 16.103$ 로 급격히 감소하는 것을 알 수 있다.

Fig. 10~Fig. 12는 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림들로 각각 1/12의 주기로 최대진폭이 파이프의 전체길이의 1/10에 해당된다. 먼저 Fig. 10(a)는 이고, 일 때의 불안정 진동 모드 형상이다. 이 그림에서는 2개의 이동절점(moving node)을 가지며 준(quasi) 3차 모드형이다. 플러터에 관계하는 고유치 분기는 Fig. 5에서 알 수 있듯이 2차 분기로 일치하지 않는다. Fig. 10(b)는 이고, 일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 두개의 이동절점을 가지므로 준3차 모드형 이고 플러터에 관계하는 고유치 분기도 Fig. 6에서 알 수 있듯이 3차 분기로 일치한다.

Fig. 11(a), (b)는 Fig. 8과 9에서의 가장먼저 플러터가 발생하는 3차 고유치 분기와 2차 고유치 분기의 임계유속 값에서의 불안정 진동 모드형상이다. 각각 두개와 한 개의 이동절점을 가진 준3차와 2차 모드형을 보여주고 있다. 이상에서 살펴본 바와 같이 진동모드형상은 고유진동수에 크게 의존하므로 진동모드의 차수는 고유치 분기의 차수와 반드시 일치하는 것만은 아니라는 것을 알 수 있다. Fig. 12는 자유단 집중질량 파라미터 값이 각각 일 때 모드형상의 변화를 나타내고 있다. 모두 한 개의 이동절점을 가진 2차 불안정 진동 모드형이지만 집중질량 파라미터 값이 증가 할수록 이동절점의 위치가 자유단으로 이동하는 것을 알 수 있다.

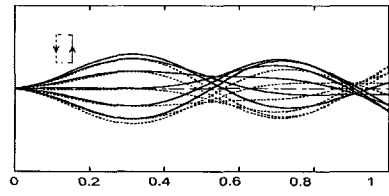


(a)

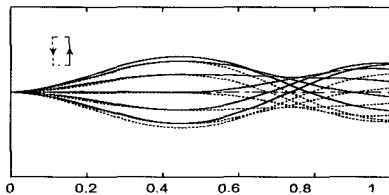


(b)

Fig. 10 Unstable mode configurations ($\beta=0.25$, $\gamma=0.0$, $\kappa=100$)

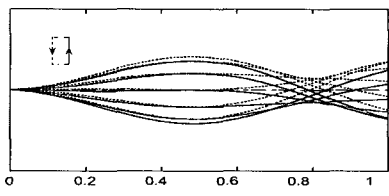


(a)

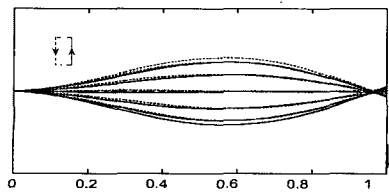


(b)

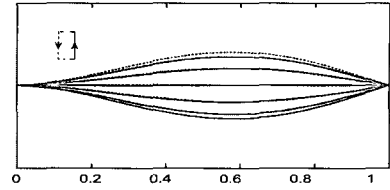
Fig. 11 Unstable mode configurations ($\beta=0.25$, $\gamma=0.001$, $\kappa=100$)



(a)



(b)



(c)

Fig. 12 Unstable mode configurations ($\beta=0.25$, $\gamma=0.0$, $\kappa=100$)

4. 결론

이 논문에서는 탄성기초 위에 말단질량을 갖고 내부 유동유체에 의한 흐름이 있는 외팔파이프에 있어서 말단 질량과 탄성기초 파라미터가 파이프의 동적 안정성에 미치는 효과를 내부감쇠를 무시한 경우와 고려한 경우에 대하여 연구하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 내부감쇠를 무시한 경우($\gamma=0.0$), 말단질량비 μ 가 증가할수록 탄성기초 파라미터 κ 값과 파이프의 질량비 β 의 크기에 관계없이 임계유속 값이 크게 감소한다.

둘째, 내부감쇠가 존재하는 경우($\gamma=0.001$), 말단 질량비 μ 가 증가할수록 탄성기초 파라미터 κ 값과 파이프의 질량비 β 의 크기에 관계없이 임계유속 값이 크게 감소하다가 어떠한 μ 의 값을 경계로 다시 증가한다.

셋째, 플러터에 관계하는 고유치 분기와 불안정 진동모드형상에 있어서 참고문헌^(15, 16)과 같이 고유치 분기의 차수와 불안정 진동모드의 차수는 반드시 일치하지만은 않는다는 사실을 확인하였다.

참고 문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 229~232.
- (2) Feodos'ev, V. P., 1951, "Vibrations and Stability of a Pipe when Liquid Flows through It", Inzhenernyi Sbornik, Vol. 10, pp. 169~170.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I.

- Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp. 457~486.
- (4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.
- (5) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(I. Theory)", Proceedings of the Royal Society(London), Series A, Vol. 293, pp. 512~527.
- (6) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society(London), Series A, Vol. 293, pp. 528~542.
- (7) Hill, J. L. and Swanson, C. P., 1970, "Effects of Lumped Masses on the Stability of Fluid Conveying Tubes", Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 494~497.
- (8) Sugiyama, Y., Kumagai, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid(The Effect of a Lumped Mass and Damping)", Journal of Japan Society Mechanical Engineering, (in Japanese), Vol. 51, pp. 1506~1512.
- (9) Becker, O., 1979, "Zum Stabilitätsverhalten des durchstromten geraden Rohres mit elastischer Ouerstuyung", maschinenbautechnik, Vol. 28, pp. 325~327.
- (10) Edelstein, W. S., and Chen, S. S., 1985, "Flow-Induced Instability of an Elastic Tube with a Variable Support", Nuclear Engineering and Design, Vol. 84, pp. 1~11.
- (11) Sugiyama, Y., Matsumoto, S. and Iwatsubo, T., 1986, "Studies on Stability of Two-Degree-of-Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Damper)", Journal of Japan Society Mechanical Engineering, (in Japanese), Vol. 52, pp. 264~269.
- (12) Sugiyama, Y., Kawagoe, H., Kishi, T. and Nishiyama, S., 1988, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid(The Combined Effect of a Spring Support and Lumped Mass Damping)", JSME International Journal, Vol. 31, pp. 20~26.
- (13) Lottati, I. and Kornecki, A., 1986, "The Effect of an Elastic Foundation and of Dissipative Force on the Stability of Fluid-Conveying Pipes", Journal of Sound and Vibration, Vol. 109, pp. 327~338.
- (14) Impollonia, N. and Elishakoff, I., 2000, "Effect of Elastic Foundation on Divergence and Flutter of an Articulated Pipe Conveying Fluid", Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 559~573.
- (15) Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1231~1241.
- (16) 류봉조, 류시웅, 이종원, 2003, "말단질량을 갖는 외팔 송수관의 고유치 분기와 플러터 모드", 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 12 호, pp. 956~964.