

시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어

김성태[†], 장평훈*, 강상훈**

(2004년 2월 14일 접수, 2004년 10월 9일 심사완료)

Robust Backstepping Control Using Time Delay Estimation

Seong-Tae Kim, Pyung-Hun Chang and Sang-Hoon Kang

Key Words : Backstepping Control(백스테핑 제어), Time Delay Estimation(TDE: 시간 지연 추정), Robust Control(강인 제어), Strict feedback System, Lyapunov Stability(리아프노프 안정성), Uncertainty(불확실성)

Abstract

A controller is proposed for the robust backstepping control of a class of nonlinear multiple-input multiple-output (MIMO) systems which can be converted to a strict feedback form. The proposed robust backstepping control scheme follows a systematic procedure for the design of control laws and uses time delay estimation (TDE) to estimate the uncertainties such as parameter variations, unknown disturbances, and unmodeled dynamics, etc. The proposed controller can be also applied to nonlinear MIMO systems with unmatched uncertainties. Stability analysis of the closed-loop system which contains the plant and the proposed controller is also studied and hereby a sufficient stability condition for the closed-loop system is proposed. The simulation results show that the control scheme works well with uncertainties and the proposed stability condition is valid. The controller is experimentally verified on a single-link flexible arm to show the effectiveness of the proposed scheme in the complicated systems with uncertainties.

1. 서론

본 연구에서는 시간 지연 추정(Time Delay Estimation)⁽¹⁾을 이용함으로써 불확실성(uncertainty)에 대해 강인한 Backstepping 제어기를 제안하고자 한다.

Backstepping 기법⁽²⁾은 제어 입력의 설계 과정이 체계적이고 반복적이며, 정합 조건(matching condition)을 만족하지 않는 알려진 비선형성(nonlinearity)을 갖는 시스템에도 적용할 수 있다. 그러나 설계 과정에서 시스템의 비선형성에 대하여 정확하게 알아야 한다는 단점이 있다.

시스템의 정확한 동역학(dynamics)을 알아야 한

다는 Backstepping 기법의 단점을 보완하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. 불확실한 파라미터(parameter)를 갖는 시스템에 Backstepping 기법을 적용하기 위해 적응 제어(adaptive control)를 도입한 연구⁽³⁻⁵⁾가 있었고, 외란(disturbance)이나 모델링되지 않은 동역학(unmodeled dynamics)과 같은 non-parametric 불확실성을 갖는 시스템을 다루기 위해 Backstepping 에 강인 제어(robust control)를 도입한 연구가 있었다. 강인 Backstepping 제어 방법은 비선형 댐핑(nonlinear damping)이나 가변 구조(variable structure)를 이용한 연구⁽⁶⁻¹¹⁾가 있었는데, 이 방법은 불확실한 비선형성에 대해 어느 정도의 정보를 필요로 한다는 단점을 갖고 있다. 그러나, 현실적으로 불확실성에 대한 정보를 알기란 쉽지 않다.

한편, 시간 지연을 이용한 제어(Time Delay Control)⁽¹⁾는 플랜트의 예측 못한 외란이나 잘 모르는 비선형 동역학의 전체적인 양을 시간 지연 추정으로 보상하는 제어 기법이다. 시간 지연 추

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 대학원 기계공학과
E-mail : dreamer@mecha.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3266 FAX : (042)869-5226

* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 대학원 기계공학과

정은 샘플링 시간(sampling time)이 충분히 작다면 바로 전 샘플링 시간에서의 값들을 가지고 현재의 불확실성을 추정하는 방법인데, 이 방법은 구현이 간편하면서도 외란과 파라미터 변동(parameter variation)에 대하여 탁월한 강인성을 보인다.

본 연구에서는 불확실성에 대하여 강인한 Backstepping 제어를 구현하기 위해 시간 지연 추정을 Backstepping 기법에 결합한 제어 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 시간 지연 추정을 이용하여 제어에 필요한 시스템 정보를 알아내고, Backstepping 기법을 이용하여 전체 시스템이 리아프노프(Lyapunov) 안정성 조건을 만족하도록 제어 입력을 설계한다. 이 방법의 장점은 기존의 Backstepping 이 갖는 체계적인 제어 입력 설계가 가능하다는 것과 정확한 모델식이 불필요하다는 것, 그리고 파라미터 변동, 외란, 모델링 되지 않은 동역학과 같은 불확실성에 강인하다는 것이다.

본 연구에서는 strict feedback 형태로 표현되는 다중 입출력(Multiple-Input Multiple-Output: MIMO) 시스템에 대해 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어 기법을 제안하고, 제안한 제어 입력을 넣은 전체 폐루프 시스템에 대해 안정성 해석을 하여 안정하기 위한 충분조건을 유도하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2 장에서는 본 연구에서 다루게 될 시스템에 대한 기술과 Backstepping 에 대한 소개, 그리고, 시간 지연 추정에 대한 내용을 간략히 정리하였다. 3 장에서는 시간 지연 추정을 사용한 강인 Backstepping 제어기의 설계 과정을 상술하고, 설계한 제어 입력을 넣은 전체 폐루프 시스템의 안정성 조건을 간략히 언급하였다. 4 장에서는 3 장에서 제안한 제어 방법을 2 링크 유연 관절 로봇 시스템에 대해 모의 실험한 결과를 보인다. 5 장에서는 제안된 제어 법칙을 하나의 링크를 갖는 유연관절 시스템에 적용하여 실험한 결과를 보이고, 마지막으로 6 장에서는 결과를 요약 정리하고 결론을 맺는다.

2. 이론적 배경

2.1 적용 대상 시스템

물리적인 시스템을 제어하고자 할 때, 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 강인 제어는 매우 중요한 문제이다.

실제로 많은 물리적인 비선형 시스템은 다음과 같은 상태공간 방정식(state-space equation)으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + G_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + G_2(x_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i) + G_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + G_n(x_1, \dots, x_n)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x_i \in \mathcal{R}^m$ 는 플랜트를 표현하는 상태 변수(state variable), $u \in \mathcal{R}^m$ 는 플랜트에 들어가는 제어 입력(control input), 그리고 y 는 플랜트에서 나오는 출력(output)을 나타낸다. $f_i \in \mathcal{R}^m$, $G_i \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 는 파라미터의 불확실성(parametric uncertainty)과 non-parametric 불확실성을 모두 포함하는 비선형 함수이고, 식 (2)를 만족하는 x_1, x_2, \dots, x_i 의 C^∞ 함수라고 가정한다.

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_i) &= 0 \text{ if } (x_1, \dots, x_i) = (0, \dots, 0) \\ G_i(x_1, \dots, x_i) &\neq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_i) \in \mathcal{R}^{m \times i} \end{aligned} \quad (2)$$

많은 물리적인 시스템들은 위와 같은 형태로 표현이 가능하다.^(12,13) 예를 들면, 유연 관절(flexible joint)을 갖는 머니플레이터(manipulator), 브러시 DC 모터 시스템(brushed DC motor system), 로봇과 모터가 결합된 시스템, 파워 컨버터(power converters), 제트 엔진과 같은 시스템은 식 (2)의 조건을 만족하면서 식 (1)의 형태로 표현이 가능하다. 식 (1)과 같은 형태로 표현되는 시스템은 strict feedback 시스템⁽¹⁴⁾이라고 불리는데, 그 이유는 \dot{x}_i 의 식에 있는 비선형 항들인 f_i, G_i 가 “피드백”되는 상태 변수 x_1, \dots, x_i 의 함수로만 표현되기 때문이다.

본 연구에서는 비선형 시스템이 식 (1)과 같이 표현될 수 있는 경우를 다루고, 제어의 목적은 시스템의 출력 y 가 임의의 원하는 궤적(desired trajectory) y_d 을 추종하도록 하는 것이다. 예를 들어, 로봇 머니플레이터를 제어하는 경우에 y 는 로봇의 관절각(joint angle)에 해당한다.

2.2 Backstepping 제어⁽²⁾

Backstepping 제어는 리아프노프 함수에 기초한 설계 방법의 하나로써, 주된 아이디어는 전체 시스템을 원하는 서브 시스템을 가지는 형태로 생각한 후, 각 서브 시스템에 top-down 방식으로 제어 설계를 하는 것이다. Backstepping 제어는 설계 과정에서 리아프노프 함수를 만들고 이 리아프노프 함수를 이용하여 체계적으로 비선형 시스템의 안정성을 보장할 수 있도록 설계할 수 있으며, 시스

템에 유용한 비선형 항들을 설계 과정에서 이용할 수 있다는 장점을 가진다. 또한 설계 과정이 체계적이고 반복적이며, 비선형 댐핑(nonlinear damping) 기법을 이용하면 파라미터 또는 상태변수 추정기가 결합된 복잡한 비선형 시스템을 다루는 것도 가능하다.

2.3 시간 지연 추정⁽¹⁾

다음의 비선형 미분 방정식으로 표현되는 플랜트를 생각해 보자.

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) \cdot u + d(t) \quad (3)$$

여기서, $x \in \mathbb{R}^n$ 는 플랜트의 상태 벡터(state vector), $u \in \mathbb{R}^r$ 는 입력 벡터(input vector), $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ 는 모르는 플랜트 동역학을 포함하는 비선형 벡터, $g(x, t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 는 입력 계수 행렬, 그리고 $d(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 모르는 외란 벡터를 나타낸다.

입력 계수 행렬 $g(x, t)$ 의 알려진 범위를 나타내는 상수 행렬(constant matrix) \hat{g} 을 식 (3)에 도입하면, 식 (3)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t) \cdot u + d(t) \\ &= \hat{g} \cdot u + [f(x, t) + \{g(x, t) - \hat{g}\} \cdot u + d(t)] \\ &= \hat{g} \cdot u + H(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $H(t)$ 는 모르는 외란과 플랜트의 불확실성을 포함하는 전체 불확실성(total uncertainty)을 나타내고, 다음과 같이 표현된다.

$$H(t) = f(x, t) + \{g(x, t) - \hat{g}\} \cdot u + d(t) \quad (5)$$

문제는 시스템의 전체 불확실성을 나타내는 $H(t)$ 를 구하는 것이다. 여기서 충분히 작은 시간 지연(time delay) L 을 생각한다. 그러면 $H(t)$ 를 직접 계산하는 대신 시간 지연 추정을 이용하여 바로 전에 샘플링한 값인 $H(t-L)$ 로 $H(t)$ 를 추정할 수 있다. 그러면 정확한 플랜트 모델을 알아야 하는 문제가 줄어들고, 실시간으로 계산해야 하는 양이 효율적으로 감소하는 장점이 있다. 즉, 시간 지연 L 이 충분히 작다면, 다음과 같은 근사식이 성립한다.

$$H(t) \approx H(t-L) = \hat{H}(t) = \dot{x}(t-L) - \hat{g} \cdot u(t-L) \quad (6)$$

시간 지연 추정이 얼마나 제대로 원래의 값을 추정하는가 하는 것은 페루프 시스템이 비선형성, 모델링되지 않은 동역학, 외란 등에 얼마나 강인한가를 결정한다. 이러한 시간 지연 추정의 효율성에 가장 중요한 요소가 시간 지연 L 이다. 정성적으로 말하자면, 시간 지연 L 은 $H(t)$ 가 연속적이라는 가정이 유효하도록 선정되어야 한다. 이

말은 $H(t)$ 가 시스템의 비선형성과 외란으로 구성 되어 있으므로, L 은 시스템에 포함된 비선형 동역학과 외란의 bandwidth 보다 더 빠른 bandwidth 가 되도록 선정되어야 한다. 일반적으로 L 은 샘플링 시간(sampling time)으로 선정된다.

3. 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어기 설계 및 해석

3.1 제어 입력 설계

일반적인 Backstepping 기법을 이용하여 제어 입력을 설계하는 경우에는 플랜트에 대해 정확한 모델이 필요하다. 그러나 이는 외란, 또는 모델링 오차와 같은 불확실성이 존재할 때, 기존의 Backstepping 방법의 적용에 결정적인 제약 조건이 된다. 이러한 Backstepping 방법의 단점을 보완하기 위해, 본 연구에서는 시간 지연 추정을 이용하여 불확실성에 대해 강인한 Backstepping 제어기의 설계 방법을 제안하고자 한다.

시간 지연 추정을 이용한 Backstepping 제어기 설계의 아이디어는 다음과 같다.

첫째, (1)의 각각의 서브 시스템에 대해 x_2 부터 x_n 까지를 가상의 제어 입력으로 생각한다. 실제 상태 변수와 구분하기 위해 가상의 제어 입력을 x_{id} ($i=2, \dots, n$) 라 놓고 x_{id} 를 설계하는데, x_{i-1} 과 $x_{(i-1)d}$ 사이의 오차가 0 으로 수렴하도록 리아프노프 함수를 이용하여 x_{2d} 부터 x_{nd} 까지 차례대로 설계한다.

둘째, x_n 과 x_{nd} 사이의 오차가 0 으로 수렴하도록 실제 제어 입력 u 를 설계한다. 가상의 제어 입력 x_{id} 와 실제 제어 입력 u 를 설계하는 각각의 단계에서는 시스템의 비선형성, 불확실성, 외란 등을 추정하기 위해 시간 지연 추정을 이용한다.

셋째, 전체 페루프 시스템의 안정성 조건을 만족하도록 입력에 필요한 값들을 정해 준다.

시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어를 설계하기 위해, m 개의 입력과 출력을 가진 strict feedback 시스템을 표현하는 식 (1)의 상태 공간 방정식을 고려한다. 식 (1)에서 f_i, G_i 는 파라미터의 불확실성(parametric uncertainty)과 non-parametric 불확실성을 포함하는 비선형항이고, 식 (2)를 만족하는 x_1, x_2, \dots, x_i 의 C^∞ 함수라고 가정한다.

그리고, 식 (1)에서 $f_i(\cdot), G_i(\cdot)$, ($i=1, \dots, n-1$) 가 불확실성을 포함하는 경우 이 시스템은 정합 조건

(matching condition)을 만족하지 않는다.

시간 지연 추정을 이용하기 위해 식 (1)을 식 (7)과 같이 정리한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_1 + \hat{G}_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= h_2 + \hat{G}_2 x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= h_i + \hat{G}_i x_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= h_n + \hat{G}_n u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$h_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_i) + G_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1} - \hat{G}_i x_{i+1} \quad \text{for } i=1, \dots, n-1$$

$$h_n(t) = f_n(x_1, \dots, x_n) + G_n(x_1, \dots, x_n)u - \hat{G}_n u$$

시스템의 모델과 불확실성을 추정하기 위해 식 (8)과 같이 시간 지연 추정을 이용한다.

$$\begin{aligned} h_i(t) &\approx h_i(t-L) = \dot{x}_i(t-L) - \hat{G}_i x_{i+1}(t-L) \\ h_n(t) &\approx h_n(t-L) = \dot{x}_n(t-L) - \hat{G}_n u(t-L) \end{aligned} \quad (8)$$

그리고 시간 지연 추정을 이용할 때 발생하는 오차를 다음과 같이 δ_i 로 정의한다.

$$h_i(t) - h_i(t-L) \triangleq \delta_i \quad \text{for } i=1, \dots, n$$

f_i, G_i 가 x_1, x_2, \dots, x_i 의 C^∞ 함수라든 가정으로 부터 시간 지연 추정 오차 δ_i 의 놈(norm)은 임의의 양수 δ_{IM} 에 의해 한정(bounded)된다.

$$\|\delta_i\| < \delta_{IM} \quad \text{for } i=1, \dots, n$$

이제 식 (1)의 시스템에 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어를 설계한다. 전체적인 제어기의 구조는 Fig. 1 과 같다. 제어 목적은 시스템의 출력 y 가 임의의 원하는 궤적 y_d 를 추종하도록 하는 것이다.

Step 1 - 먼저 식 (1)의 첫번째 식에서 x_2 를 가상적인 입력으로 보고, 가상 입력 x_{2d} 를 설계한다.

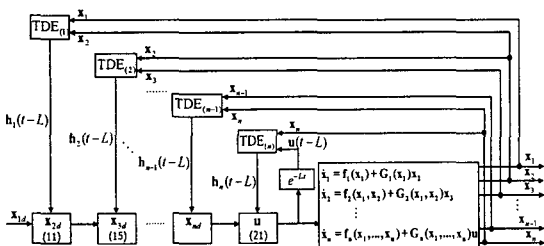


Fig. 1 Backstepping control using TDE of nonlinear systems in the "strict feedback" form

식 (1)의 첫번째 식을 써 보면,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + G_1(x_1)x_2$$

x_{2d} 를 설계하기 위해 y 와 y_d 사이의 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$e_1 \triangleq y_1 - y_{1d}$$

그리고, 리아프노프 함수 후보(Lyapunov function candidate)를 다음과 같이 정의한다.

$$V_1 \triangleq \frac{1}{2} e_1^T e_1 \quad (9)$$

식 (9)를 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (\dot{y} - \dot{y}_d) = e_1^T (h_1 + \hat{G}_1 x_2 - \dot{y}_d) \quad (10)$$

식 (10)에서 \dot{V}_1 의 negative definiteness 를 보장하기 위해 x_2 를 가상적인 입력으로 생각하여 식 (11)과 같이 설계한다.

$$x_{2d} = \hat{G}_1^{-1}(-h_1 + \dot{y}_d - C_1 e_1) \quad (11)$$

여기서, C_1 은 $m \times m$ 양한정 행렬(positive definite matrix)로서 설계 파라미터(design parameter)이고, \hat{G}_1 은 다음 절에서 다루는 안정성 기준에 맞게 G_1 에 기초하여 선정되는 상수행렬이며, $h_1(t)$ 는 식 (8)로 시간 지연 추정을 한 $h_1(t) \approx h_1(t-L)$ 을 이용한다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1^T (\delta_1 - C_1 e_1) = -e_1^T C_1 e_1 + e_1^T \delta_1 \\ &\leq -\lambda_{1min} \|e_1\|^2 + \delta_{1M} \|e_1\| = \|e_1\| (\delta_{1M} - \lambda_{1min} \|e_1\|) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, λ_{1min} 은 C_1 의 최소 고유치(minimum eigenvalue)를 나타내고, C_1 을 다음과 같이 선정하면 \dot{V}_1 의 negative definiteness 를 보장할 수 있다.

$$\lambda_{1min} > \frac{\delta_{1M}}{\|e_1\|}$$

그러나 시스템의 상태 변수 x_2 와 우리가 가상적인 입력으로 설계한 x_{2d} 사이에는 오차가 존재하게 되고, Backstepping 설계의 다음 단계에서는 이 오차가 0으로 수렴하도록 x_{3d} 를 설계한다.

Step 2 - 식 (1)의 두번째 식에서 x_3 를 가상적인 입력으로 보고, x_2 와 x_{2d} 사이의 오차가 0으로 수렴하도록 가상 입력 x_{3d} 를 설계한다.

다음과 같이 x_2 와 x_{2d} 사이의 오차를 정의한다.

$$e_2 \triangleq \hat{G}_1(x_2 - x_{2d}) = \hat{G}_1 x_2 + h_1 - \dot{y}_d + C_1 e_1$$

그리고, 리아프노프 함수 후보를 다음과 같이

정의한다.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 \quad (13)$$

식 (13)을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_2^T \dot{\mathbf{e}}_2 \\ &= \mathbf{e}_1^T (\mathbf{e}_2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1) \\ &\quad + \mathbf{e}_2^T [\widehat{\mathbf{G}}_1 (\mathbf{h}_2 + \widehat{\mathbf{G}}_2 \mathbf{x}_3) + \dot{\mathbf{h}}_1 - \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{e}}_1] \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 \dot{V}_2 의 negative definiteness 를 보장하기 위해 \mathbf{x}_3 를 가상적인 입력으로 생각하여 식 (15)와 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{3d} &= (\widehat{\mathbf{G}}_1 \widehat{\mathbf{G}}_2)^{-1} (\dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \widehat{\mathbf{G}}_1 \mathbf{h}_2 - \dot{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 \mathbf{C}_2 는 $m \times m$ 양한정 행렬로서 설계 파라미터이고, $\widehat{\mathbf{G}}_2$ 은 다음 절의 안정성 기준에 맞게 \mathbf{G}_2 에 기초하여 선정되는 상수행렬이며, $\mathbf{h}_2(t)$ 는 식 (8)로 시간 지연 추정을 한 $\mathbf{h}_2(t) \approx \mathbf{h}_2(t-L)$ 를 이용한다. 식 (15)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \mathbf{e}_1^T (\delta_1 - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2^T (\widehat{\mathbf{G}}_1 \delta_2 - \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_2) \\ &\leq -\lambda_{1\min} \|\mathbf{e}_1\|^2 + \delta_{1M} \|\mathbf{e}_1\| - \lambda_{2\min} \|\mathbf{e}_2\|^2 + \delta_{2M} \|\mathbf{e}_2\| \|\widehat{\mathbf{G}}_1\| \\ &= \|\mathbf{e}_1\| (\delta_{1M} - \lambda_{1\min} \|\mathbf{e}_1\|) + \|\mathbf{e}_2\| (\|\widehat{\mathbf{G}}_1\| \delta_{2M} - \lambda_{2\min} \|\mathbf{e}_2\|) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $\lambda_{2\min}$ 은 \mathbf{C}_2 의 최소 고유치를 나타내고, \mathbf{C}_2 를 다음과 같이 선정하면 \dot{V}_2 의 negative definiteness 를 보장할 수 있다.

$$\lambda_{2\min} > \frac{\|\widehat{\mathbf{G}}_1\| \delta_{2M}}{\|\mathbf{e}_2\|}$$

⋮

Step (n-1) - 식 (1)의 (n-1) 번째 식에서 \mathbf{x}_n 을 가상적인 입력으로 보고, \mathbf{x}_{n-1} 와 $\mathbf{x}_{(n-1)d}$ 사이의 오차가 0 으로 수렴하도록 마지막 단계의 가상 입력 \mathbf{x}_{nd} 를 설계한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(n)d} &= \mathbf{x}_n(t-L) - (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{n-1})^{-1} [\mathbf{y}^{(n-1)}(t-L) - \mathbf{y}_d^{(n-1)} \\ &\quad + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1^{(n-2)} + \mathbf{e}_1^{(n-3)} + \cdots + \mathbf{C}_{n-2} \dot{\mathbf{e}}_{n-2} + \mathbf{e}_{n-2} + \mathbf{C}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}] \end{aligned}$$

여기서 \mathbf{C}_{n-1} 는 $m \times m$ 양한정 행렬로서 최소 고유치 $\lambda_{(n-1)\min}$ 이 다음 조건을 만족하도록 선정한다.

$$\lambda_{(n-1)\min} > \frac{\|\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{n-2}\| \delta_{(n-1)M}}{\|\mathbf{e}_{n-1}\|}$$

Step n - 시스템의 상태 변수 \mathbf{x}_n 이 가상적인 입력으로 설계한 \mathbf{x}_{nd} 를 추종하도록 하기 위한 실제 제어 입력 \mathbf{u} 를 설계한다.

다음과 같이 \mathbf{x}_n 와 \mathbf{x}_{nd} 사이의 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &\triangleq (\widehat{\mathbf{G}}_1 \widehat{\mathbf{G}}_2 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{n-1}) (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{nd}) \\ &= \dot{\mathbf{e}}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_{n-2} \end{aligned} \quad (17)$$

그리고, 리아프노프 함수 후보를 다음과 같이 정의한다.

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \quad (18)$$

식 (18)을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + \mathbf{e}_n^T \dot{\mathbf{e}}_n \\ &= -\mathbf{e}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_2 - \cdots - \mathbf{e}_{n-2}^T \mathbf{C}_{n-2} \mathbf{e}_{n-2} \\ &\quad - \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{C}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n^T [(\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_n) \mathbf{u} + (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{n-1}) \mathbf{h}_n \\ &\quad + (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{n-2}) \dot{\mathbf{h}}_{n-1} + \cdots + \mathbf{h}_1^{(n-1)} + \mathbf{e}_1^{(n-2)} + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1^{(n-1)} \\ &\quad + \mathbf{e}_2^{(n-3)} + \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_2^{(n-2)} + \cdots + \dot{\mathbf{e}}_{n-2} + \mathbf{C}_{n-2} \dot{\mathbf{e}}_{n-2} + \mathbf{e}_{n-1} \\ &\quad + \mathbf{C}_{n-1} \dot{\mathbf{e}}_{n-1} - \mathbf{x}_{nd}^{(n)}] \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 실제 입력이 나타나므로, \dot{V}_n 의 negative definiteness 를 보장하기 위해 실제 입력 \mathbf{u} 를 식 (20)과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -(\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_n)^{-1} [\mathbf{e}_1^{(n-2)} + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1^{(n-1)} + \cdots \\ &\quad + \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1} \dot{\mathbf{e}}_{n-1} + \mathbf{C}_n \mathbf{e}_n - \mathbf{x}_{nd}^{(n)}] - \widehat{\mathbf{G}}_n^{-1} \mathbf{h}_n \\ &\quad - (\widehat{\mathbf{G}}_1 \widehat{\mathbf{G}}_{n-1})^{-1} \dot{\mathbf{h}}_{n-1} - \cdots - (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_n)^{-1} \mathbf{h}_1^{(n-1)} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{e}_i ($i=1, \dots, n$) 은 각 단계에서 나타나는 가상적인 입력 \mathbf{x}_{id} 와 시스템의 상태 변수 \mathbf{x}_i 와의 오차를 나타내는 변수가 되며, \mathbf{C}_n 는 $m \times m$ 양한정 행렬로서 설계 파라미터이고, $\widehat{\mathbf{G}}_n$ 은 안정성 기준에 맞게 \mathbf{G}_n 에 기초하여 선정되는 상수행렬이며, \mathbf{h}_i , ($i=1, \dots, n$) 는 식 (8)로 시간 지연 추정을 한 $\mathbf{h}_i(t-L)$, ($i=1, \dots, n$) 를 이용하여 정리하면 결국 최종적인 실제 제어 입력 \mathbf{u} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}(t-L) + (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_n)^{-1} [-\mathbf{y}^{(m)}(t-L) + \mathbf{y}_d^{(n)}] \\ &\quad + (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_n)^{-1} [-\mathbf{e}_1^{(n-2)} - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1^{(n-1)} - \cdots - \mathbf{e}_{n-1} \\ &\quad - \mathbf{C}_{n-1} \dot{\mathbf{e}}_{n-1} - \mathbf{C}_n \mathbf{e}_n] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\widehat{\mathbf{G}}_i$ 항들은 결정되어야 할 상수행렬들을 나타내고, 오차에 관련된 항들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1d} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \\ \mathbf{e}_i &= (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{i-1}) [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{id}], \quad (i=2, \dots, n) \\ &= (\widehat{\mathbf{G}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{G}}_{i-1}) [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(t-L)] + \mathbf{y}^{(i-1)}(t-L) - \mathbf{y}_d^{(i-1)} \\ &\quad + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1^{(i-2)} + \mathbf{e}_1^{(i-3)} + \cdots + \mathbf{C}_{i-2} \dot{\mathbf{e}}_{i-2} + \mathbf{e}_{i-2} + \mathbf{C}_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} \end{aligned} \quad (22)$$

식 (21)을 식 (19)에 대입하여 정리하면 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \mathbf{e}_1^T (\delta_1 - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1) + \dots + \mathbf{e}_n^T (\hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{n-1} \delta_n - \mathbf{C}_n \mathbf{e}_n) \\ &\leq -\lambda_{1\min} \|\mathbf{e}_1\|^2 - \dots - \lambda_{n\min} \|\mathbf{e}_n\|^2 \\ &\quad + \delta_{1M} \|\mathbf{e}_1\| + \dots + \delta_{nM} \|\mathbf{e}_n\| \|\hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{n-1}\| \\ &= \|\mathbf{e}_1\| (\delta_{1M} - \lambda_{1\min} \|\mathbf{e}_1\|) \\ &\quad + \dots + \|\mathbf{e}_n\| (\|\hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{n-1}\| \delta_{nM} - \lambda_{n\min} \|\mathbf{e}_n\|) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $\lambda_{n\min}$ 은 \mathbf{C}_n 의 최소 고유치를 나타내고, \mathbf{C}_n 를 다음과 같이 선정하면 \dot{V}_n 의 negative definiteness 를 보장할 수 있다.

$$\lambda_{n\min} > \frac{\|\hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_{n-1}\| \delta_{nM}}{\|\mathbf{e}_n\|}$$

3.2 안정성 해석 - 안정하기 위한 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 의 선정

제안된 Backstepping 설계 방법은 리아프노프 안정성에 기초하여 설계가 되지만, 시간 지연 추정으로 인한 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들의 선정이 안정성을 좌우할 수 있다. 본 절에서는 전체 시스템이 안정하기 위해 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들이 만족해야 하는 조건에 대해 언급하고자 한다. 본 절의 안정성 해석은 K. Youcef-Toumi 의 시간 지연을 이용한 제어(Time Delay Control)에 대한 안정성 조건의 증명 과정(15)을 참고하였으며, 증명 과정의 서술이 너무 길어서 여기서는 그 결과만을 간단히 기술하도록 한다.

원하는 궤적 y_d 가 n 번까지 미분이 가능하도록 선정한다고 가정할 때 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어 시스템이 안정하기 위한 충분조건은 다음과 같다.(16)

안정성 기준

식 (1)의 플랜트에 식 (21)의 제어 법칙을 사용하고, 다음의 조건이 만족되도록 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들을 선정한다면, 충분히 작은 시간 지연 L 과 충분히 큰 양의 정수 k 에 대해 시스템의 출력 y 는 원하는 궤적 y_d 를 추종할 수 있다.

즉, $L \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 일 때 $y(k) \rightarrow y_d(k)$ 이다.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \mathbf{G}_{1(k)} \hat{\mathbf{G}}_1^{-1}\| &\leq a < 1 \\ \|\mathbf{I} - \mathbf{G}_{2(k)} (\hat{\mathbf{G}}_1 \hat{\mathbf{G}}_2)^{-1} \mathbf{G}_{1(k)}\| &\leq b < 1 \\ &\vdots \\ \|\mathbf{I} - \mathbf{G}_{n(k)} (\hat{\mathbf{G}}_1 \dots \hat{\mathbf{G}}_n)^{-1} \mathbf{G}_{1(k)} \dots \mathbf{G}_{n-1(k)}\| &< 1 \end{aligned} \quad (24)$$

for $k > N$ (N being some positive integer)

□

4. 모의 실험

3 장에서 strict feedback 시스템에 대하여 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어 법칙을 유도하였고, 이때 전체 시스템이 안정하기 위한 기준을 제시하였다.

이번 장에서는 3 장에서 제시한 안정성 기준을 만족하도록 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들을 선정하여 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어를 적용하였을 때 안정한 응답을 보이는지 모의 실험을 통하여 살펴 보도록 한다. 대상 시스템은 두 개의 입력과 출력을 갖는 2 링크 유연 관절 로봇 시스템이다.

본 모의 실험에서는 시스템을 strict feedback 형태로 변환하여, 식 (21)를 이용하여 제어 입력을 설계하고, $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들을 선정할 때는 식 (24)의 안정성 조건을 이용한다.

4.1 2 링크 유연 관절 로봇 시스템

Fig. 2 와 같은 두 개의 입력과 출력을 갖는 2 링크 유연 관절 로봇(two-link flexible joint robot)을 대상플랜트로 고려하자. 유연 관절 로봇의 동역학식은 다음과 같이 표현할 수 있다.(17)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{K}(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) &= \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{q} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, \mathbf{u} 는 $n \times 1$ 입력 벡터, \mathbf{q} 는 $n \times 1$ 링크 변위 벡터, \mathbf{q}_m 은 $n \times 1$ 구동기 변위 벡터를 나타내고, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 는 $n \times n$ 링크 관성행렬(inertia matrix), $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 은 코리올리력(Coriolis force), 원심력, 중력, 감쇠력 그리고 마찰력을 나타내는 $n \times 1$ 벡터이다. 그리고, \mathbf{K} 는 $n \times n$ 대각상수행렬로서 양한정(positive-definite) 관절 유연성(joint flexibility) 행렬, \mathbf{J} 는 $n \times n$ 대각상수행렬로서 양한정 구동기 관성행렬 그리고 \mathbf{B} 는 $n \times n$ 대각상수행렬로서 양한정 구동기 감쇠행렬을 나타낸다.

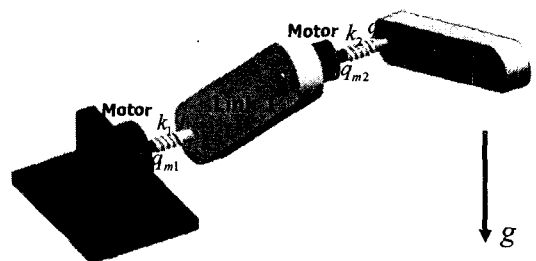


Fig. 2 Two-link flexible joint system

이 절의 대상플랜트는 2 링크 유연관절 로봇으로서 식 (25)에서 강체 링크의 동역학 식은 평면 2 자유도 머니플레이터⁽¹⁸⁾를 취하였고 $\mathbb{J} = 0.5\mathbb{I}_{2 \times 2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, $\mathbb{B} = \mathbb{I}_{2 \times 2} \text{ Nm} \cdot \text{s/rad}$ 그리고 $\mathbb{K} = 10\mathbb{I}_{2 \times 2} \text{ Nm/rad}$ 을 각각 취하였다.

식 (25)를 상태 공간 방정식으로 표현하기 위하여 다음과 같이 상태 변수들을 정의한다.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_m, \quad \mathbf{x}_4 = \dot{\mathbf{q}}_m$$

위의 상태 변수들을 이용하여 식 (25)를 Strict feedback 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{V}\mathbf{x}_2 + \mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{x}_1] + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{x}_4 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 &= -\mathbf{J}^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{x}_4 + \mathbf{K}\mathbf{x}_3 + \mathbf{K}\mathbf{x}_1] + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (26)$$

이때, 원하는 궤적을 $\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} \sin \pi t \\ \sin \pi t \end{bmatrix}$ 로 하고, 3.1 절에서 제안한 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어기 설계 방법을 이용한 제어 입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}(t-L) + (\hat{\mathbf{G}}_1 \hat{\mathbf{G}}_2 \hat{\mathbf{G}}_3 \hat{\mathbf{G}}_4)^{-1} [-\mathbf{y}^{(4)}(t-L) + \mathbf{y}_d^{(4)} \\ &\quad - \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{C}_2 \ddot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{C}_3 \dot{\mathbf{e}}_3 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{C}_4 \mathbf{e}_4] \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $\hat{\mathbf{G}}_1 = \hat{\mathbf{G}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 으로 놓고, 식 (27)의 입력에 필요한 설계 변수들은 다음과 같이 주었다.

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_4 = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이때, 샘플링 시간은 0.001sec 로 하고, $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들이 식 (24)의 조건식을 만족하는 경우와 만족하지 않는 2 가지 경우에 대하여 모의 실험을 하였다.

4.1.1 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들이 식 (24)의 조건식을 만족하도록 선정한 경우
다음과 같이 $\hat{\mathbf{G}}_2, \hat{\mathbf{G}}_4$ 을 선정한다.

$$\hat{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

이때, 안정성 조건을 도시한 그래프는 Fig. 3 과 같다. Fig. 3에서 확인할 수 있는 것처럼 $\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{G}}_2^{-1}\| < 0.932$, $\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_4 (\hat{\mathbf{G}}_2 \hat{\mathbf{G}}_4)^{-1} \mathbf{G}_2\| < 0.955$ 이 되어 안정성 조건을 만족함을 알 수 있다.

이 경우 Fig. 4에서 보듯이 안정 조건을 만족하는 $\hat{\mathbf{G}}_2, \hat{\mathbf{G}}_4$ 에 대해서 전체 시스템의 응답이 안정

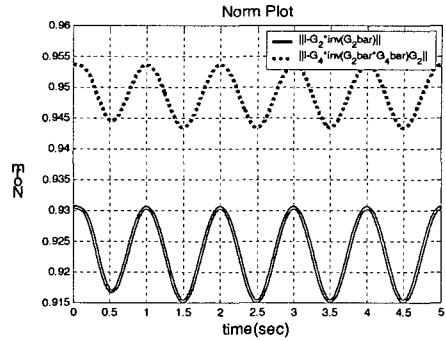


Fig. 3 Plot of $\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{G}}_2^{-1}\|, \|\mathbf{I} - \mathbf{G}_4 (\hat{\mathbf{G}}_2 \hat{\mathbf{G}}_4)^{-1} \mathbf{G}_2\|$

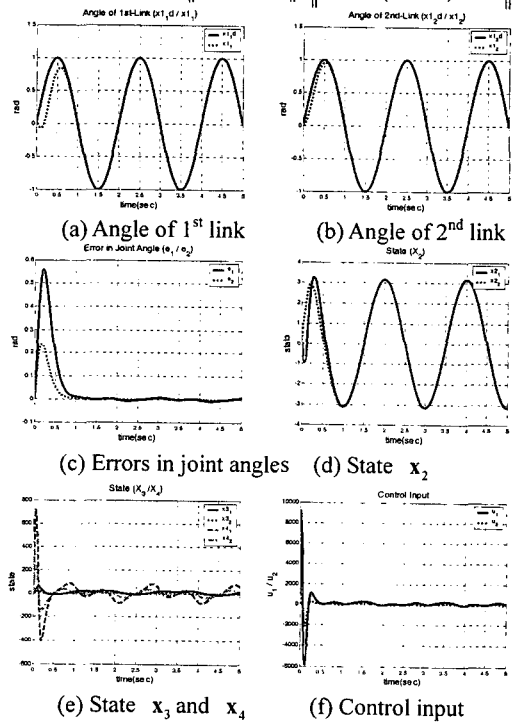


Fig. 4 Simulation results for satisfying stability condition

하고, 시스템의 출력이 원하는 궤적을 제대로 추종함을 알 수 있다.

4.1.2 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 항들이 식 (24)의 조건식을 만족하지 않도록 선정한 경우
다음과 같이 $\hat{\mathbf{G}}_2, \hat{\mathbf{G}}_4$ 을 선정한다.

$$\hat{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_4 = \begin{bmatrix} 1.99 & 0 \\ 0 & 1.99 \end{bmatrix}$$

이때, 안정성 조건을 도시한 그래프는 Fig. 5와 같다. Fig. 5에서 확인할 수 있는 것처럼 $\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{G}}_2^{-1}\| > 1$, $\|\mathbf{I} - \mathbf{G}_4 (\hat{\mathbf{G}}_2 \hat{\mathbf{G}}_4)^{-1} \mathbf{G}_2\| > 1$ 이 되어 안

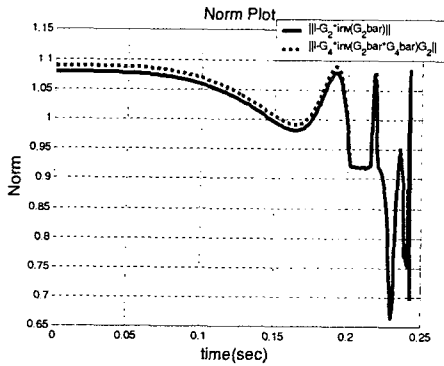


Fig. 5 Plot of $\|I - G_2 \hat{G}_2^{-1}\|$, $\|I - G_4 (\hat{G}_2 \hat{G}_4)^{-1} G_2\|$

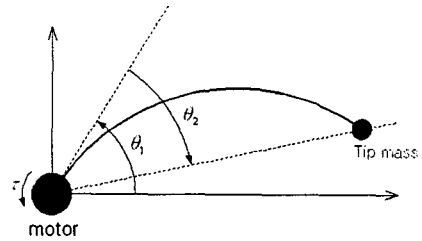


Fig. 7 Clamp-free model of flexible arm

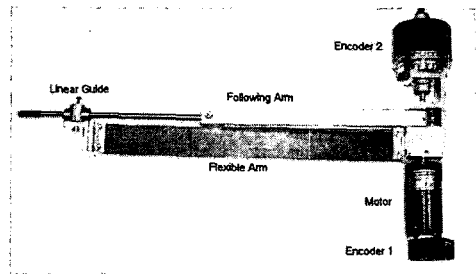


Fig. 8 One-link flexible arm

5. 실험

본 논문에서 제안한 제어기의 성능을 검증해보기 위하여, 하나의 링크를 갖는 유연팔(One-link Flexible Arm)로 이루어진 시스템을 대상으로 실험을 수행하였다. 5.1 절에서는 플랜트 모델에 대해 설명하고, 5.2 절에서는 제어 입력 설계하는 방법을 설명한다. 5.3 절에서는 안정성 조건을 확인하기 위해 파라미터 추정(parameter estimation) 방법을 이용하여 실험 장치의 선형화된 모델을 구한 것을 언급하고, 5.4 절에서는 실험 결과를 보였다.

5.1 플랜트 모델(Plant Model)

실험 대상 플랜트는 하나의 유연한 링크로 이루어진 팔(One Link Flexible Arm)이다⁽¹⁹⁾.

여기서는 대상 플랜트를 Fig. 7 과 같이 Clamp-Free Model 로 선정하였다. 유연팔 시스템은 비선형 시스템이며 그 모델링은 매우 복잡하다. 이때 몇번째 모드(mode)까지 고려하느냐에 따라 상태 변수의 개수가 달라지는데, 1 차 모드만을 고려하여 모델링하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\delta_1) & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta_1, \delta_1, \dot{\delta}_1) \\ g_2(\theta_1, \delta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서, $\delta_1(t)$ 는 첫번째 모드의 시간에 따른 진폭(time-varying amplitude of the 1st mode)을 나타내고, θ_1 은 모터각을 나타낸다.

식 (28)에서 보는 것처럼 유연팔 시스템은 비선형성이 강한 시스템이다. 특히 고려하는 모드의 수가 늘어날수록 비선형성은 더욱 복잡해진다.

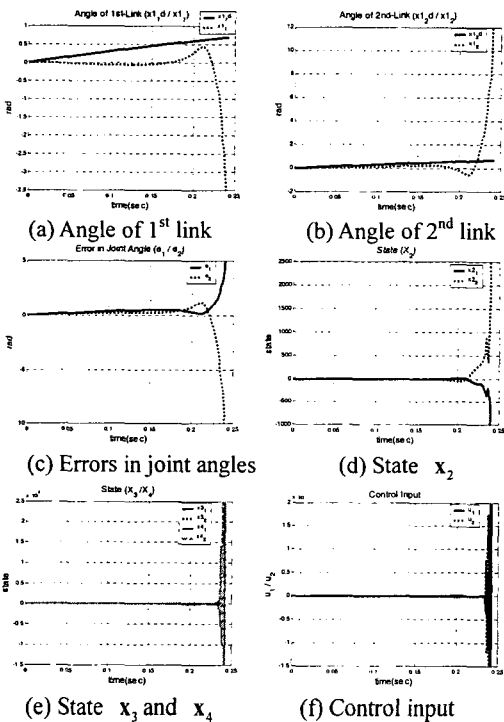


Fig. 6 Simulation results for unsatisfying stability condition

정성 조건을 만족하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 6 에서 보듯이 안정조건을 만족하지 않는 \hat{G}_2 , \hat{G}_4 에 대해서 상태 변수들이 발산하고, 전체 시스템이 불안정한 응답을 보이는 것을 알 수 있다.

이상의 모의 실험 결과로부터 본 연구에서 제안한 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어기가 제대로 작동하고, 제안한 안정성 기준은 강인 Backstepping 제어기를 안정하게 설계할 수 있는 기준을 제시한다고 할 수 있다.

식 (28)을 $\ddot{\theta}_1$ 과 $\dot{\delta}_1$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\delta}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D(\delta_1)} \begin{bmatrix} -M_{22}g_1(\dot{\theta}_1, \delta_1, \dot{\delta}_1) + M_{12} \{g_2(\dot{\theta}_1, \delta_1) + k\delta_1\} + M_{22}\tau \\ M_{21}g_1(\dot{\theta}_1, \delta_1, \dot{\delta}_1) - M_{11}(\delta_1) \{g_2(\dot{\theta}_1, \delta_1) + k\delta_1\} - M_{21}\tau \end{bmatrix}$$

where $D(\delta_1) = M_{11}(\delta_1)M_{22} - M_{12}M_{21}$

(29)

5.2 제어 입력 설계

제어하고자 하는 시스템의 출력은 모터의 회전 각 θ_1 이다. 상태 변수를 $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1$ 라 하고, 식 (29)를 우리가 적용 대상으로 하는 strict feedback 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-2M_{22}M_L\phi(1)^2\delta_1(t)\dot{\delta}_1(t)x_2 - M_{12}M_L\phi(1)^2\delta_1(t)x_2^2}{D(\delta_1)} \\ &\quad + \frac{M_{22}}{D(\delta_1)}\tau + \frac{M_{12}k}{D(\delta_1)}\delta_1(t) \end{aligned}$$

(30)

$$y = x_1$$

where ϕ : eigenfunction expressing the displacement of the 1st mode of link deflection

식 (30)을 식 (1)과 비교해 보면,

$$f_1 = 1, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{M_{22}}{D(\delta_1)},$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{D(\delta_1)} [-2M_{22}M_L\phi(1)^2\delta_1(t)\dot{\delta}_1(t)x_2 \\ &\quad - M_{12}M_L\phi(1)^2\delta_1(t)x_2^2] \end{aligned}$$

여기서 f_2, g_2 는 시간에 따라 변하는 값 $\delta_1(t)$ 를 포함하는 비선형 함수이고 f_2, g_2 에 포함된 파라미터들은 정확한 값을 모르기 때문에 파라미터 불확실성을 갖는다. 그리고, strict feedback 형태로 표현하면서 $f_i, g_i (i=1,2)$ 로 표현되지 않는 항인

$\frac{M_{12}k}{D(\delta_1)}\delta_1(t)$ 는 외란으로 플랜트에 영향을 주며, 고

차 모드도 포함하는 대상 플랜트를 1 차 모드까지만 고려하면서 모델링되지 않은 동역학은 non-parametric 불확실성으로 플랜트에 영향을 준다.

이와 같이 대상 플랜트는 파라미터의 불확실성, non-parametric 불확실성, 외란 등의 불확실성을 포함하는 시스템이며 본 연구에서 제안한 제어 방법은 이러한 불확실성을 시간 지연 추정을 이용하여 추정하도록 한다.

3.1 절에서 제안한 방법을 적용하여 시간 지연 추정을 이용한 강인 Backstepping 제어 입력을 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t-L) + (\hat{g}_1\hat{g}_2)^{-1} [-\ddot{y}(t-L) + \ddot{y}_d(t) \\ &\quad - c_1\dot{e}_1(t) - e_1(t) - c_2e_2(t)] \end{aligned}$$

(31)

5.3 파라미터의 추정(Parameter Estimation)

본 연구에서 제안한 안정성 조건이 실제 플랜트에 직접 적용이 가능한지 확인해 보기 위해서는 플랜트의 정확한 모델이 요구된다. 이번 절에서는 파라미터 추정 방법을 이용하여 유연팔의 정확한 모델을 구하고자 한다.

5.1 절에서 유연팔 시스템을 식 (28)과 같이 표현하였다. 그러나 실험장치를 구성할 때 엔코더(Encoder) 2를 부착하면서 엔코더 연결선에 의한 커패시턴스(Capacitance) k_{enc} 가 추가되었다. 이를 고려한 새로운 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\delta_1) & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\delta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\dot{\theta}_1, \delta_1, \dot{\delta}_1) \\ g_2(\dot{\theta}_1, \delta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{enc}\theta_1 \\ k\delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

(32)

여기서, 식 (32)와 같이 표현되는 4 차 모델의 상태 변수는 기준 프레임의 회전각(θ_1)과 각속도($\dot{\theta}_1$), 1 차 모드의 시간에 따른 진폭(δ_1)과 그 미분 값($\dot{\delta}_1$)이다. 이때 δ_1 은 측정할 수 없으므로, δ_1 을 측정 가능한 값인 기준 프레임에 대한 유연한 팔의 끝단의 각(θ_2)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\theta_2 \approx \frac{\phi(1)\delta_1(t)}{L} \quad : 1 \text{ 차 모드만 고려한 경우}$$

이때, 식 (32)를 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ 로 표현하면 식 (33)과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\theta_2) & \frac{LM_{12}}{\phi(1)} \\ M_{21} & \frac{LM_{22}}{\phi(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) \\ g_2(\dot{\theta}_1, \theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{enc}\theta_1 \\ \frac{Lk}{\phi(1)}\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

(33)

이제 식 (33)에 기초하여 선형 모델식을 만들어 내면 식 (34)와 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M'_{12} \\ M_{21} & M'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{enc} & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

(34)

식 (34)와 같이 표현되는 유연팔 시스템의 파라미터를 추정하기 위하여, 최소자승법(Least Square Method)을 사용하였다. 다음은 최소자승법으로부터 구한 파라미터들의 값이다.

$$M_{11}=0.009866, \quad M'_{12}=M_{21}=0.009462$$

$$M'_{22}=0.009247, \quad F_1=0.003314$$

$$F_2=0.0003513, \quad k_{enc}=0.01341, \quad k'=0.2651$$

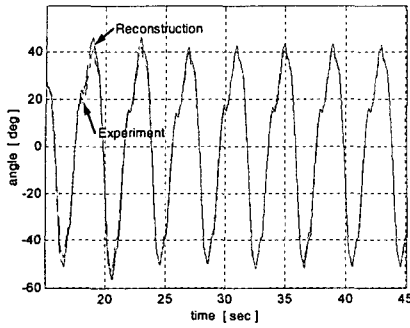


Fig. 9 Results for applying the same trajectory to parameter-estimated model and real plant

그리고 Fig. 9 에서, 몇 개의 삼각함수로 이루어진 궤적을, 파라미터를 대입한 모델에 적용한 결과와 실험 장치에 적용한 결과를 비교하였다. 두 결과가 거의 일치하는 것으로 보아 파라미터가 상당히 정확히 추정되었다고 생각할 수 있다.

추정된 파라미터들을 이용하면, 식 (30)으로부터 $g_2 = \frac{M'_{22}}{M_{11}M'_{22} - M_{21}M'_{12}} = 5434.75$ 가 된다. 이때, 안정성 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |1 - g_{1(k)}\hat{g}_1^{-1}| < 1 \\ |1 - g_{1(k)}g_{2(k)}(\hat{g}_1\hat{g}_2)^{-1}| < 1 \end{aligned} \quad (35)$$

where $g_{1(k)} = 1, g_{2(k)} = 5434.75$

5.4 실험 결과

실험은 1 초의 시간에 모터 각 $y = \theta_1$ 을 0 도에서 60 도만큼 이동하는 궤적과, $y = \theta_1$ 이 ± 60 도 사이를 3 초의 주기를 갖는 sine 형태로 운동하는 궤적에 대하여 수행하였다. 이때 링크의 최대 속도는 θ_1 이 180deg/s 이고, θ_2 는 185deg/s 이다.

각각의 경우에 샘플링 시간(sampling time) L 은 0.002sec 로 하였고, $\hat{g}_1 = 1$ 로 놓고 식 (35)의 안정성 조건을 고려하여 \hat{g}_2 을 선정하였다.

5.4.1 모터 각 $y = \theta_1$ 을 0° 에서 60° 만큼 1 초 동안에 이동

원하는 궤적(desired trajectory)은 다음과 같이 주었다.

$$\begin{aligned} y_d &= \frac{30\pi}{180} \{1 - \cos(\pi t)\}, 0 \leq t \leq 1 \\ y_d &= \frac{60\pi}{180}, t > 1 \end{aligned} \quad (36)$$

입력인 식 (31)에 필요한 설계변수의 값들은 다음과 같이 주었다.

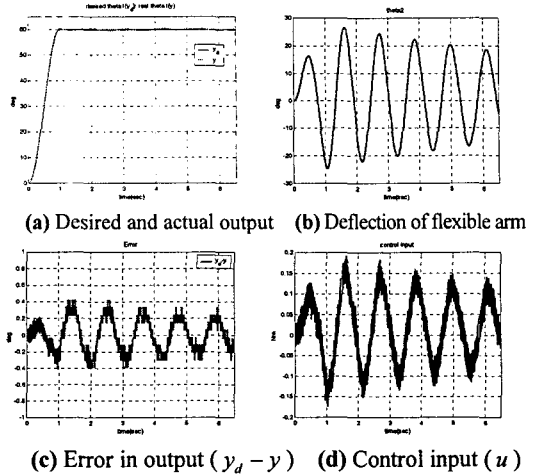


Fig. 10 Experimental results for satisfying stability condition

$$c_1 = 438, c_2 = 12$$

그리고, 식 (35)의 안정성 조건을 만족하도록 $\hat{g}_2 = 22000$ 으로 주었다. 실험 결과는 다음과 같다.

실험결과인 Fig. 10(b)를 살펴보면 유연팔이 기준 프레임에 대해 25 도 정도로 진동하는데, 이것은 시스템에 외란으로 영향을 준다. 즉, 유연팔로 인한 외란과 모델링되지 않은 동역학과 같은 불확실성이 존재함에도, 제안한 제어 방법을 이용하여 빠르게 주어진 원하는 궤적을 잘 추종하는 것을 확인할 수 있다.

5.4.2 모터 각 $y = \theta_1$ 이 -60° 에서 60° 사이를 sine 형태로 주기 운동

원하는 궤적은 다음과 같이 3 초의 주기를 갖는 sine 함수로 주었다.

$$y_d = \frac{60\pi}{180} \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \quad (37)$$

입력인 식 (31)에 필요한 설계변수의 값들은 다음과 같이 주었다.

$$c_1 = 350, c_2 = 10$$

그리고, 식 (35)의 안정성 조건을 만족하도록 $\hat{g}_2 = 25000$ 으로 주었다.

이 실험의 결과인 Fig. 11(b)를 살펴보면 유연팔이 기준 프레임에 대해 34 도까지 진동하는 것을 볼 수 있는데, 이러한 외란이 존재해도 원하는 궤적을 제대로 추종함을 알 수 있다. 즉, 유연팔로 인한 외란과 모델링되지 않은 동역학과 같은 불확실성이 존재함에도, 제안한 제어 방법은 0.8 도 이내의 작은 오차를 가지고 주기적으로 변하는 원하는 궤적을 잘 추종하는 것을 확인할 수 있다.

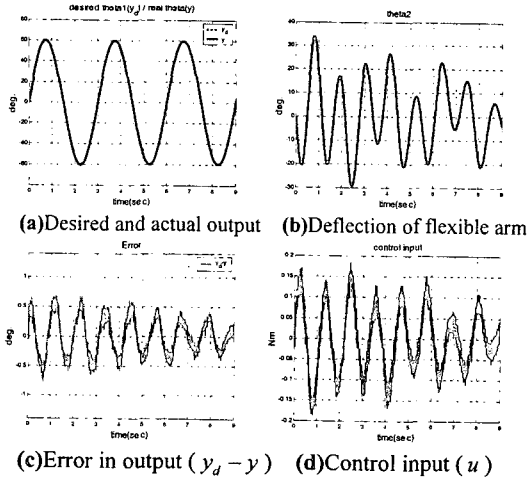


Fig. 11 Experimental results for satisfying stability condition

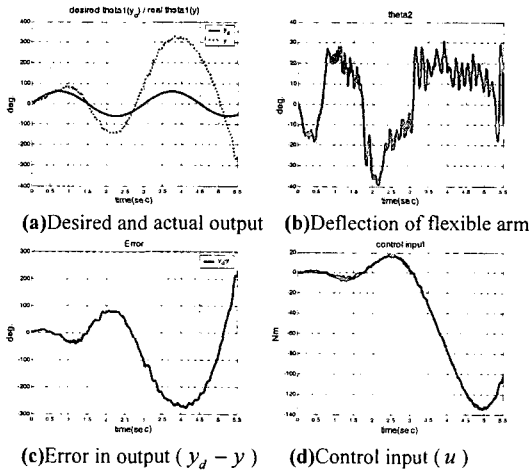


Fig. 12 Experimental results for unsatisfying stability condition

마지막으로, 식 (35)의 안정성 조건을 만족하지 않는 경우에 대한 실험을 수행하였다. $\hat{g}_1 = 1$ 이라고 식 (35)의 안정성 조건을 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{g}_2 > 2714.4 \quad (38)$$

이때, 안정한 범위의 밖에 있는 \hat{g}_2 을 선정하여 실험을 하였다. 식 (38)의 안정성 기준을 만족하지 않는 값인 $\hat{g}_2 = 2700$ 를 주고, 위의 실험과 같은 환경에서 식 (37)의 궤적에 대해 실험을 수행하였다.

입력에 필요한 값들은 다음과 같이 주었다.

$$c_1 = 10, c_2 = 10$$

이 실험의 결과인 Fig. 12 를 살펴보면 식 (35)의

안정조건을 만족하지 않는 값을 선정하였을 때, 오차($y_d - y$)와 제어 입력(u)이 계속 증가하고 유연팔의 진동이 심해지는 불안정한 반응을 보이는 것을 확인할 수 있다.

위의 실험들로부터 3 장에서 제안한 제어 방법이 불확실성에 강인하다는 사실과 유도한 안정성 조건이 타당함을 검증할 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 strict feedback 형태로 표현되는 시스템에 대하여 시간 지연 추정을 사용한 강인 Backstepping 제어 설계 방법을 제안하였다. 그리고, 제안한 제어 입력을 넣은 전체 폐루프 시스템이 안정하기 위한 충분 조건을 유도하였다.

본 연구에서 제안한 방법은 시스템에 불확실성 또는 복잡한 비선형 항이 있는 경우에 이러한 항들을 시간 지연 추정을 통하여 추정하고, 기존의 Backstepping 기법을 이용하여 전체 시스템이 리아프노프 안정성 조건을 만족하도록 제어 입력을 설계하는 것이다. 이는 기존의 Backstepping 제어 방법과 비교하여, 다음과 같은 장점이 있다. 첫째, 시스템의 정확한 동역학을 알 필요가 없다. 둘째, 시간 지연 추정을 사용하므로, 외란을 포함한 불확실성에 강인하다. 셋째, 정합 조건을 만족하지 않는 불확실성이 시스템에 존재하더라도 적용이 가능하다.

후 기

본 연구는 정보통신부 대학 IT 연구센터 육성 지원사업의 연구결과로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Youcef-Toumi K. and Ito Osamu, 1990, "A Time Delay Controller for Systems with Unknown Dynamics," *Trans. of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr.*, Vol. 112, No. 1, pp. 133~142.
- (2) Krstic M., Kanellakopoulos I. and Kokotovic P. V., 1995, "Nonlinear and Adaptive Control Design," New York: Wiley.
- (3) Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. and Morse A. S., 1991, "Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, pp. 1241~1253.
- (4) Krstic M., Kanellakopoulos I. and Kokotovic P. V., 1992, "Adaptive Nonlinear Control without Overparameterization," *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 19, pp. 177~185.
- (5) Krstic M. and Kokotovic P. V., 1995, "Adaptive Nonlinear Design with Controller-Identifier Separation

- and Swapping," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, pp. 426~440.
- (6) Qu Z., 1995, "Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems without Generalized Matching Conditions," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, pp. 1453~1460.
- (7) Freeman R. A. and Kokotovic P. V., 1993, "Design of 'Softer' Robust Nonlinear Control Laws," *Automatica*, No. 6, pp. 1425~1437.
- (8) Jiang Z. P. and Praly L., 1998, "Design of Robust Adaptive Controllers for Nonlinear Systems with Dynamic Uncertainties," *Automatica*, Vol. 34, No. 7, pp. 825~840.
- (9) Kanellakopoulos I., 1994, "Robustification Tools for Nonlinear Control Design," in *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, Lake Buena Vista, FL, pp. 3464~3468.
- (10) Marino R. and Tomei P., 1993, "Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Part II: Nonlinear Parameterization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, No. 1, pp. 33~48.
- (11) Yao B. and Tomizuka M., 1997, "Adaptive Robust Control of SISO Nonlinear Systems in a Semi-Strict Feedback Form," *Automatica*, Vol. 33, No. 5, pp. 893~900.
- (12) Kwan Chim and Lewis F. L., 2000, "Robust Backstepping Control of Nonlinear Systems Using Neural Networks," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. 30, No. 6, pp. 753~766.
- (13) Jung Je-Hyung, 1998, "Backstepping Control Using Time Delay Estimation," Master's Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology.
- (14) Hassan K. Khalil, 1996, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall.
- (15) Youcef-Toumi K. and Wu S. T., 1992, "Input/Output Linearization Using Time Delay Control," *Trans. of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr.*, Vol. 114, pp. 10~19.
- (16) Kim Seong-Tae, 2002, "Robust Backstepping Control Using Time Delay Estimation" Master's Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology.
- (17) Spong M., 1987, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots," *Trans. of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr.*, Vol. 109, pp. 310~319.
- (18) Hsia T. C. and Gao L. S., 1990, "Robot Manipulator Control using Decentralized Linear Time-Invariant Time-Delayed Joint Controllers," *IEEE Int. Conference on Robotics and Automations*, pp. 2070~2075.
- (19) Luca A. D. and Siciliano B., 1988, "Joint-Based Control of a Nonlinear Model of a Flexible Arm," *Proc. of American Control Conference*, pp. 935~940.