대한기계학회논문집 A 권, 제 28 권 제 12 호, pp. 2019~2031, 2004

강소성 변형 해석을 위한 최소 제곱 무요소법

권 기 찬† · 윤 성 기*

(2004 년 8 월 24 일 접수, 2004 년 10 월 21 일 심사완료)

The Least-Squares Meshfree Method for the Analysis of Rigid-Plastic Deformation

Kie-Chan Kwon and Sung-Kie Youn

Key Words : LSMFM(최소 제곱 무요소법), Least-Squares(최소 제곱), Meshfree Method(무요소법), Rigid-Plasticity(강소성), Metal Forming(금속 성형)

Abstract

The least-squares formulation for rigid-plasticity based on J_2-flow rule and infinitesimal theory and its meshfree implementation using moving least-squares approximation are proposed. In the least-squares formulation the squared residuals of the constitutive and equilibrium equations are minimized. Those residuals are represented in a form of first-order differential system using the velocity and stress components as independent variables. For the enforcement of the boundary and frictional contact conditions, penalty scheme is employed. Also the reshaping of nodal supports is introduced to avoid the difficulties due to the severe local deformation near the contact interface. The proposed least-squares meshfree method does not require any structure of extrinsic cells during the whole process of analysis. Through some numerical examples of metal forming processes, the validity and effectiveness of the method are investigated.

1. 서 론

무요소법은 불규칙적으로 분포된 절점들만으로 형상 함수를 구성할 수 있는 특징으로 인해 요소의 구성 및 재구성의 번거로움을 피할 수 있다. 따라서 소성 변형과 같은 대변형 문제에 있어서 무요소법을 이용한 해석은 상당한 장점을 가질 수 있다. 그러나 현재까지 대부분의 무요소법은 적분이나 비압축성 조건의 처리를 위해 요소와 비슷한 격자의 사용에 의존하고 있으며, 이는 무요소법의 효용성을 반감시키는 요인이다.

무요소법을 소성 문제에 적용하는 모든 연구는 기존의 Galerkin 수식화에 라그랑지안(Lagrangian) 무요소 근사화 방법을 적용하는 것이었다.[1~5] 라그랑지안 형상함수는 변형전 형상(configuration)에서의 형상함수를 현재 형상으로 변환하여 구해진다. 이는 마스터 요소에서의 형상함수를 변형 형상으로 변환하는 유한요소법의 경우와 거의 비슷하다고 볼 수 있다. 따라서 심한 변형은 무요소 형상함수의 영향영역(influence region)을 찌그러지게 하여 형상함수의 재구성을 필요로 하게 한다. 그러나 이런 시도는 아직 이루어지지 않고 있다.

Galerkin 수식화에 기반한 유한요소법은 가장 강건한 수치 해석 방법으로 자리매김해오고 있으나, Galerkin 무요소법의 경우 무요소법의 효용성을 저해하는 몇 가지 문제점을 가지고 있다. Galerkin 수식화에서 수치해의 정확성은 적분의 정확성에 크게 영향을 받으므로 신중하게 구성된 적분 격자를 필요로 한다. 보통은 요소와 같은 격자에 높은 차수의 Gauss 구적공식을 사용한다. 이런 문제를 피하기 위해 많은 연구들이 진행되어 왔다.[6~10] 또 다른 어려움은 대변형 문제에 있어서 비압축성 조건을 처리하는데 있다. 유한요소법에서는 비압축성 조건 때문에 야기되는 체적 잠김(volumetric locking)을 해결하기 위해 선택 감차 적분이나 혼합 수식화(mixed formulation)를 이용한다. 이런 방

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : kkc@skylab.kaist.ac.kr
* 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : skyoun@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3034

법들은 요소 개념에 기초하고 있어서, 무요소법에 적용하려면 이를 위한 격자를 필요로 한다.[11~13]

반면, 최소 제곱 수식화(least-squares formulation)는 적분 오차에 강건하고,[14~17] 일차 수식화의 경우 비압축성 조건하에서도 체적 잠김이 발생하지 않고 동일한 수렴 특성을 보인다.[18~20] 이런 특성들은 무요소법의 효용성을 향상시키는데 크게 기여할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 강소성(rigid-plasticity) 변형 해석을 위한 최소 제곱 무요소법(least-squares meshfree method, LSMFM)을 제안한다. 이를 위해 J_2-유동법칙과 미소 변형 이론에 기초하여 강소성 변형에 대한 최소 제곱 수식화를 제안한다. 또한 제안된 최소 제곱 무요소법에서 경계 조건 및 마찰 접촉 조건을 처리하기 위한 벌칙법(penalty method)을 제시하고, 접촉부 근처에서의 국부적인 변형이 심해지면 무요소 형상함수의 영향영역을 재구성하는 개념을 도입한다. 금속 성형 공정 해석 예제들을 통해 제안된 방법의 효용성을 제시한다.

2. 이동 최소 제곱 근사화

본 장에서는 무요소 형상함수를 도출하는 방법중 가장 널리 사용되는 이동 제곱 근사화 방법 대해 간단히 기술한다.[21,22]

선형 독립 기저 함수들을 $\{p_i\}_{i=1}^{n}$, 절점을 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{N}$, 각 절점에서의 가중함수를 $\{w_I\}_{I=1}^{N}$라 하면, I-번째 절점의 형상함수 ψ_I는 다음과 같이 주어진다.

$$\psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

여기서

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) = [p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), \ldots, p_n(\boldsymbol{x})] \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) = w_I(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x}_I) \tag{2c}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_1(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & p_n(\boldsymbol{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\boldsymbol{x}_N) & \cdots & p_n(\boldsymbol{x}_N) \end{bmatrix} \tag{2d}$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} w_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_N(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2e}$$

본 연구에서는 선형 기저 함수 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} = [1, x, y]$와 다음과 같은 가중 함수를 사용하였다.

$$w_I(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi}(1 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\|^2 / h_I^2)^4 \\ \qquad\qquad \text{if} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\| < h_I \\ 0 \qquad\quad \text{if} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\| \geq h_I \end{cases} \tag{3}$$

여기서 h_I는 영향반경(influence radius)으로, 본 연구에서는 절점간의 거리의 1.5 배를 사용하였다.

3. 강소성 최소 제곱 수식화

최소 제곱 수식화는 유체나 전자기 문제 등과 같이 비자기수반(non-self-adjoint) 문제의 유한요소 해석에 주로 사용되어 왔다.[23] Galerkin 수식화와는 달리 최소 제곱 수식화는 적분 항등식을 사용하지 않으므로 적분에 약간의 오차가 있어도 수치해에 큰 영향을 미치지 않는다.[14~17] 또한 일차 최소 제곱 수식화는 비압축성 조건에서 체적 잠김 현상이 발생하지 않는 장점이 있는데, 이는 일차 수식화를 일종의 혼합 수식화로 볼 수 있기 때문이다.[18~20] 이런 특성들은 무요소법에서 격자의 이용을 배제하는데 기여할 수 있다. 본 장에서는 강소성 변형에 대한 일차 최소 제곱 수식화를 제안하고, 여기에 이동 최소 제곱 근사화를 적용한 최소 제곱 무요소법을 제시한다.

3.1 일차 최소 제곱 수식화

J_2-유동법칙과 미소 변형 이론에 기초한 강소성 변형의 지배 방정식들은 해석영역 Ω에 대해 다음과 같다.[24]

(i) 평형 방정식: $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{4a}$$

(ii) 구성 방정식: $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\sigma'_{ij} \tag{4b}$$

(iii) 항복 조건: $$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) \tag{4c}$$

(iv) 적합성 조건: $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4d}$$

여기서 σ_{ij}와 σ'_{ij}은 각각 응력 텐서와 편차 응력 텐서의 성분들이며, $\dot{\varepsilon}_{ij}$와 v_i는 변형률 속도 텐서와 속도장의 성분들을 나타낸다. 그리고 흐름 응력(flow stress) $\bar{\sigma}$는 상당 변형률(equivalent strain) $\bar{\varepsilon}$의 함수이며, 상당 변형률 속도 $\dot{\bar{\varepsilon}}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \tag{5}$$

앞으로의 수식 전개의 편이를 위해 다음과 같이 기호들을 정의하자.

$$\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^{\mathrm{T}} \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^{\mathrm{T}} \tag{6b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad \dot{\varepsilon}_{33} \quad \dot{\varepsilon}_{12} \quad \dot{\varepsilon}_{23} \quad \dot{\varepsilon}_{13}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_{e1}\boldsymbol{v} \tag{6c}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma'_{11} \quad \sigma'_{22} \quad \sigma'_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma} \tag{6d}$$

$$\boldsymbol{B}_{e1} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0.5\partial/\partial y & 0.5\partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0.5\partial/\partial z & 0.5\partial/\partial y \\ 0.5\partial/\partial z & 0 & 0.5\partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{6e}$$

$$\boldsymbol{B}_{e2} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{6f}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6g}$$

$$\boldsymbol{B}_s = \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \tag{6h}$$

속도와 응력 성분들을 독립 변수로 가정하고, 위 기호들을 사용하면 식 (4)는 다음과 같은 일차 미분 연립 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\boldsymbol{B}_{e1}\boldsymbol{v} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{7b}$$

식 (7a)는 구성방정식에 적합성 조건을 대입한 것이고, 식 (7b)는 평형 방정식을 표현한 것이다. 따라서 잔여오차(residual)들은 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{R}_v \equiv \boldsymbol{B}_{e1}\boldsymbol{v} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma} \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{R}_\sigma \equiv \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{\sigma} \tag{8b}$$

최소 제곱 수식화를 위해 다음과 같은 잔여오차의 제곱의 적분을 생각한다.

$$I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma}) \equiv \int\left(\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_v + \boldsymbol{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_\sigma\right)\mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

최소 제곱 수식화에서는 2 차 범함수(quadratic functional) $I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma})$ 를 최소화하는 함수 $\boldsymbol{v}$ 와 $\boldsymbol{\sigma}$ 를 찾는다. 따라서 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$\int\left(\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R}_v + \boldsymbol{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R}_\sigma\right)\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{10}$$

여기에 선형화를 위해 Newton 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\int\left(\delta\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{R}_v + \delta\boldsymbol{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{R}_\sigma\right)\mathrm{d}\Omega \\ = \int\left(-\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R}_v - \boldsymbol{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R}_\sigma\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{11}$$

위 식에서 고차항 $\Delta(\delta\boldsymbol{R}_v)$ 은 무시하였다.

이제 식 (11)에 있는 잔여오차들의 일차 변분을 생각하자. 식 (8a)로부터 $\boldsymbol{R}_v$ 의 일차 변분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\boldsymbol{R}_v = \boldsymbol{B}_{e1}\delta\boldsymbol{v} - \frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{\sigma} \tag{12}$$

위 식에서 $\delta\dot{\bar{\varepsilon}}$ 를 독립 변수들로 표현하기 위해, 다음과 같이 식 (5)를 제곱한 형태를 생각하자.

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{33}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{12}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{23}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{13}^2) \tag{13}$$

식 (13)의 양변에 변분을 취하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\varepsilon}}\delta\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{3}(&\dot{\varepsilon}_{11}\delta\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}\delta\dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}\delta\dot{\varepsilon}_{33} \\ &+ 2\dot{\varepsilon}_{12}\delta\dot{\varepsilon}_{12} + 2\dot{\varepsilon}_{23}\delta\dot{\varepsilon}_{23} + +2\dot{\varepsilon}_{13}\delta\dot{\varepsilon}_{13})\end{aligned} \tag{14}$$

따라서 식 (6c)와 (6f)를 이용하면 $\delta\dot{\bar{\varepsilon}}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{e2}\delta\boldsymbol{v} \tag{15}$$

식 (15)를 식 (12)에 대입하면 $\delta\boldsymbol{R}_v$ 를 독립 변수들의 일차 변분, 즉 $\delta\boldsymbol{v}$ 와 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ 만으로 표현할 수 있다

$$\delta\boldsymbol{R}_v = \boldsymbol{B}_{e1}\delta\boldsymbol{v} - \frac{1}{\bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}}}\boldsymbol{\sigma}'\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{e2}\delta\boldsymbol{v} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{\sigma} \tag{16}$$

식 (8b)로부터 $\boldsymbol{R}_\sigma$ 의 일차 변분은 다음과 같다.

$$\delta\boldsymbol{R}_\sigma = \boldsymbol{B}_s\delta\boldsymbol{\sigma} \tag{17}$$

이제 식 (11)의 각 적분항들을 살펴보자. 식 (11)의 좌변 첫번째 항은 식 (16)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{R}_v^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{R}_v = &\left(\boldsymbol{B}_{e1}\delta\boldsymbol{v} - \frac{1}{\bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}}}\boldsymbol{\sigma}'\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{e2}\delta\boldsymbol{v} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{\sigma}\right)^{\mathrm{T}} \\ &\left(\boldsymbol{B}_{e1}\Delta\boldsymbol{v} - \frac{1}{\bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}}}\boldsymbol{\sigma}'\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{e2}\Delta\boldsymbol{v} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{P}\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

위 식을 전개하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\delta \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{R}_{\nu} \\
&= \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} \Delta \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2} \Delta \boldsymbol{\nu} \\
&- \frac{1}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} \Delta \boldsymbol{\nu} + \frac{\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}'}{(\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}})^2} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2} \Delta \boldsymbol{\nu} \\
&- \frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{2\overline{\sigma}^2} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\
&- \frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} \Delta \boldsymbol{\nu} + \frac{3}{2\overline{\sigma}^2} \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2} \Delta \boldsymbol{\nu} \\
&+ \frac{9}{4} \left(\frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \right)^2 \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \Delta \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned} \tag{19a}
$$

식 (11)의 좌변 두번째 적분항은 식 (17)에 의해 다음과 같이 전개된다.

$$
\delta \boldsymbol{R}_{\sigma}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{R}_{\sigma} = \left(\boldsymbol{B}_s \delta \boldsymbol{\sigma} \right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{B}_s \Delta \boldsymbol{\sigma} \right) = \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_s \Delta \boldsymbol{\sigma} \tag{19b}
$$

또한 식 (11)의 우변의 적분항들은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{R}_{\nu} &= \delta \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu} \\
&= \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu}}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu}
\end{aligned} \tag{20a}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{\sigma}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{R}_{\sigma} = \delta \boldsymbol{R}_{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\sigma} = \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\sigma} \tag{20b}
$$

식 (19)와 (20)을 식 (11)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{bmatrix} \int \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\nu\nu} \Delta \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}\Omega + \int \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\nu\sigma} \Delta \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega \\ \int \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\sigma\nu} \Delta \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}\Omega + \int \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{\sigma\sigma} \Delta \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \delta \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_{\nu} \, \mathrm{d}\Omega \\ \int \delta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix} \tag{21}
$$

위 식에 사용된 기호들은 아래처럼 정의된다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{\nu\nu} &= \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} - \frac{1}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2} \\
&\quad - \frac{1}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}'}{(\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}})^2} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2}
\end{aligned} \tag{22a}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{\nu\sigma} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} + \frac{3}{2\overline{\sigma}^2} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \tag{22b}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{\sigma\nu} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e1} + \frac{3}{2\overline{\sigma}^2} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{e2} \tag{22c}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{\sigma\sigma} = \frac{9}{4} \left(\frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \right)^2 \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_s \tag{22d}
$$

$$
\boldsymbol{F}_{\nu} = -\boldsymbol{B}_{e1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu} + \frac{\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu}}{\overline{\sigma}\dot{\overline{\varepsilon}}} \boldsymbol{B}_{e2}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{23a}
$$

$$
\boldsymbol{F}_{\sigma} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\sigma}} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\nu} - \boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{\sigma} \tag{23b}
$$

이제 무요소법 구현을 위해 미지 변수 $\boldsymbol{\nu}$와 $\boldsymbol{\sigma}$에 이동 최소 제곱 근사화를 적용한다. 본 연구에서는 속도와 응력 모두에 대해 같은 이동 최소 제곱 형상함수를 사용한다.

$$
\boldsymbol{\nu} = \psi^I \hat{\boldsymbol{\nu}}^I \tag{24a}
$$

$$
\boldsymbol{\sigma} = \psi^I \hat{\boldsymbol{\sigma}}^I \tag{24b}
$$

여기서 ψ^I는 I-번째 절점에 대한 무요소 형상함수이고, $\hat{\boldsymbol{\nu}}^I$와 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I$는 각각 속도와 응력에 대한 절점의 근사화 계수들로 이루어진 벡터이다.

식 (24)를 식 (21)에 적용하면, 다음과 같이 최소 제곱 수식화에 대한 선형 연립 대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{25}
$$

위 식에서 $\boldsymbol{K}$와 $\boldsymbol{F}$는 각각 시스템 행렬과 벡터이며, $\boldsymbol{U}$는 미지 변수에 대한 절점의 근사화 계수 벡터이다. 이들은 아래와 같이 성분 행렬 또는 벡터들로 이루어진다.

$$
\boldsymbol{K} = \left[\boldsymbol{K}_{IJ} \right] \tag{26a}
$$

$$
\boldsymbol{F} = \left\{ \boldsymbol{F}_I \right\} \tag{26b}
$$

$$
\boldsymbol{U} = \left\{ \boldsymbol{U}_I \right\} \tag{26c}
$$

여기서 $\boldsymbol{K}_{IJ}$는 시스템 행렬의 I-번째와 J-번째 절점들에 대한 성분 행렬이며, $\boldsymbol{F}_I$는 시스템 벡터의 I-번째 절점에 대한 성분 벡터이다. $\boldsymbol{U}_I$는 미지 벡터의 성분 벡터이다. 이들 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{IJ} &= \int \psi^I \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\nu\nu} & \boldsymbol{K}_{\nu\sigma} \\ \boldsymbol{K}_{\sigma\nu} & \boldsymbol{K}_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \psi^J \, \mathrm{d}\Omega \\
&= \begin{bmatrix} \int \psi^I \boldsymbol{K}_{\nu\nu} \psi^J \, \mathrm{d}\Omega & \int \psi^I \boldsymbol{K}_{\nu\sigma} \psi^J \, \mathrm{d}\Omega \\ \int \psi^I \boldsymbol{K}_{\sigma\nu} \psi^J \, \mathrm{d}\Omega & \int \psi^I \boldsymbol{K}_{\sigma\sigma} \psi^J \, \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{27a}
$$

$$
\boldsymbol{F}_I = \int \psi^I \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\nu} \\ \boldsymbol{F}_{\sigma} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\Omega = \begin{Bmatrix} \int \psi^I \boldsymbol{F}_{\nu} \mathrm{d}\Omega \\ \int \psi^I \boldsymbol{F}_{\sigma} \mathrm{d}\Omega \end{Bmatrix} \tag{27b}
$$

$$
\boldsymbol{U}_I = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\nu}}^I \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^I \end{Bmatrix} \tag{27c}
$$

식 (27a)의 각 피적분항은 식 (24)를 식 (22)에 대입하여 구해진다. 예를 들면, 첫번째 피적분항은 다음과 같다.

$$\psi^I K_{\sigma\sigma}\psi^J = \frac{9}{4}\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\right)^2 \psi^I P^{\mathrm{T}} P \psi^J + (B_s(\psi^I))^{\mathrm{T}} B_s(\psi^J)$$
$$= \frac{9}{4}\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}}\right)^2 \psi^I \psi^J P^{\mathrm{T}} P + (B_s(\psi^I))^{\mathrm{T}} B_s(\psi^J) \quad (28)$$

마찬가지로 식 (27b)의 피적분항은 식 (24)를 식 (23)에 대입해 구한다. 예를 들면, 첫번째 성분은 다음과 같이 된다.

$$\psi^I F_\sigma = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}} \psi^I P^{\mathrm{T}} R_v - (B_s(\psi^I))^{\mathrm{T}} R_\sigma \quad (29)$$

각 적분점에서 영향영역이 이 적분점을 포함하는 절점들에 대해 식 (27a)와 (27b)의 성분 행렬과 벡터를 계산하고 전체 시스템 행렬과 벡터에 더해줌으로써 식 (25)의 선형 대수 연립 방정식을 얻을 수 있다. 식 (25)는 각 Newton 하중단계(loading step) 내의 한 축차 과정에서의 선형화된 시스템 방정식이다.

이제 n-번째 하중단계에서의 $(i+1)$-번째 축차 과정을 생각하자. 식 (25)의 행렬 방정식을 풀면, 속도와 응력의 증분이 구해진다. 따라서 현재의 속도와 응력은 이들 증분들을 더함으로써 계산될 수 있다.

$$v_{(n,i+1)} = v_{(n,i)} + \Delta v_{(n,i+1)} \quad (30a)$$

$$\sigma_{(n,i+1)} = \sigma_{(n,i)} + \Delta\sigma_{(n,i+1)} \quad (30b)$$

그러나 이들 증분량, 즉 $\Delta v_{(n,i+1)}$ 와 $\Delta\sigma_{(n,i+1)}$ 가 너무 크면, 위 식과 같이 이들 증분을 그대로 더하는 것은 잔여오차의 제곱 $I(v,\sigma)$을 오히려 증가시킬 수 있다.

이런 이유로, 본 논문에서는 아래와 같이 선형 탐색(line search) 방법을 통해 현재 상태의 해를 계산하였다.

$$v_{(n,i+1)} = v_{(n,i)} + \alpha\,\Delta v_{(n,i+1)} \quad (31a)$$

$$\sigma_{(n,i+1)} = \sigma_{(n,i)} + \alpha\Delta\sigma_{(n,i+1)} \quad (31b)$$

여기서 스칼라 양인 α는 주어진 증분 방향에서 $I(v,\sigma)$가 최소가 되도록 결정된다. 본 논문에서 사용한 방법은 다음과 같다. 먼저 $0<\alpha\le 2$ 범위에서 α를 0.1 씩 증가시키면서 각 α에 대해 $I(v,\sigma)$를 계산하여 가장 작은 값을 주는 α를 찾는다. 이 값과 양 옆의 값들을 이용해 이차 곡선 맞추기(parabolic fit)를 하여 $I(v,\sigma)$가 최소가 되도록 하는 α를 계산한다. 이렇게 계산된 α를 이용해 식 (31)로부터 다음 축차에 사용될 현재 해를 구하게 된다. 각 하중단계에서 축차는 $I(v,\sigma)$ 와 각 잔여오차 성분들이 주어진 작은 값 이하로 수렴할 때까지 수행된다.

각 축차에서 현재의 변형 형상은 다음과 같이 구한다.

$$x = x_n + v_{(n,i+1)}\Delta t \quad (32)$$

여기서 Δt는 주어진 시간 증분 양이다. 변형률 성분들도 변형률 속도 해로부터 같은 방법으로 계산한다.

3.2 강체 변형 영역의 수식화

구성방정식 식 (4b)는 상당 변형률이 너무 작은 영역에는 적용할 수 없다. 이렇게 변형 영역에 비해 상당 변형률이 매우 작은 강체 변형 영역에서는 앞 절에서 유도한 수식화를 사용하면 수치적 문제가 발생한다. 한 예로, 식 (16)의 우변을 보면 두번째 항을 계산할 수 없게 된다.

이런 수치적 어려움을 해결하기 위해 다음과 같은 선형 구성방정식을 사용하는 것이 일반적이다.[24]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}}\sigma'_{ij} \quad \text{for } \dot{\bar{\varepsilon}} \le \dot{\bar{\varepsilon}}_0 \quad (33)$$

여기서 $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$는 주어진 작은 값으로 상당 변형률이 이보다 작으면 강체 변형 영역으로 간주한다.

이때 최소 제곱 수식화를 위해 구성방정식의 잔여오차를 생각하면 다음과 같다.

$$R_v \equiv B_{el} v - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}} P\sigma \quad (34)$$

그리고 일차 변분은 다음과 같이 된다.

$$\delta R_v = B_{el}\delta v - \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}} P\delta\sigma \quad (35)$$

이것을 고려하여 앞 절의 과정을 반복하면, 식 (21)과 같은 형태의 방정식을 얻을 수 있으며, 이때 각 피적분항들은 아래와 같이 구해진다.

$$K_{vv} = B_{el}^{\mathrm{T}} B_{el} \quad (36a)$$

$$K_{v\sigma} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}} B_{el}^{\mathrm{T}} P \quad (36b)$$

$$K_{\sigma v} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}} P^{\mathrm{T}} B_{el} \quad (36c)$$

$$K_{\sigma\sigma} = \frac{9}{4}\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}}\right)^2 P^{\mathrm{T}} P + B_s^{\mathrm{T}} B_s \quad (36d)$$

$$F_v = -B_{el}^{\mathrm{T}} R_v \quad (37a)$$

$$F_\sigma = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}{\bar{\sigma}} P^{\mathrm{T}} R_v - B_s^{\mathrm{T}} R_\sigma \tag{37b}$$

4. 경계 및 마찰 접촉 조건의 처리

본 장에서는 강소성 최소 제곱 무요소법에서의 경계 조건의 처리 방법을 제시한다. 금속 성형 문제에 있어서 해석 영역의 경계는 속도 또는 응력이 주어진 부분과 공구(tool)나 다이(die)와 접촉하여 마찰이 발생하는 부분으로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 이들 조건의 처리를 위해 벌칙법을 사용하였다. 각 절에서는 2 차원 문제로 가정하고 본 연구에서 사용한 처리 방법들을 기술한다.

4.1 속도 및 응력 경계 조건

2 차원 문제의 경우 속도 경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$v_n = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \bar{v}_n \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{38a}$$

$$v_t = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \bar{v}_t \quad \text{on } \Gamma_2 \tag{38b}$$

여기서 $\bar{v}_n$ 은 경계 Γ_1 에서 수직 방향으로 주어진 속도이고, $\bar{v}_t$ 는 경계 Γ_2 에서 접선 방향으로 주어진 속도이다. $\boldsymbol{n} = [n_1 \quad n_2]^{\mathrm{T}}$ 은 경계에서의 법선벡터이며, $\boldsymbol{t} = [t_1 \quad t_2]^{\mathrm{T}}$ 는 접선벡터이다. 그리고 응력 경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$t_n = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \bar{t}_n \quad \text{on } \Gamma_3 \tag{39a}$$

$$t_t = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \bar{t}_t \quad \text{on } \Gamma_4 \tag{39b}$$

위 식에서 $\bar{t}_n$ 과 $\bar{t}_t$ 는 각각 경계 Γ_3 와 Γ_4 에서 주어진 수직 방향과 접선 방향의 응력들이다. 그리고 벡터 $\boldsymbol{p}$ 와 $\boldsymbol{q}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{p} = [n_1^2 \quad n_2^2 \quad 2n_1n_2]^{\mathrm{T}} \tag{40a}$$

$$\boldsymbol{q} = [t_1n_1 \quad t_2n_2 \quad t_1n_2 + t_2n_1]^{\mathrm{T}} \tag{40b}$$

위 경계 조건들을 벌칙법으로 구속하기 위해, 다음과 같은 범함수가 식 (9)의 우변에 추가된다.

$$I_B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{\alpha_v}{2}\int_{\Gamma_1}(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_n)^2 \mathrm{d}\Gamma + \frac{\alpha_v}{2}\int_{\Gamma_2}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_t)^2 \mathrm{d}\Gamma + \frac{\alpha_t}{2}\int_{\Gamma_3}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_n)^2 \mathrm{d}\Gamma + \frac{\alpha_t}{2}\int_{\Gamma_4}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_t)^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{41}$$

여기서 α_v 와 α_t 는 벌칙 상수들이다. 이 식을 이산화(discretization)하기 위해 경계의 각 절점에서 선점법(collocation)이 사용된다.

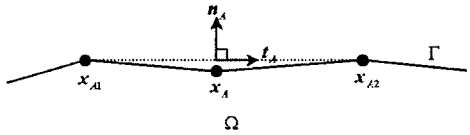

Fig. 1 Discretization of surface geometry

$$I_B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma}) \approx \frac{\alpha_v}{2}\sum_{A\in\Gamma_1}(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_n)_A^2 + \frac{\alpha_v}{2}\sum_{A\in\Gamma_2}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_t)_A^2 + \frac{\alpha_t}{2}\sum_{A\in\Gamma_3}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_n)_A^2 + \frac{\alpha_t}{2}\sum_{A\in\Gamma_4}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_t)_A^2 \tag{42}$$

여기서 A 는 경계에 있는 절점을 나타내며, 해당되는 경계에 있는 모든 절점들이 고려된다. 현재 변형 형상에서 A-번째 절점에서의 접선벡터는 이웃한 절점들을 잇는 선분의 방향으로 근사화하여 사용한다(Fig. 1).

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{x}_{A2} - \boldsymbol{x}_{A1})/\|\boldsymbol{x}_{A2} - \boldsymbol{x}_{A1}\| \tag{43}$$

이때 법선벡터는 다음과 같이 근사화한다.

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{t} \tag{44}$$

식 (41)의 $I_B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma})$ 에 정류조건(stationary condition)을 적용하면 다음과 같다.

$$\alpha_v \sum_{A\in\Gamma_1}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_n)\right)_A + \alpha_v \sum_{A\in\Gamma_2}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_t)\right)_A + \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_3}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_n)\right)_A + \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_4}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_t)\right)_A = 0 \tag{45}$$

이 식을 Newton 방법을 이용해 선형화하면 다음과 같이 된다.

$$\alpha_v \sum_{A\in\Gamma_1}(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{v})_A + \alpha_v \sum_{A\in\Gamma_2}(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{v})_A + \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_3}(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma})_A + \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_4}(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma})_A = -\alpha_v \sum_{A\in\Gamma_1}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_n)\right)_A - \alpha_v \sum_{A\in\Gamma_2}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \bar{v}_t)\right)_A - \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_3}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_n)\right)_A - \alpha_t \sum_{A\in\Gamma_4}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \bar{t}_t)\right)_A \tag{46}$$

경계의 절점 $\boldsymbol{x}_A$ 에서의 속도와 응력의 무요소 근사화는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{v}_A = \psi^I(\boldsymbol{x}_A)\hat{\boldsymbol{v}}^I = \psi_A^I\hat{\boldsymbol{v}}^I \tag{47a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \psi^I(\boldsymbol{x}_A)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \psi_A^I\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I \tag{47b}$$

식 (47)을 식 (46)에 대입하고 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(\delta\hat{\boldsymbol{v}}^I)^{\mathrm{T}}\left[\sum_{A\in\Gamma_1}\alpha_v(\psi^I\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\psi^J)_A+\sum_{A\in\Gamma_2}\alpha_v(\psi^I\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\psi^J)_A\right]\Delta\hat{\boldsymbol{v}}^J\\
&+(\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I)^{\mathrm{T}}\left[\sum_{A\in\Gamma_3}\alpha_t(\psi^I\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\psi^J)_A+\sum_{A\in\Gamma_4}\alpha_t(\psi^I\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\psi^J)\right]\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^J\\
&=-(\delta\hat{\boldsymbol{v}}^I)^{\mathrm{T}}\left[\sum_{A\in\Gamma_1}\alpha_v\left(\psi^I\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\bar{v}_n)\right)_I\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{A\in\Gamma_2}\alpha_v\left(\psi^I\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\bar{v}_t)\right)_I\right]\\
&\quad-(\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I)^{\mathrm{T}}\left[\sum_{A\in\Gamma_3}\alpha_t\left(\psi^I\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}-\bar{t}_n)\right)_I\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{A\in\Gamma_4}\alpha_t\left(\psi^I\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}-\bar{t}_t)\right)_I\right]
\end{aligned}
\tag{48}
$$

속도와 응력 경계 조건을 적용하기 위해서는 이 식의 좌변을 식 (27a)에 추가하고, 우변은 식 (27b)에 추가하게 된다.

4.2 마찰 접촉 경계 조건

접촉이 발생하는 경계 Γ_c 에서는 수직 방향으로는 속도 경계 조건이 주어지고, 접선 방향으로는 마찰 응력 조건이 주어진다. 수직 방향의 조건은 다음과 같다.

$$
v_n=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_D \tag{49}
$$

여기서 $\boldsymbol{V}_D$ 는 접촉면에서의 다이의 속도이고, $\boldsymbol{n}$ 은 재료에서 다이로 향하는 법선벡터이다. 본 논문에서 다이는 강체로 가정한다. 따라서 $\boldsymbol{t}$ 와 $\boldsymbol{n}$ 은 접촉면에서의 다이의 형상으로부터 주어진다고 생각한다. 이때 식 (49)의 우변은 이미 알고 있는 값이 되므로, 이 조건은 식 (38a)와 동일해 진다. 그러므로 이 조건은 앞 절에서 기술한 방법으로 구속될 수 있다.

접선 방향으로는 아래와 같은 마찰력 모델을 가정한다.[24]

$$
f_s=-mk\frac{u_s}{|u_s|}\cong-mk\left[\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{u_s}{u_0}\right)\right] \tag{50}
$$

위 식에서 f_s 는 마찰 응력, m 은 마찰 상수, $k=\bar{\sigma}_0/\sqrt{3}$ 는 전단 항복 응력이다. 그리고 u_s 는 재료와 다이의 접선 방향 상대 속도이며, u_0 는 u_s 에 비해 아주 작은 값을 갖는 상수로 주어진 값이다. 위 식에서 음의 부호는 마찰력의 방향과 상대 속도 u_s 가 서로 반대인 것을 표현하고 있다.

마찰 응력 조건은 $t_t=f_s$ 이며, 이는 다음과 같이 나타내진다.

$$
\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}=-mk\left[\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{u_s}{u_0}\right)\right] \tag{51}
$$

여기서 상대 미끄럼 속도 u_s 는 아래와 같다.

$$
u_s=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_D) \tag{52}
$$

식 (51)의 잔여오차를 다음과 같이 정의한다.

$$
R_C\equiv\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+mk\left[\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{u_s}{u_0}\right)\right] \tag{53}
$$

이것을 벌칙법으로 구속하기 위해 다음과 같은 범함수를 식 (9)의 우변에 합한다.

$$
I_C(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma})\equiv\frac{\alpha_t}{2}\int_{\Gamma_c}R_C^2\,\mathrm{d}\Gamma\approx\frac{\alpha_t}{2}\sum_{A\in\Gamma_c}(R_C)_A^2 \tag{54}
$$

앞 절에서와 마찬가지로 접촉면에 있는 절점들에 대해 선점법을 사용해 이산화하였다.

식 (54)에 정류조건와 Newton 법을 적용하면 아래처럼 된다.

$$
\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}(\delta R_C\Delta R_C)_A=-\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}(\delta R_C R_C)_A \tag{55}
$$

위 식에서 R_C 의 일차 변분은 아래와 같이 구해진다.

$$
\delta R_C=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\sigma}+mk\frac{2}{\pi}\frac{u_0}{u_0^2+u_s^2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{v} \tag{56}
$$

여기서 $\delta u_s=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{v}$ 가 이용되었다. 식 (56)을 식 (55)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
&\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}C^2\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{v}\right)_A+\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_A\\
&\quad+\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{v}\right)_A+\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_A\\
&=-\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}CR_C\boldsymbol{t}\right)_A-\alpha_t\sum_{A\in\Gamma_c}\left(\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}R_C\boldsymbol{q}\right)_A
\end{aligned}
\tag{57}
$$

상수 C 는 다음과 같이 정의된다.

$$
\dot{C}\equiv mk\frac{2}{\pi}\frac{u_0}{u_0^2+u_s^2} \tag{58}
$$

여기에 무요소 근사화, 식 (47)을 적용하면 다음과 같이 시스템 행렬과 벡터에 추가되는 양들을 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(\delta\hat{\boldsymbol{v}}^I)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{A\in\Gamma_c}\alpha_t\left(\psi^I C^2\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\psi^J\right)_A\right)\Delta\hat{\boldsymbol{v}}^J\\
&+(\delta\hat{\boldsymbol{v}}^I)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{A\in\Gamma_c}\alpha_t\left(\psi^I C\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\psi^J\right)_A\right)\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^J
\end{aligned}
$$

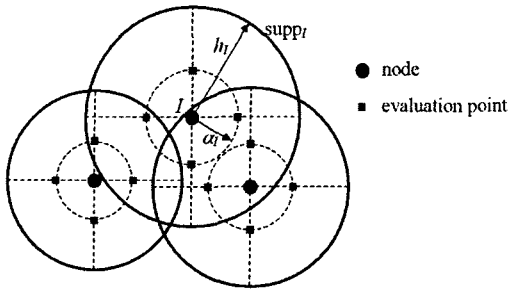

Fig. 2 Generation of integration points using influence domain

$$
\begin{aligned}
&+(\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{A\in\Gamma_C}\alpha_t\left(\boldsymbol{\psi}^I\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^J\right)_A\right)\Delta\hat{\boldsymbol{v}}^J\\
&+(\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I)^{\mathrm{T}}\left(\sum_{A\in\Gamma_C}\alpha_t\left(\boldsymbol{\psi}^I\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^J\right)_A\right)\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^J\\
&=-(\delta\hat{\boldsymbol{v}}^I)^{\mathrm{T}}\sum_{A\in\Gamma_C}\alpha_t\left(\boldsymbol{\psi}^I\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_C\boldsymbol{t}\right)_A\\
&\quad-(\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I)^{\mathrm{T}}\sum_{A\in\Gamma_C}\alpha_t\left(\boldsymbol{\psi}^I\boldsymbol{R}_C\boldsymbol{q}\right)_A
\end{aligned}
\tag{59}
$$

마찰 접촉 조건을 적용하기 위해서는 이 식의 좌변을 식 (27a)에 추가하고, 우변은 식 (27b)에 추가한다.

5. 수치 예제

제안한 강소성 변형에 대한 최소 제곱 무요소법과 경계 조건 처리 방법들의 효용성 및 특성을 수치 예제들을 통해 알아보고자 한다.

무요소법이 장점을 갖기 위해서는 적분 과정에서 요소와 같은 격자의 사용을 피하여야 한다. 본 논문에서는, Fig. 2 와 같이 절점의 영향영역내에서 적분점을 분포 시키는 방법을 사용한다. 각 영향영역에 4 개의 적분점을 생성시키며, 생성하는 적분점들과 해당 절점과의 거리 α_I 는 아래와 같이 정해준다.

$$\alpha_I = r\times\frac{h_I}{\alpha} \tag{60}$$

여기서 r 은 정해진 비이며, h_I 는 영향반경, α 는 영향반경과 절점간의 거리 비이다. 본 논문의 모든 예제에서 $r=0.25$ 를 사용하였으며, 2 장에서 언급했듯이 $\alpha=1.5$ 이다. 모든 절점 근처에 대해 이런 방법으로 적분점을 분포시킨 후 각 적분점에 $\pi h_I^2/4$ 의 가중값를 임시로 할당한다. 여기서 해석영역 외부에 있는 적분점은 제거한다. 해석영역 내부 모든 적분점의 임시 가중값을 합한 후, 이 값을 전체 해석영역의 면적으로 나눈다. 이 비로

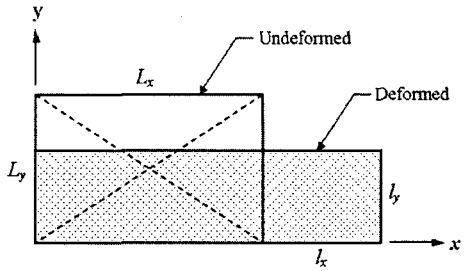

Fig. 3 Finte extension example

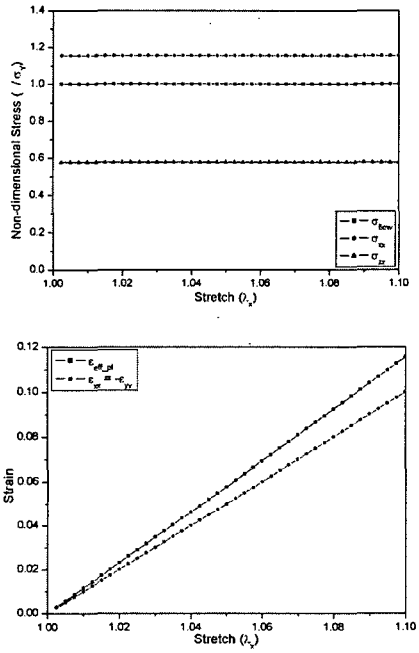

Fig. 4 The stress and strain curves of LSMFM

임시 가중값을 나누어 적분점의 실제 가중값으로 사용한다. 이 방법은 적분의 정확성에 둔감한 최소 제곱 무요소법에서는 잘 작동할 수 있지만, Galerkin 방법에서는 그렇지 못하다.

5.1 단순 인장 문제

검증 예제로 Fig. 3 과 같은 단순 인장 문제를 평면 변형률 변형 가정하에서 해석하였다. 여기서 치수는 $L_x=0.04\,\mathrm{m}$, $L_y=0.01\,\mathrm{m}$ 이며, 완전 소성 (perfectly plastic) 재료로 가정하고 $\bar{\sigma}=500\,\mathrm{MPa}$ 을 사용하였다. 이 문제는 미소 변형 이론에 근거한 해석해가 존재하므로,[25] 이와 비교하기 위해 해석에서 형상 함수의 공간 미분은 초기 형상에 대한 미분을 그대로 사용하였다.

Fig. 4 는 연신율 λ_x 에 따른 응력과 변형률을 보여준다. 여기서 σ_{flow} 는 흐름 응력을 나타내며, ε_{eff_pl} 는 상당 소성 변형률을 의미한다. 그림에

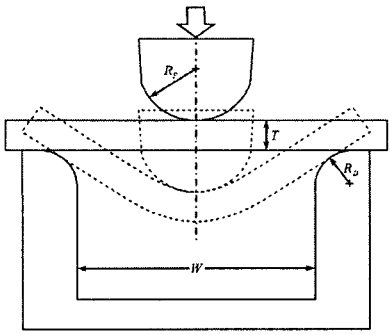

Fig. 5 Schematic diagram of plate bending process

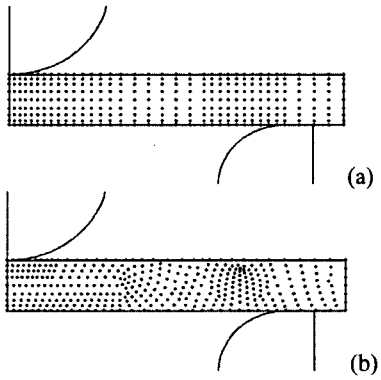

Fig. 6 Initial distribution of nodes: (a) regular distribution; (b) irregular distribution

서 보여주는 해석 결과는 정해와 일치한다. 이는 이 문제의 변위가 선형 함수이고, 사용한 무요소 근사화가 선형 재생 조건을 만족시키기 때문이다.

5.2 평판 굽힘 문제

Fig. 5 와 같은 평판 굽힘 공정을 평면 편형율 변형을 가정하고 해석하였다. 평판의 두께 $T=1$ 을 단위 길이로 할 때, 상대적인 치수들은 다이의 개구 폭 $W=7.5$, 펀치(punch) 반경 $R_P=1.8$, 다이의 모서리 반경 $R_D=1.2$ 이다. 펀치와 다이는 강체로 가정하며, 이들과 재료의 접촉면에서의 마찰은 없다고 가정하였다. 가공 재료는 알루미늄 합금으로 흐름 응력과 상당 소성 변형률과의 관계는 아래와 같다.

$$\bar{\sigma}=\begin{cases} 293(\bar{\varepsilon}^p)^{0.191}\ \text{MPa} & \text{for } \bar{\varepsilon}^p > 0.04 \\ 128.2+756.6(\bar{\varepsilon}^p)\ \text{MPa} & \text{for } \bar{\varepsilon}^p \le 0.04 \end{cases} \tag{61}$$

대칭성을 고려하여 대칭면 오른쪽 부분만을 해석하였다. Fig. 6 과 같이 규칙적인·절점 분포와 불규칙적인 분포에 대해 최소 제곱 무요소법 해석을 수행하였다. 비교를 위해 규칙적인 분포에 대해서는 요소 격자를 구성하고 여기에 4×4 Gauss 구적

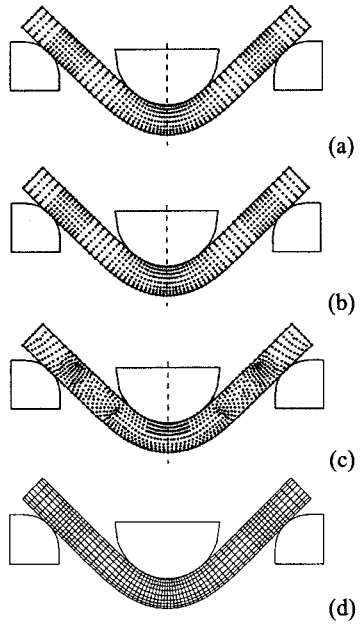

Fig. 7 Final deformed shapes: (a) LSMFM with regular nodes and element integration; (b) LSMFM with regular nodes and support integration; (c) LSMFM with irregular nodes with support integration; (d) Galerkin finite element method

법 적분을 사용한 해석도 추가로 수행하였다. 펀치의 변위가 3.2 가 될 때까지 80 하중 단계로 나누어 해석하였다. 각 하중 단계에서 $I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\sigma})$ 가 10^{-8} 보다 작게 될 때까지 축차가 수행되었으며, 20 번 이하의 축차수를 가지고 수렴하였다.

비교 목적으로 Galerkin 유한요소법 상용 코드인 ABAQUS 해석도 수행해 보았다. 이 해석을 위해 재료의 탄소성 거동을 가정하였으며, 영 계수 $E=68.9$ GPa 와 포와송 비 $\nu=0.33$ 를 사용하였다. 그리고 Fig. 6(a)의 규칙적인 절점 분포로부터 구성한 4-절점 요소들을 사용하였다.

네 경우의 해석 결과들을 정량적으로 비교하기 위해, 두 해석 결과 $\boldsymbol{u}_1^h$ 와 $\boldsymbol{u}_2^h$ 에 다음과 같이 상대 차이 놈(difference norm)을 정의한다.

$$\text{Relative difference norm}=\frac{\|\boldsymbol{u}_1^h-\boldsymbol{u}_2^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\boldsymbol{u}_1^h\|_{L^2(\Omega)}} \tag{62}$$

Fig. 7 은 펀치의 변위가 3.2 일 때의 네 경우의 해석 결과들로부터 얻어진 변형 형상들을 보여준다. 앞의 세 그림은 최소 제곱 무요소법 해석 결과들로 Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)는 각각 규칙적인 절점 분포에 요소 격자 적분법(LSMFM 1)과 영향영역에서 적분점을 분포시키는 방법(LSMFM 2)을 사용한

Table 1 The relative difference norms of displacement among LSMFM results for the plate bending problem

	Reference Result		
	LSMFM 1	LSMFM 2	LSMFM 3
LSMFM 1	0	0.00196	0.00396
LSMFM 2	0.00196	0	0.00428
LSMFM 3	0.00398	0.00432	0

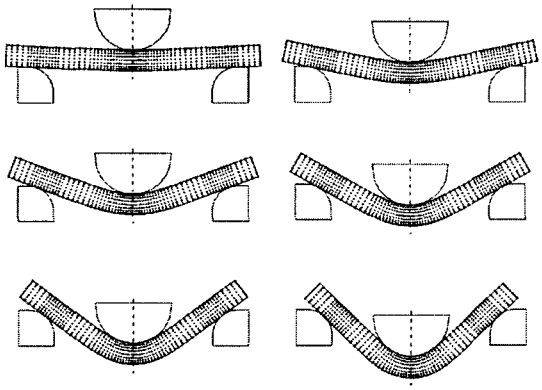

Fig. 8 Progressive deformed shapes using the regular distribution of nodes and support integration

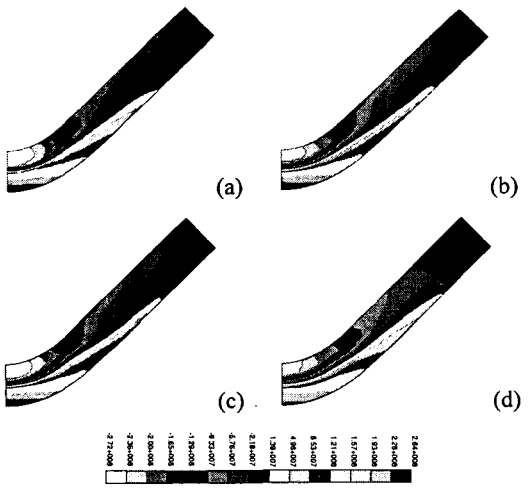

Fig. 9 Distribution of σ_{xx} when punch displacement is 3.2: (a) LSMFM 1; (b) LSMFM 2; (c) LSMFM 3; (d) Galerkin FEM

결과들이며, Fig 7(c)는 불규칙적인 절점 분포에 영향영역 적분 방법을 이용한 결과(LSMFM 3)이다. 그리고 Fig. 7(d)는 유한요소 해석 결과이다. 그림에서 네 결과 모두 거의 일치함을 관찰할 수 있다. 변위에 대한 최소 제곱 무요소법 결과들간의 상대

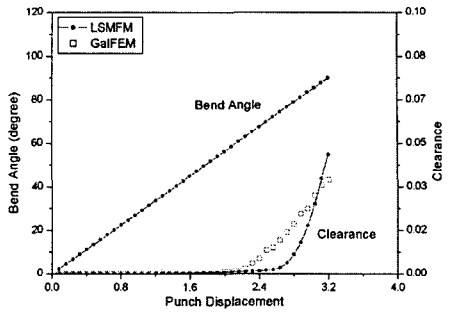

Fig. 10 Comparisons of bend angle and punch pole-workpiece clearance between LSMFM and FEM

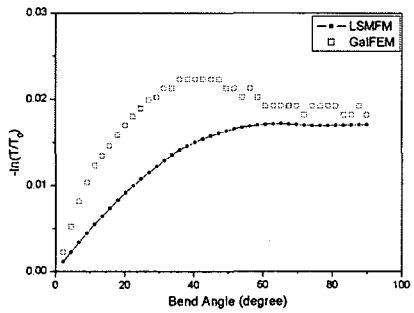

Fig. 11 Comparison of thinning of the plate at the bending axis between LSMFM and FEM

차이 놈을 Table 1 에 수록하였다. 세 결과의 차이 놈들은 0.5% 이하를 보인다. 이런 결과는 제안된 최소 제곱 무요소법이 적분 오차에 강건함을 의미하며, 근사화 함수 구성 및 적분 과정 모두에서 격자를 필요로 하지 않는 효율적인 무요소법이라 할 수 있다. Fig. 8 은 변형 형상의 변화를 차례로 보여준다. 이 형상들은 규칙적인 절점 분포에 영향영역 적분을 사용해서 얻어진 것이다. Fig. 9 는 네 경우의 해석으로 얻어진 σ_{xx}를 비교하고 있다 네 경우 모두 매우 비슷한 결과를 보임을 관찰할 수 있다.

Oh 와 Kobayashi 는 대칭면에서 재료와 펀치의 분리가 일어나고, 작은 부분만 서로 접촉하게 된다는 것을 지적하였다.[26] Fig. 10 은 굽힘 각도와 중심에서의 틈새 간격에 대한 최소 제곱 무요소법 결과와 유한 요소법 결과를 비교하고 있다. 굽힘 각도는 두 결과가 거의 동일하기 때문에 최소 제곱 무요소법 결과만 그렸다. 틈새 간격의 그래프를 보면, 두 결과 모두 공정이 진행됨에 따라 펀치 중심의 끝에서 펀치와 재료가 분리되는 것을 보여준다. 최소 제곱 무요소법의 틈새 간격이 유한요소법보다 펀치 변위가 작을 때 더 작고, 펀치 변위가 클 때는 더 큼을 볼 수 있으나, 전체적인

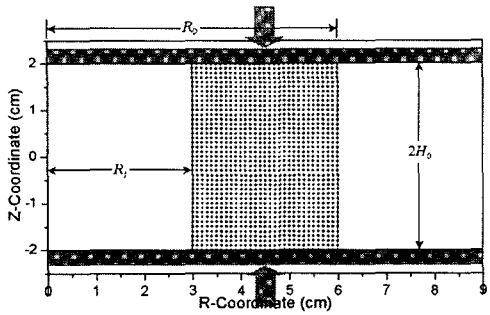

Fig. 12 Geometric description of ring compression and initial distribution of nodes

경향은 비슷하다. Fig. 11 은 대칭면에서 재료 두께의 변화를 보여준다. 여기서 T_0 와 T 는 각각 초기 두께와 변형 형상에서의 두께를 의미한다. 최소 제곱 무요소법이 더 작은 두께 감소를 보여주고 있으나, 굽힘 각도가 90°에 가까워질수록 비슷한 값으로 접근함을 볼 수 있다.

5.3 링 압축 문제

링 압축은 금속 성형에서 마찰 조건을 추정하기 위해 많이 사용되는 시험 방법으로, Fig. 12 와 같이 구멍이 있는 원통형 재료를 두 판 사이에 놓고 압축한다. 일반적으로 이 문제는 마찰이 작은 경우 높이가 줄어들면서 링의 내경이 증가하고, 마찰이 큰 경우 내경이 감소하는 변형 특성을 보인다. 해석에 사용된 치수는 외경 $2R_O = 12\,\text{cm}$, 내경 $2R_I = 6\,\text{cm}$, 높이 $2H_0 = 4\,\text{cm}$ 이다. 두 평판은 강체로 가정하고, 링의 재료는 냉각 단조강 16MnCr5 으로 항복응력 $\bar{\sigma} = 100\,\text{MPa}$ 인 완전 소성체로 가정한다.

대칭성을 고려하여 1/4 모델만을 해석하였으며, 3 장에서 제시한 최소 제곱 수식화를 축대칭 수식화로 수정하여 사용하였다. Fig. 12 는 초기 절점 분포를 보여주고 있으며, 수식화의 적분은 절점의 영향영역을 이용해 적분점을 분포시키는 방법을 사용하였다. 여러 마찰 조건에 대해 해석을 수행하였으며, 마찰 조건은 4.2 절에서 소개한 벌칙법을 사용해 처리하였다. 재료의 초기 높이의 반이 될 때까지 40 하중 단계로 나누어 해석하였으며, 각 하중 단계에서 잔여오차는 10^{-4} 이하로 얻어졌다.

본 예제에서 마찰력이 큰 경우 접촉이 일어나는 모서리 부근에서 심한 변형이 발생한다. 따라서 초기 형상에서 구한 무요소 형상함수를 현재 형상으로 변환한 라그랑지안 형상함수를 계속 사용하면 자코비안(Jacobian)이 음이 되는 영역이 발생하

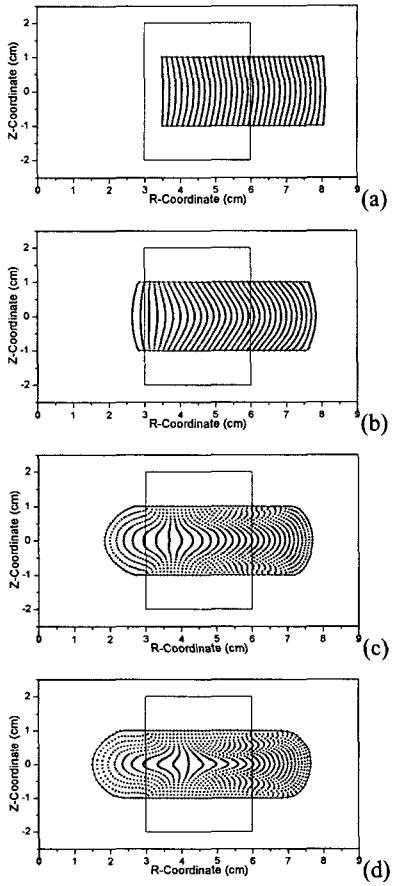

Fig. 13 Deformed shapes at 50% height reduction with various friction factors: (a) m = 0.1; (b) m = 0.3; (c) m = 0.7; (d) stick condition

여 해석을 계속 수행할 수 없게 된다. 따라서 형상함수를 재구성하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 절점의 추가 또는 제거 없이 영향영역만을 수정하여 형상함수를 재구성하는 방법을 도입하였다 재구성된 형상함수는 기준 형상함수가 되며, 다음 축차부터는 이를 변환하여 사용한다. 다시 형상함수를 재구성하게 되면 기준 형상함수가 바뀌게 된다.

새로운 형상함수를 사용하기 위해서는 절점에서의 현재 근사화 계수값들을 변경해야 한다. 이는 이동 최소 제곱 근사화의 절점값들이 실제 변수의 절점에서의 값이 아니라 단지 근사화 계수이기 때문이다. 이를 위해 각 절점에서 실제 변수값들이 그대로 유지되도록 다음과 같은 선점법을 사용하였다.

$$\text{Min.} \quad \sum_{K=1}^{N} \left(\psi^I(\boldsymbol{x}_K)\hat{u}^I - u(\boldsymbol{x}_K) \right)^2 \tag{63}$$

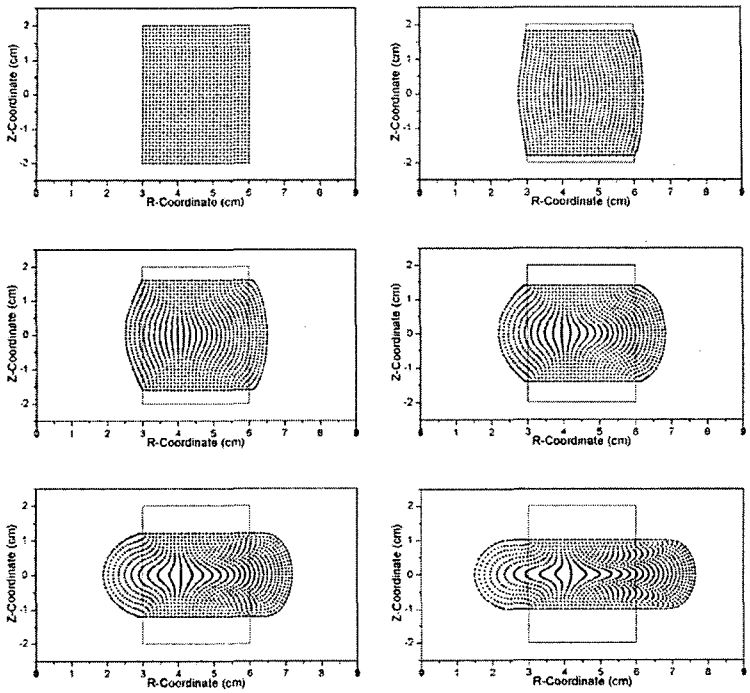

Fig. 14 Progressive deformed shapes with stick condition up to 50% reduction in height

여기서 N 은 전체 절점의 수이고, ψ^I 는 재구성된 형상함수로 I-번째 절점에 대한 것이며, $\hat{u}^I$ 는 변수 u 를 근사화하는 ψ^I 에 대한 새로운 근사화 계수이다. 그리고 $u(x_K)$ 는 K-번째 절점에서의 u 의 현재값이다. 식 (63)에 정류조건을 적용하면 다음과 같다.

$$\left(\sum_{K=1}^{N}\psi^I(x_K)\psi^J(x_K)\right)\hat{u}^J = \sum_{K=1}^{N}\psi^I(x_K)u(x_K) \qquad (64)$$

위 방정식은 독립 변수인 v 와 σ 의 각 성분에 적용되어야 한다.

본 논문에서는 초기에 생성된 적분점을 그대로 사용하므로 적분점에서 변수값들의 변경은 필요치 않다. 적분점을 그대로 사용하는 것은 최소 제곱 무요소법이 적분 오차에 강건한 특성을 가지므로 가능하다. 이렇게 영향영역을 다시 설정하는 방법의 실제 구현은 영향반경의 변경과 같은 기하학적 계산만을 요구하므로 상당히 간단하며 자동적으로 처리될 수 있다.

Fig. 13 은 네 가지 마찰 조건, 즉 $m = 0.1$, 0.3, 0.7 인 경우들과 부착 마찰(sticking friction) 조건에 대해 50% 두께 감소시의 변형 형상들을 보여준다. 이 결과들은 마찰이 작은 경우 재료가 바깥쪽으로 흐르는 변형이 지배적이고, 마찰이 커지면 안쪽과 바깥쪽 모두 가운데 부분에서 불룩한 변형이 일어나는 특성을 잘 보여주고 있다. Fig. 14 는 부착 마찰 조건에 대해 최소 제곱 무요소법 해석으로 얻어진 변형 형상의 변화를 순서대로 보여준다.

6. 결 론

본 논문에서는 강소성 변형 해석을 위한 최소 제곱 무요소법을 제시하였다. 이 방법은 제안된 최소 제곱 수식화에 이동 최소 제곱 근사화 방법을 적용한 것이다. 제안된 방법은 해석 전과정, 즉 근사화 함수의 구성, 수식화의 적분, 비압축성의 처리, 근사화 함수의 재구성 등에 있어서 격자의 사용을 필요로 하지 않는다는 장점을 가지고 있다.

제안된 최소 제곱 수식화는 J_2-유동법칙과 미소변형 이론에 기초한 구성방정식과 평형 방정식의 잔여오차를 제곱하여 이를 최소화한다. 이 지배방정식들은 속도와 응력 성분들을 독립 변수로 사용하여 일차 미분 방정식 형태로 표현되었다. 따라서 본 수식화는 일종의 혼합 수식화로 볼 수 있으며, 절점 변수에 응력 성분이 추가됨에 따라 선형 대수 방정식을 푸는데 필요한 계산 비용이 증가한다. 그러나 적분 오차에 대한 강건성으로 인해 적은 수의 적분점을 사용하는 것이 가능하므로 많은 계산 비용을 줄일 수 있는 측면이 있다.

제안된 방법에서 경계 조건 및 마찰 조건을 처리하기 위해 벌칙법을 이용한 방법을 고안하였고, 심한 변형으로 인해 근사화 함수의 재구성이 필요한 경우 영향영역만을 재설정하는 개념을 도입하였다. 평판 굽힘 문제와 링 압축 문제의 적용을 통해 본 방법의 특성 및 효용성을 제시하였다.

참고문헌

(1) Chen, J.S., Pan, C., Wu, C.T. and Liu W.K., 1996, "Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Non-linear Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 195~227.

(2) Chen, J.S., Pan, C., Rogue, C.M.O.L. and Wang H.P., 198, "A Lagrangian Reproducing Kernel Particle Method for Metal Forming Analysis," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 289~307.

(3) Li, S., Hao, W. and Liu, W.K., 2000, "Numerical Simulations of Large Deformation of Thin Shell Structures using Meshfree Method," *Comput. Mech.*, Vol. 25, pp. 102~116.

(4) Yoon, S. and Chen, J.S., 2002, "Accelerated Meshfree Method for Metal Forming Simulation," *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol. 38, pp. 937~948.

(5) Liew, K.M., Ng, T.Y. and Wu, Y.C., 2002, "Meshfree Method for Large Deformation Analysis-A Reproducing Kernel Particle Approach," *Eng. Struct.*, Vol. 24, pp. 543~551.

(6) Beissel, S. and Belytschko, T., 1996, "Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 49~74.

(7) Atluri, S.N. and Zhu, T., 1998, "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 117~127.

(8) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods," *Comput. Mech.*, Vol. 23, pp. 219~230.

(9) Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y., 2001, "A Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Mesh-free Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 435~466.

(10) Carpinteri, A., Ferro, G. and Ventura, G., 2002, "The Partition of Unity Quadrature in Meshless Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 54, pp. 987~1006.

(11) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Volumetric Locking in the Element Free Galerkin Method," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 46, pp. 925~942.

(12) Chen, J.S., Yoon, S., Wang, H.P. and Liu, W.K., 2000, "An Improved Reproducing Kernel Particle Method for Nearly Incompressible Finite Elasticity," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 181, pp. 117~145.

(13) Chen, J.S., Wang, H.P., Yoon, S. and You, Y., 2000, "Some Recent Improvement in Meshfree Methods for Incompressible Finite Elasticity Boundary Value Problems with Contact," *Comput. Mech.*, Vol. 25, pp. 137~156.

(14) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "The Least-Squares Meshfree Method," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 52, pp. 997~1012.

(15) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "Least-Squares Meshfree Methods and Integration Error," *Transactions of the KSME A*, Vol. 25, pp. 1605~1612.

(16) Park, S.H., Kwon, K.C. and Youn, S.K., 2003, "A Study on the Convergence of Least-Squares Meshfree Method under Inaccurate Integration," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 56, pp. 1397~1419.

(17) Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W., 2001, "Least-Squares Collocation Meshless Method," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 51, pp. 1089~1100.

(18) Cai, Z., Manteuffel, T.A., McCormick, S.F. and Parter, S.V., 1998, "First-order System Least Squares (FOSLS) for Planar Linear Elasticity: Pure Traction Problem," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 35, pp. 320~335.

(19) Kwon, K.C., Park, S.H., Jiang, B.N. and Youn, S.K., 2003, "The Least-Squares Meshfree Method for Solving Linear Elastic Problems," *Comput. Mech.*, Vol. 30, pp. 196~211.

(20) Kwon, K.C., Park, S.H. and Youn, S.K., 2002, "The Least-Squares Meshfree Method for Linear Elasticity," *Transactions of the KSME A*, Vol. 26, pp. 2312~2321.

(21) Lancaster, P. and Salkauskas, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least-Squares Methods," *Math. Comput.*, Vol. 37, pp. 141~158.

(22) Duarte, C.A. and Oden, J.T., 1995, "Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," *Technical Report 95-05*, TICAM, University of Texas at Austin, 1995.

(23) Jiang, B.N., 1998, *The Least-Squares Finite Element Method-Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Berlin, Spring-Verlag.

(24) Kobayashi, S, Oh, S.I. and Altan, T., 1989, *Metal Forming and the Finite-Element Method*, Oxford University Press, New York..

(25) Hill, R., 1950, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, New York..

(26) Oh, S.I. and Kobayashi, S., 1980, "Finite Element Analysis of Plane-strain Sheet Bending," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 22, pp. 583~594.