

두 상이한 등방성 이종재료 정지계면균열의 선단 응력장과 변위장에 관한 연구

신동철* · 황재석† · 남정환**

(2004년 5월 21일 접수, 2004년 11월 8일 심사완료)

A Study on the Near-Field Stresses and Displacements of a Stationary Interfacial Crack in Two Dissimilar Isotropic Bimaterials

Dong-Chul Shin, Jai-Sug Hawong and Jeong-Hwan Nam

Key Words : Near-field Stresses and Displacements(선단 응력장과 변위장), Stationary Interfacial Crack(정지계면균열), Two Dissimilar Isotropic Bimaterial(두 상이한 등방성 이종재료), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Bimaterial Constant(이종재료상수), Photoelastic Experimental Hybrid Method(광탄성 실험 하이브리드법)

Abstract

In many part of machines or structures that made of bimaterial bonded with two dissimilar materials, most failures occur at their interface. Therefore, the accurate analysis of fracture characteristics and the evaluation of mechanical strength for interfacial crack are essential when we design those structures. In this research, stress and displacement components in the vicinity of stationary interfacial crack tip in the two dissimilar isotropic bimaterials are established. Hereafter, the stress components established in this research can be applied to the photoelastic hybrid method which can be used to analyze the fracture behavior of the two dissimilar isotropic bimaterials.

기호설명

a_i : 컴플라이언서(Elastic compliances)
 C_n, D_n : 복소 계수
 e_n : 오차 (Errors)
 f_0 : 응력프린지치(Stress fringe value)
 G : 전단탄성계수
 H_{ik}, M : 복소 상수
 Im : 허수부 표시기호

i : $\sqrt{-1}$
 K_i : 응력확대계수 ($i=1,2$)
 k : 재료기호 (1,2)
 N_f : 등색선 무늬차수
 N : 복소 계수 C_n 의 차수
 O_{ik} : 복소 계수
 P_{ik}, Q_{ik} : 복소 상수
 R_0, Q : 실상수(Real constants)
 Re : 실수부 표시기호
 u_{pk} : 변위 ($p=1,2$)
 z : 복소 좌표($=x+iy$)
 β_n : 복소 미지수
 ϵ : 이종재료상수(Bimaterial constant)
 λ : 고유치(Eigen value)
 μ_i : 특성방정식의 복소근 ($i=1,2$)
 ν : 푸아송비

* 회원, 영남대학교 기계공학부

† 책임저자, 회원, 영남대학교 기계공학부

E-mail : jshawong@yumail.ac.kr

TEL : (053)810-2445 FAX : (053)813-3703

** 회원, 영남대학교 첨단기계센터

σ, τ	: 응력성분
σ_0	: 부가 응력(Far-field stress)
Φ	: 에어리 응력함수
Ω	: 복소응력함수

1. 서 론

이종접합재료에 대한 파괴문제에는 등방 균질 재료의 해석으로서는 해결하기 어려운 불연속 문제가(discontinuity) 내재되어 있다. 이러한 재료 및 형상의 불연속으로 인하여 이종재료 접합면에서 균열현상이 발생하며, 이 균열로 인하여 구조물이 파괴되기 쉽다. 정적 하중을 받는 이종재료 연구에 대한 역사적 배경은 다음과 같다. 1959년 Williams⁽¹⁾가 정적인 경우의 두 상이한 등방성 재료의 접합계면 균열선단에서 아주 가까운 부분의 응력은 무한의 진폭으로 진동하는 응력특이성이 있음을 발견하였다. 그 후, Erdogan⁽²⁾는 Williams에 의해 고려된 문제에 대해 복소변수 방법(complex variable method)으로 다양한 하중하의 반무한 평판에서의 균열선단 부근의 응력상태를 해석하였다. England⁽³⁾는 정적 하중이 작용할 때의 특정한 계면균열 문제를 해석하였으며, 변위의 진동현상을 발견하였다. 그리고, Sih와 Rice^(4,5)는 계면균열선단에 대한 응력성분과 응력확대계수에 대한 공식을 유도하고, 복소 고유함수 전개법(complex eigen function expansion method)을 사용하여 몇 가지 계면균열 문제를 해석하였다. Theocaris⁽⁶⁾와 Huth⁽⁷⁾는 앞에서 제시된 고유함수(eigen function)의 형태에 대하여 의문점을 제시하고, 더 복잡한 형태의 고유함수(이항 복소고유치 전개방식)를 사용할 것을 제안하였다. Lin과 Mar⁽⁸⁾는 두 상이한 등방성 이종재료 사이의 정지 계면균열의 고유함수에 대한 완전한 표현식을 유도하였으며, 유한요소법을 사용하여 다양한 하중 조합에 따른 응력 및 변위장 그리고 응력확대계수를 구하였다.

지금까지의 두 상이한 등방성 이종재료 사이의 정지 계면균열 근방의 응력장과 변위장 그리고 이종재료상수의 표현식이 두 상이한 등방성 이종재료 혹은 두 상이한 직교이방성 이종재료 사이의 진전 계면균열 근방의 응력장 및 변위장 그리고 이종재료상수의 표현식^(9,10)과는 상이한 형태로

표현되었다. 만약 이러한 각기 다른 재료의 계면 균열 근방의 응력장 및 변위장 그리고 이종재료 상수 등의 표현식을 동일한 유도과정을 통해 동일한 형태로 표현된다면, 각기 다른 재료의 파괴 역학적 거동의 비교 연구와 그 응용(광탄성 실험 하이브리드법 혹은 유한요소법)에 많은 기여를 할 것으로 생각된다. 그러므로 본 연구에서는 두 상이한 등방성 이종재료의 정지계면균열에 대한 응력장과 변위장, 이종재료상수 그리고 응력확대계수의 관계식을 새로운 형태로 유도하고 그 유효성을 확인하고자 한다.

2. 기초 이론

2.1 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열 선단 응력장 및 변위장

정적 하중을 받는 등방성 재료의 특성근은 명백한 한 쌍의 중근($\mu = \pm i$)를 가지며, 이 경우의 Muskhelishvili의 복소함수⁽¹¹⁾는 두 개의 해석적인 함수 Ω_{1k}, Ω_{2k} 의 항으로 표현되는 식 (1)과 같은 Airy 응력함수(Φ)로 표현된다.

$$\Phi = \text{Re} \left[\bar{z}_k \Omega_{1k} + \int \Omega_{2k} dz_k \right] \quad (1)$$

Fig. 1과 같은 좌표계에서 식 (1)의 Airy 응력함수를 사용하여 각 응력 및 변위 성분들은 표현하면 식 (2)와 같다.⁽¹¹⁾

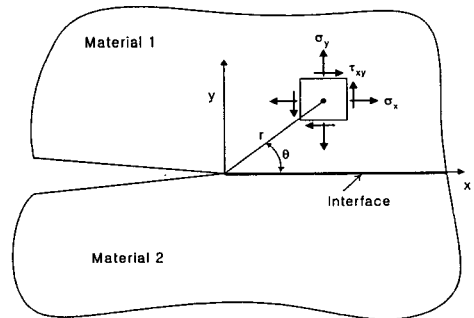


Fig. 1 Coordinate system and stress components

$$\begin{aligned} \sigma_{11k} &= \text{Re} [2\Omega_{1k}' - \Omega_{2k}' - \bar{z}_k \Omega_{1k}''] \\ \sigma_{22k} &= \text{Re} [2\Omega_{1k}' + \Omega_{2k}' + \bar{z}_k \Omega_{1k}''] \\ \sigma_{12k} &= \text{Re} [-i\Omega_{2k}' - i\bar{z}_k \Omega_{1k}''] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{1k} &= \text{Re} [P_{1k}\Omega_{1k} + P_{2k}\Omega_{2k} + P_{2k} \bar{z}_k \Omega_{1k}'] \\ u_{2k} &= \text{Re} [Q_{1k}\Omega_{1k} + Q_{2k}\Omega_{2k} + Q_{2k} \bar{z}_k \Omega_{1k}'] \end{aligned} \quad (3)$$

단, $z_k = x + iy \quad (k=1,2)$
 $P_{1k} = 3a_1 + a_2, \quad P_{2k} = -a_1 + a_2$
 $Q_{1k} = -(a_2 + 3a_1)i, \quad Q_{2k} = (a_2 - a_1)i$

Ω_{ik} 를 식 (4)와 같은 복소 멱급수로 나타내면

$$\begin{aligned} \Omega_{1k} &= C_{1k}z_k^\lambda + D_{1k}z_k^{\bar{\lambda}}, \\ \Omega_{2k} &= C_{2k}z_k^\lambda + D_{2k}z_k^{\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (2), (3)에서 σ_{12k} 와 u_{2k} 의 표현식을 Sih와 Rice^(4,5)에서와 달리 $\text{Re}[\dots]$ 의 형태로 두었으며, 식 (4)에서도 이항 복소고유치^(6,7)를 사용하였다.

균열 표면의 무표면력 조건 (traction-free condition)과 계면 양면의 응력 및 변위의 연속조건식을 사용하여 식 (4)의 복소계수들을 하나의 복소계수로 표현할 수 있다.

먼저, 균열 표면의 무표면력 조건을 적용하기 위해, 균열표면상의 z_k 를 극좌표 변수 r, θ 의 항으로 표현하면

$$z_k = r e^{\frac{\theta}{2\lambda}} \quad (5)$$

$$a_k = \begin{cases} 2i\lambda\pi & \text{for } k=1 \text{ (upper material)} \\ -2i\lambda\pi & \text{for } k=2 \text{ (lower material)} \end{cases}$$

균열표면(음의 x축 선상)의 무표면력 조건 (traction free condition)은 식 (6)과 같다.

$$\sigma_{22k} - i\sigma_{12k} = \Omega_{1k}' + \overline{\Omega_{1k}'} + \overline{\Omega_{2k}'} + z_k \overline{\Omega_{1k}''} = 0 \quad (6)$$

식 (5)를 식 (6)에 대입하고, 모든 r 값에 대해서 성립하여야 하므로 r^λ 와 $r^{\bar{\lambda}}$ 은 상호 독립적이라는 조건을 사용하면 식 (7)과 같다.

$$C_{1k}e^{a_k} + \lambda \bar{D}_{1k} + \bar{D}_{2k} = 0 \quad (7a)$$

$$\bar{\lambda} \bar{C}_{1k}e^{-a_k} + D_{1k} + \bar{C}_{2k}e^{-a_k} = 0 \quad (7b)$$

식 (7)을 C_{2k} 와 \bar{D}_{2k} 을 C_{1k} 와 \bar{D}_{1k} 의 항에 대해서 풀면 식 (8)이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} C_{2k} \\ \bar{D}_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -e^{-a_k} \\ -e^{a_k} & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1k} \\ \bar{D}_{1k} \end{bmatrix} \quad (8)$$

양의 x축상 즉, 균열선단 앞부분의 계면 양면의 응력과 변위의 연속 조건은 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{22})_1 &= (\sigma_{22})_2, \quad (\sigma_{12})_1 = (\sigma_{12})_2 \\ (u_1)_1 &= (u_1)_2, \quad (u_2)_1 = (u_2)_2 \end{aligned} \quad (9)$$

계면상에서 $z_{1k} = z_{2k} = r$ 이므로 이를 식 (4)에 대입하고 이를 다시 식 (2)와 (3)에 대입한 후 식 (9)의 조건을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} (\sigma_{22})_k &= \frac{1}{2} \{ (1 - e^{a_k})C_{1k} + (1 - e^{-a_k})\bar{D}_{1k} \} \lambda r^{\lambda-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (1 - e^{\bar{a}_k})\bar{C}_{1k} + (1 - e^{-\bar{a}_k})D_{1k} \} \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1} \\ (\sigma_{12})_k &= \frac{i}{2} \{ (1 - e^{a_k})C_{1k} + (1 - e^{-a_k})\bar{D}_{1k} \} \lambda r^{\lambda-1} \\ &\quad - \frac{i}{2} \{ (1 - e^{\bar{a}_k})\bar{C}_{1k} + (1 - e^{-\bar{a}_k})D_{1k} \} \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (u_1)_k &= \frac{1}{2} \{ (P_{1k} - \bar{P}_{2k}e^{a_k})C_{1k} + (\bar{P}_{1k} + P_{2k}e^{-a_k})\bar{D}_{1k} \} r^\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (\bar{P}_{1k} - P_{2k}e^{\bar{a}_k})\bar{C}_{1k} + (P_{1k} - \bar{P}_{2k}e^{-\bar{a}_k})D_{1k} \} r^{\bar{\lambda}} \\ (u_2)_k &= \frac{1}{2} \{ (Q_{1k} - \bar{Q}_{2k}e^{a_k})C_{1k} + (\bar{Q}_{1k} + Q_{2k}e^{-a_k})\bar{D}_{1k} \} r^\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (\bar{Q}_{1k} - Q_{2k}e^{\bar{a}_k})\bar{C}_{1k} + (Q_{1k} - \bar{Q}_{2k}e^{-\bar{a}_k})D_{1k} \} r^{\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (11)$$

변수 P_{ik}, Q_{ik} 는 재료의 물성치의 함수이고 r^λ 과 $r^{\bar{\lambda}}$ 이 독립적이므로 식 (10)과 (11)로부터 식 (12)을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (1 - e^{a_k}) & (1 - e^{\bar{a}_k}) & -(1 - e^{-a_k}) & -(1 - e^{-\bar{a}_k}) \\ -(1 - e^{a_k}) & (1 - e^{\bar{a}_k}) & (1 - e^{-a_k}) & -(1 - e^{-\bar{a}_k}) \\ P_{11} - \bar{P}_{21}e^{a_k} & \bar{P}_{11} - P_{21}e^{-a_k} & -(P_{11} - \bar{P}_{21}e^{-a_k}) & -(\bar{P}_{11} - P_{21}e^{a_k}) \\ Q_{11} - \bar{Q}_{21}e^{a_k} & \bar{Q}_{11} - Q_{21}e^{-a_k} & -(Q_{11} - \bar{Q}_{21}e^{-a_k}) & -(\bar{Q}_{11} - Q_{21}e^{a_k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ \bar{D}_{11} \\ C_{12} \\ \bar{D}_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$(단, \alpha = 2i\lambda\pi) \tag{12}$$

복소 변수 C_{ik} 와 D_{ik} 에 대한 유익해(non-trivial solution)는 식 (12)의 행렬식의 크기가 "0" 일 때만 가능하다. 따라서 식 (13)이 성립한다.

$$(1-x)^2(1+2bx+x^2) = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } x &= e^\alpha, \quad b = \frac{R_0}{2Q} \\ R_0 &= 2\text{Im}[A_1 + A_2]i, \quad Q = B_1 + C_1 \\ A_1 &= P_{11}\bar{Q}_{11} + P_{12}\bar{Q}_{12} - (P_{21}\bar{Q}_{21} + P_{22}\bar{Q}_{22}) \\ A_2 &= P_{22}Q_{11} + P_{21}Q_{12} - (P_{12}Q_{21} + P_{11}Q_{22}) \\ B_1 &= P_{22}Q_{12} - P_{12}Q_{22} + \bar{P}_{11}\bar{Q}_{21} - \bar{P}_{21}\bar{Q}_{11} \\ C_1 &= P_{12}\bar{Q}_{11} - \bar{P}_{11}Q_{12} - P_{22}\bar{Q}_{21} + \bar{P}_{21}Q_{22} \end{aligned}$$

변수 R 및 Q 는 순허수이며 $b \geq 1$ 이고, 항등식은 두 재료가 동일한 재료일 때 성립한다.

식 (13)으로부터 균열 선단에 유한 변위가 발생되는 만족스러운 고유치는 식 (14)와 같다. 이때, 주의할 것은 $\lambda = 1/2 + i\epsilon$ 과 $\lambda = 1/2 - i\epsilon$ 은 동일한 해를 유도하므로 오직 $\lambda = 1/2 + i\epsilon$ 에 대해서만 고려하였다.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n}{2} + i\epsilon \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ \lambda_n &= \frac{n}{2} \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \tag{14}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln(b + \sqrt{b^2 - 1}) \tag{15}$$

여기서 식 (15)의 ϵ 즉, 복소 고유치의 허수부는 이중재료상수(bimaterial constant)로 불리어지는데 이것은 이중재료내의 각 재료의 물성치가 다르기 때문에 나타나는 값이다.

식 (15)의 이중재료상수에 대한 결과 식이 두 상이한 등방성 또는 직교이방성 이중재료 진전계면균열에서의 진동지수(oscillation index)^(9,10)와 동일한 형태의 표현식임을 알 수 있다.

우선 고유치 λ_n 가 복소수($n=1,3,5,\dots$)인 경우 식 (12)의 첫 세 개의 방정식으로부터 \bar{D}_{11}, C_{12} 및 \bar{D}_{12} 을 C_{11} 항으로 나타내고 나머지 미지수에 대해 식 (8)을 사용하면

$$\begin{bmatrix} C_{11} & D_{11} \\ C_{21} & D_{21} \\ C_{12} & D_{12} \\ C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} M_{11} & \bar{M}_{21} \\ M_{31} & \bar{M}_{41} \\ M_{12} & \bar{M}_{22} \\ M_{32} & \bar{M}_{42} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix}_n \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } \beta_n &= C_{11n}, \quad M_{11} = 1, \quad M_{21} = -\frac{M_1}{M_0} e^\alpha, \\ M_{12} &= -e^\alpha, \quad M_{22} = \frac{M_1}{M_0}, \quad M_{31} = -\lambda + \frac{M_1}{M_0}, \\ M_{41} &= -e^\alpha + \lambda \frac{M_1}{M_0} e^\alpha, \quad M_{32} = \lambda e^\alpha - e^\alpha \frac{M_1}{M_0}, \\ M_{42} &= 1 - \lambda \frac{M_1}{M_0}, \\ M_0 &= (\bar{P}_{12} - P_{22}e^\alpha) - (P_{21} - \bar{P}_{11}e^\alpha) \\ M_1 &= (P_{11} - \bar{P}_{21}e^\alpha) - (\bar{P}_{22} - P_{12}e^\alpha) \end{aligned}$$

M_{ik} 는 재료의 물성치 및 균열 선단 속도의 함수로써 계산되어지는 알고 있는 값이다.

다음으로 고유치 λ_n 이 실수($n=2,4,6,\dots$)인 경우 $e^\alpha = e^{-\alpha} = 1$ 이며 모든 미지수는 독립적으로 정의될 수 없으며 단지 아래와 같은 부분함으로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} O_{11} &= C_{11} + D_{11}, \quad O_{21} = C_{21} + D_{21} \\ O_{12} &= C_{12} + D_{12}, \quad O_{22} = C_{22} + D_{22} \end{aligned} \tag{17}$$

O_{ik} 에 대해서 풀기 위해 식 (12)의 세 번째와 네 번째 방정식으로부터 C_{12} 과 \bar{D}_{12} 를 C_{11} 과 \bar{D}_{11} 의 항으로 나타냄으로써 O_{12} 를 O_{11} 과 \bar{O}_{11} 의 항으로 표현하고, 식 (8)을 사용하여 O_{21} 과 O_{22} 를 O_{11} 과 \bar{O}_{11} 의 항으로 나타내면 식 (18)과 같다.

$$\begin{bmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{12} \\ O_{22} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} M_{11} & \bar{M}_{21} \\ M_{31} & \bar{M}_{41} \\ M_{12} & \bar{M}_{22} \\ M_{32} & \bar{M}_{42} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{bmatrix}_n \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } \beta_n &= C_{11n} + D_{11n}, \quad M_{11} = 1, \quad M_{21} = 0, \\ M_{12} &= \frac{M_1}{M_0}, \quad M_{22} = \frac{M_2}{M_0}, \quad M_{31} = -\lambda, \quad M_{41} = -1, \\ M_{32} &= -\lambda \frac{M_1}{M_0} - \frac{M_2}{M_0}, \quad M_{42} = -\frac{M_1}{M_0} - \lambda \frac{M_2}{M_0} \\ M_0 &= (P_{12} - \bar{P}_{22})(\bar{Q}_{12} - Q_{22}) - (\bar{P}_{12} - P_{22})(Q_{12} - \bar{Q}_{22}) \\ M_1 &= (P_{11} - \bar{P}_{21})(\bar{Q}_{12} - Q_{22}) - (\bar{P}_{12} - P_{22})(Q_{11} - \bar{Q}_{21}) \\ M_2 &= (P_{12} - \bar{P}_{22})(Q_{11} - \bar{Q}_{21}) - (P_{11} - \bar{P}_{21})(Q_{12} - \bar{Q}_{22}) \end{aligned}$$

그러므로 정적 하중을 받는 두 상이한 등방성 이중재료내의 계면균열에 대한 응력장과 변위장의 상태에 대한 표현식은 각 재료 $k(=1,2)$ 에 대해서 식 (19)와 같이 얻어진다.

$$\sigma_{lk} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[\lambda_n (S_{11kn} z_k^{\lambda_n-1} + S_{12kn} \bar{z}_k^{\lambda_n-1} + S_{13kn} \bar{z}_k z_k^{\lambda_n-2} + S_{14kn} z_k \bar{z}_k^{\lambda_n-2}) \beta_n \right] \quad (19a)$$

$$u_{pk} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[(D_{p1kn} z_k^{\lambda_n} + D_{p2kn} \bar{z}_k^{\lambda_n} + D_{p3kn} \bar{z}_k z_k^{\lambda_n-1} + D_{p4kn} z_k \bar{z}_k^{\lambda_n-1}) \beta_n \right] \quad (19b)$$

여기서

$$S_{11kn} = 2M_{1kn} - M_{3kn}, \quad S_{12kn} = 2M_{2kn} - M_{4kn}$$

$$S_{13kn} = -(\lambda_n - 1)M_{1kn}, \quad S_{14kn} = -(\lambda_n - 1)M_{2kn}$$

$$S_{21kn} = 2M_{1kn} + M_{3kn}, \quad S_{22kn} = 2M_{2kn} + M_{4kn}$$

$$S_{23kn} = (\lambda_n - 1)M_{1kn}, \quad S_{24kn} = (\lambda_n - 1)M_{2kn}$$

$$S_{31kn} = -iM_{3kn}, \quad S_{32kn} = iM_{4kn}$$

$$S_{33kn} = -i(\lambda_n - 1)M_{1kn}, \quad S_{34kn} = i(\lambda_n - 1)M_{2kn}$$

$$D_{11kn} = P_{1k}M_{1kn} + P_{2k}M_{3kn}, \quad D_{12kn} = \bar{P}_{1k}M_{2kn} + \bar{P}_{2k}M_{4kn}$$

$$D_{13kn} = P_{2k}\lambda_n M_{1kn}, \quad D_{14kn} = \bar{P}_{2k}\lambda_n M_{2kn}$$

$$D_{21kn} = Q_{1k}M_{1kn} + Q_{2k}M_{3kn}, \quad D_{22kn} = \bar{Q}_{1k}M_{2kn} + \bar{Q}_{2k}M_{4kn}$$

$$D_{23kn} = Q_{2k}\lambda_n M_{1kn}, \quad D_{24kn} = \bar{Q}_{2k}\lambda_n M_{2kn}$$

여기서 $l=1,2,3$ 에 대해 σ_{lk} 는 $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]_k = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]_k = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}]_k$ 를, $p=1,2$ 인 경우 u_{pk} 는 $[u_1, u_2]_k = [u, v]_k$ 를 의미한다.

2.2 이중재료용 광탄성 하이브리드법

식 (19)를 광탄성 실험에 적용하기 위해 식 (20)의 광응력 법칙에 대입하면 재료 1에 대해서 각각 식 (21)과 같이 표현할 수 있다. 재료 1은 광탄성 성질을 가지는 재료이다.

$$D = \left(\frac{f_{\sigma} \cdot N_f}{t} \right)^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 \quad (20)$$

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[\lambda_n \left((S_{11kn} - S_{21kn}) z^{\lambda_n-1} + (S_{12kn} - S_{22kn}) \bar{z}^{\lambda_n-1} + (S_{13kn} - S_{23kn}) \bar{z} z^{\lambda_n-2} + (S_{14kn} - S_{24kn}) z \bar{z}^{\lambda_n-2} \right) \beta_n \right] \right\}^2 + 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[\lambda_n \left(S_{31kn} z^{\lambda_n-1} + S_{32kn} \bar{z}^{\lambda_n-1} + S_{33kn} \bar{z} z^{\lambda_n-2} + S_{34kn} z \bar{z}^{\lambda_n-2} \right) \beta_n \right] \right\}^2 \quad (21)$$

여기서 f_{σ} 는 재료의 응력프린치치(stress fringe value)이며 실험적으로 구하여지는 값이다. N_f 는 등색선 무늬차수이며, t 는 시편의 두께이다. 그러므로 식 (21)의 미지수는 오직 β_n 이다. 즉,

$$D - f(\beta_n) = e_n^2 \quad (22)$$

그러므로 식 (22)에 비선형 최소 자승법을 적용하여 오차(e_n)을 최소화하는 미지수 β_n 을 구함으로써 응력 성분을 구할 수 있다. 이러한 방법을 두 상이한 등방성 이중재료 정지계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법이라 한다.

2.3 이중재료 계면 균열의 응력확대계수

평면 문제의 응력확대계수는 일반적으로 다음과 같이 응력 특이치를 제거함으로써 정의된다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0) \quad (23)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, 0)$$

이러한 정의는 단지 하나의 재료에 대한 문제에서만 유효한 정의이다. 이중재료의 경우에는 법선 및 전단 하중 중 어느 하나만으로도 열림 모드와 미끄럼 모드 둘 다 발생한다.⁽⁵⁾

두 상이한 등방성체의 정적인 계면균열 문제의 경우, 응력확대계수는 아래와 같이 응력특이치를 제거함으로써 정의되어진다.⁽⁴⁾

$$K_I - iK_2 = 2\sqrt{2\pi} e^{-\pi\epsilon} \lim_{z_1 \rightarrow 0} z_1^{1/2-\pi\epsilon} \Omega'_{11}(z_1) \quad (24)$$

식 (24)는 식 (25)와 같은 다른 방법으로 정의될 수 있다.⁽¹²⁾

$$K_I - iK_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\cosh(\pi\epsilon)} \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1/2-\pi\epsilon} (\sigma_{22} - i\sigma_{12})] \quad (25)$$

식 (19)에서 균열선단 바로 앞부분 응력의 첫 번째 항은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{22} = \sigma_y = \text{Re} [A_2 r^{\lambda_1-1} \beta_1]$$

$$\sigma_{12} = \tau_{xy} = \text{Re} [A_3 r^{\lambda_1-1} \beta_1] \quad (26)$$

여기서

$$A_2 = \lambda_1 [(2 + M_{311}) + (2M_{211} + M_{411}) + (\lambda_1 - 1) + (\lambda_1 - 1)M_{211}]$$

$$A_3 = \lambda_1 [(-iM_{311}) + (iM_{411}) - i(\lambda_1 - 1) + i(\lambda_1 - 1)M_{211}]$$

따라서 응력확대계수는 식 (27)처럼 정의된다.

$$K_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\cosh(\pi\epsilon)} \operatorname{Re}[A_2\beta_1] \quad (27)$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\cosh(\pi\epsilon)} \operatorname{Re}[A_3\beta_1]$$

$\epsilon=0$ 인 단일 재료의 문제에 대해서 식 (27)은 식 (23)의 정의로 변환된다. 또한 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열에서는 다음의 관계가 있다.⁽¹²⁾

$$A_2 = -iA_3 \quad (28)$$

3. 검증 및 검토

3.1 이종재료상수에 대한 검증

Sih 등은⁽⁴⁾ 두 상이한 등방성 이종재료 정지계면균열에 대한 이종재료상수를 식 (29)와 같이 나타내었다.

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{\kappa_1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) / \left(\frac{\kappa_2}{G_2} + \frac{1}{G_1} \right) \right] \quad (29)$$

단,

$$\kappa_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & \text{for plane strain} \\ \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & \text{for plane stress} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

여기서 G_i 와 ν_i 는 각각 두 등방성 재료의 전단탄성계수와 푸아송비이다.

Table 1은 본 연구의 결과와 Sih⁽⁴⁾의 결과를 편의상 E_1 의 값을 2 GPa로 하고, 두 등방성 재료의 푸아송비를 0.3으로 하여 비교한 것으로 두 결과가 같은 값을 알 수 있다. 따라서 본 연구의 두 상이한 등방성 이종재료 정지계면균열의 선단 응력장과 변위장의 유도과정이 유효하며, 그 표현형태는 상이하나 그 결과는 Sih의 결과와 일치함을 알 수 있다. Table 1의 결과에서 이종재료상수는 두 재료의 탄성계수비가 커짐에 따라

Table 1 Comparison of bimaterial constants with various modulus ratio($E_1=2$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)

E_2/E_1	This results	Sih's results ⁽⁴⁾
1	0.0000000	0.0000000
2	0.0373060	0.0373060
4	0.0678545	0.0678545
10	0.0937743	0.0937743
50	0.1113720	0.1113720
100	0.1138170	0.1138170
1000	0.1160710	0.1160710
10000	0.1162990	0.1162990

그 크기가 차츰 증가하다가 어느 값(재료 2가 강체인 경우의 값, 약 0.1163)에 수렴하는 것으로 보인다.

3.2 선단 응력장과 변위장의 유효성 검증

본 연구에서 유도된 두 상이한 등방성 이종재료의 정지 계면균열 선단 응력장과 변위장의 유효성을 검증하기 위하여 순수한 등방성체내의 균열에 대해 광탄성 실험을 수행하고, 여기서 얻은 등색선 무늬 데이터를 사용하여 이미 본 연구자들에 의해 그 유효성이 확인된 등방성체 균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법⁽¹³⁾에 적용한 결과와 본 연구에서 개발된 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법을 두 재료가 동일한 경우에 적용한 결과를 비교함으로써 그 유효성을 검증하고자 한다.

Fig. 2는 중앙 균열 ($2a/w=0.442$, $2a=12.7$ mm, $t=6.1$ mm)을 가진 에폭시 수지에 단순 인장하중 ($P=1112$ N)을 가하여 얻은 실제 등색선 무늬와 하이브리드법에 의해 구하여진 응력함수를 사용하여 그려픽한 등색선 무늬를 나타낸다.

Fig. 2의 a)는 실제 등색선 무늬이고 "□"표시는 그려픽한 영역을 나타내며, 그 부분을 확대한 사진을 Fig. 2의 b)에 나타내었다. Fig. 2의 c)는 Fig. 2의 b)에서 얻은 등색선 무늬 데이터를 등방성체 균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법에 적용하여 구한 응력함수와 광응력 법칙을 이용하여 그려픽한 등색선 무늬이며, Fig. 2의 d)는 Fig. 2의 b)에서 얻은 등색선 무늬 데이터를 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법에 적용하여 구한 응력함수와 광응력 법칙을 이용하여 그려픽한 등색선 무늬를 나타낸 것이다. 그려픽된 등색선 무늬의 "+"표시는 데이터를 취한 지점, x축과 y축의 숫자는 균열선단에서 떨어진 (x,y)의 좌표(mm)를 의미한다.

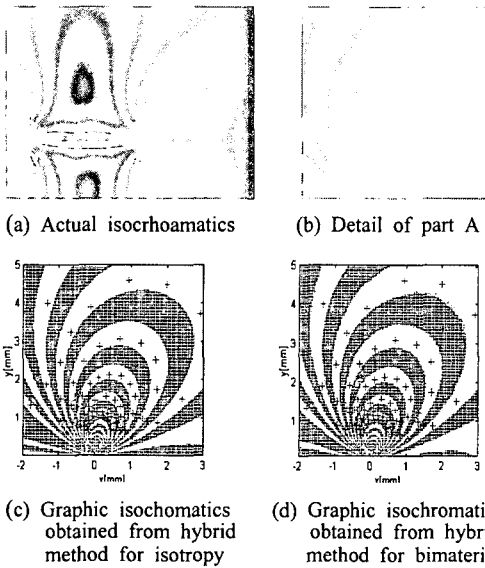


Fig. 2 Actual isochromatic fringes [(a), (b)] and graphic isochromatic fringes [(c), (d)] obtained from the hybrid methods

Fig. 2에서 보듯이 실제 등색선 무늬와 두 종류의 하이브리드법에 의해 구하여진 등색선 무늬가 매우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 등방성체 균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법뿐만 아니라, 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법도 유효하며, 유도된 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열에 대한 선단 응력장과 변위장이 단일 등방성체 균열 문제에도 유효하게 적용됨을 알 수 있다.

Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 등방성체 균열의 광탄성 실험 하이브리드법으로 구한 복소계수와 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열의 광탄성 실험 하이브리드법으로 구한 복소계수를 사용하여 구한 각 응력성분들을 가하여진 응력(σ_0)으로 무차원화하여 0.1단위로 나타낸 것이다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 두 경우의 광탄성 실험 하이브리드법으로 구한 응력성분들(σ_y , τ_{xy})은 균열면에서의 무표면력 조건 (traction-free condition)을 만족하고 있다. 따라서 본 연구에서 사용된 두 경우의 광탄성 실험 하이브리드법이 유효하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 3의 (a)와 (b)를 비교하여 보면 응력성분들

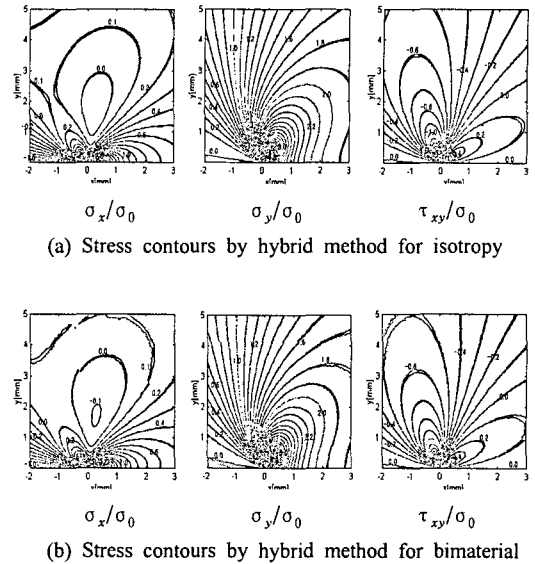


Fig. 3 Contours of normalized stress components obtained from the hybrid methods

의 등고선의 분포형태는 동일하나, 그 크기에서 근소한 차이를 보이고 있다. 이것은 균열선단의 응력장을 먹굽수형태로 표현하는 과정에서 등방성체 내의 정지 균열의 경우는 경계조건으로 균열면에서의 무표면력 조건만을 고려(재료의 물성치가 고려 안 됨)하는 반면, 두 상이한 등방성 이종재료 정지 계면균열의 경우는 경계조건으로 균열 면에서의 무표면력 조건뿐만 아니라 균열 앞부분(이종재료의 경우 계면)에서의 응력 및 변위의 연속조건(재료의 물성치가 고려됨)도 사용한다는 차이 때문인 것으로 생각된다. 즉, 재료의 물성치를 고려하느냐, 하지 않느냐의 차이라 생각되며, 그런 점에서 재료의 물성치를 고려하는 두 상이한 등방성 이종재료 정지계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법으로 구한 Fig. 3의 (b)의 경우가 보다 더 정확한 값이라 생각된다.

또한 Fig. 3의 (a)의 경우에서 $K_0(=\sigma_0\sqrt{\pi a})$ 로 무차원화된 응력확대계수 값이 $K_1/K_0=1.16394$, $K_2/K_0=0.00223$ 이고, Fig. 3의 (b)의 경우는 $K_1/K_0=1.16593$, $K_2/K_0=0$ 으로 모드 I(mode I) 하중인 점을 고려하면 두 상이한 등방성 이종재료의 정지계면균열에 대한 광탄성 실험 하이브리드법에 적용하여 구한 Fig. 3의 (b)의 무차원 응력 확대계수 값이 더 유효하다고 할 수 있으나, 그

차이는 아주 미미하다.

이상의 결과로부터 본 연구에서 유도된 두 상이한 등방성 이종재료내 정지계면균열 선단 응력장과 변위장이 유효함을 확인하였으며, 단일 등방성체 균열문제에도 적용 가능함을 확인하였다.

3.3 광탄성 등색선 무늬 예시 및 검토

Table 2 는 본 연구에서 유도된 두 상이한 등방성 이종재료 내의 정지 계면균열의 선단 응력장과 변위장을 광탄성 실험에 적용할 경우의 응력확대계수와 탄성계수비의 변화에 따른 등색선무늬 형태의 변화를 알아보기 위하여 사용된 각 재료들의 물성치와 에폭시 수지의 응력프린지치를 나타낸 것이며, 여기서 재료 1은 에폭시 수지이고 재료 2는 각각 알루미늄판과 강판으로 가정하였다.

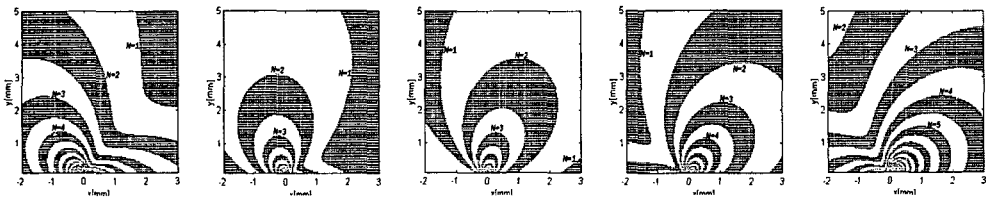
Fig. 4는 에폭시/알루미늄과 에폭시/강으로 이루어

진 이종재료의 경우에 대해 다양한 응력확대계수에 따른 등색선 무늬의 형태를 보여주고 있다. 이 때 각 응력성분들은 고차항을 무시한 즉, $n=1$ 로 하여 계산하였다. 고차항을 무시한 결과이므로 실제 등색선 무늬와는 다소 차이가 있을 수 있으나, 실제 등색선 무늬만으로 개략적인 응력확대계수를 예측하는데 도움을 주고자 한다. 여기서 균열면은 각각의 그래픽 무늬상에 표시된 음의 x-축상에 존재하며, $K_0 = 0.5 MPa$ 로 가정하였고, 각 재료의 이종재료상수 ϵ 은 각각 0.09219와 0.09838이다.

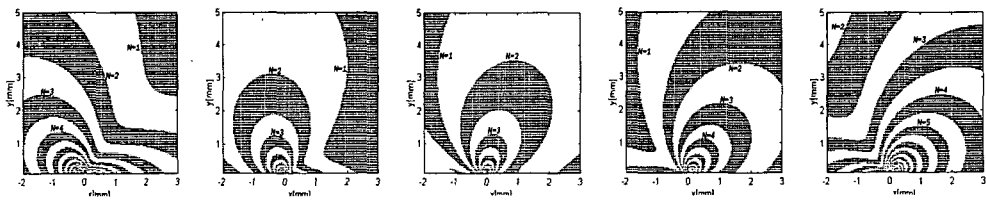
Fig. 4에서 보듯이 두 상이한 등방성 이종재료 내의 정지 계면균열에서 $K_1/K_0=1, K_2/K_0=0$ 인 경우와 $K_1/K_0=0, K_2/K_0=1$ 인 경우 그리고 $K_1/K_0=0.7, K_2/K_0=0.3$ 인 경우와 $K_1/K_0=0.3, K_2/K_0=0.7$ 인 경우의 등색선 무늬 형태를 비교하여 보면, 등색선 무늬가 서로 반대 방향으로 기울어져 있으나, 완전히 대칭적인 형태는 아님을 볼 수 있다. 또한 K_1/K_0 비가 감소하고, K_2/K_0 비가 증가함에 따라 등색선 무늬는 차츰 시계 방향으로 기울어지며, 등색선 무늬의 개수는 감소하다가 다시 증가함을 볼 수 있다. $K_1/K_0=0.5, K_2/K_0=0.5$ 인 경우의 등색선 무늬형태는 단순인

Table 2 Material properties of specimen

Properties	Epoxy resin	Steel	Al 6061
Young's modulus, E(GPa)	3.20	200	70
Shear modulus, G(GPa)	1.16	78	26
Possion's ratio, ν	0.38	0.29	0.33
Thickness, t (mm)	6.0	6.0	6.0
Stress fringe value, f_σ (kN/m)	10.61		



(a) epoxy/aluminum bimaterial ($E_2/E_1 = 22.2$)



(b) epoxy/steel bimaterial ($E_2/E_1 = 62.5$)

$K_1/K_0 = 1.0$ $K_1/K_0 = 0.7$ $K_1/K_0 = 0.5$ $K_1/K_0 = 0.3$ $K_1/K_0 = 0.0$
 $K_2/K_0 = 0.0$ $K_2/K_0 = 0.3$ $K_2/K_0 = 0.5$ $K_2/K_0 = 0.7$ $K_2/K_0 = 1.0$

Fig. 4 Isochromatic fringes for two dissimilar isotropic bimaterials with the changing of the stress intensity factors

장하중을 받는 단일재료의 균열선단에서의 등색선 무늬형태(Fig. 2)와 비슷함을 볼 수 있다. 그리고 Fig. 4의 a)와 b)의 등색선 무늬를 비교하여 보면 탄성계수비의 차이에 의한 등색선 무늬의 변화는 미소함을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 두 상이한 등방성 이종재료내의 정지 계면 균열에 대한 선단 응력장과 변위장을 식 (19)와 같이 유도하였고, 그 유효성을 확인하였다.

(2) 두 상이한 등방성 이종재료내의 정지 계면 균열 선단의 응력확대계수를 식 (27)처럼 정의하였다.

(3) 본 연구의 결과로서 이종재료상수는 두 재료의 탄성계수비가 증가함에 따라 차츰 증가하다가 어느 값(약 0.1163)에 수렴한다.

(4) 본 연구에서 유도된 식 (19)는 정적 하중을 받는 단일 등방성체의 정지균열문제의 선단 응력장과 변위장의 해석에도 적용될 수 있다.

(5) 두 상이한 등방성 이종재료내의 정지계면균열에서 K_1/K_0 비가 감소하고, K_2/K_0 비가 증가함에 따라 등색선 무늬는 차츰 시계 방향으로 기울어지며, 등색선 무늬의 개수는 감소하다가 다시 증가함을 확인 하였다. 또한 탄성계수비의 차이에 의한 등색선 무늬의 변화는 미소함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(과제번호: R05-2001-000-01135-0)의 일부로써 수행된 것으로 지원에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Williams, M. L., 1959, "The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media," *Bulletin of the Seismological Society of American*, Vol. 49, pp. 199~204.

(2) Erdogan, F., 1965, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Crack," *J. Appl. Mech.* Vol. 32, pp. 403~410.

(3) England, A. H., 1965, "A Crack between Dissimilar Media," *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 400~402.

(4) Sih, G. C. and Rice, J. R., 1964, "The Bending of Plates Dissimilar Materials with Cracks," *J. Appl. Mech.* Vol. 86, pp. 477~482.

(5) Rice, J. R. and Sih, G. C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media," *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 418~423.

(6) Theocaris, P. S., 1974, "The Order of Singularity at a Multi-Wedge Corner of a Composite Plate," *Int. J. Fracture*, pp. 107-120.

(7) Huth, J. H., 1953, "The Complex Variable Approach to Stress Singularities," *J. Appl. Mech.*, Vol.75, pp. 561~562.

(8) Lin, K. Y. and Mar, J. W., 1976, "Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for Cacks at a Bi-Material Interface," *Int. J. Fracture*, pp. 521~531.

(9) Shin, D. C., Hawong, J. S. and Kwon, O. S., 2001, "A Study on the Development of the Dynamic Photoelastic Hybrid Method for Two Dissimilar Isotropic Bi-materials," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 25, No. 3, pp.434~442.

(10) Shin, D. C., Hawong, J. S. and Kim, T.G., 2001, "Development of the Dynamic Photoelastic Hybrid Method for Propagating Interfacial Crack of Isotropic/Orthotropic Bi-materials," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 25, No. 7, pp.1055~1063.

(11) Muskhelishvili, N. I., 1933, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," 1963, English translation, 4th Edition, *P. Noordhoff Ltd.*, Groningen, Netherlands.

(12) Aminpour, M. A. and Holsapple, K. A., 1990, "Near-Field Solutions for Propagating Cracks at the Interface of Dissimilar Anisotropic Elastic Materials," *Engr. Frac. Mech.*, Vol. 36, No. 1, pp. 93~103.

(13) Shin, D. C., Hawong, J. S., Lee, H. J., Nam, J. H. and Kwon, O. S., 1998, "Application of Transparant Photoelastic Experiment Hybrid Method to the Fracture Mechanics of Isotropic Material," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 22, No. 5, pp. 834~842.