대한수학교육학회지 <학교수학> 제 6 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.6, No.3, 235-249. Sep 2004

우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구

박 교 식* · 송 상 헌** · 임 재 훈***

본 연구는 우리나라의 예비 초등 교사들이 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들 때 나타나는 오류 유형과 만든 문장제의 유형을 분석한 것이다. 우리나라 예비 초등 교사들은 미국이나 중국의 교사들처럼 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해하는 일상 언어와 수학적 언어 사용의 불일치에 기인하는 구조적인 오류를 다수 보였으며, 계산결과만 생각하여 구조적으로 다른 $1\frac{3}{4} \times 2$에 적합한 문장제를 만드는 새로운 유형의 오류도 보이고 있다. '포함제' 자체에는 익숙하지만 몫이 자연수가 아닌 분수 나눗셈 상황에서 포함제가 지니는 문제점에 대한 인식은 매우 부족한 것으로 나타났으며, '단위 비율의 결정', '곱셈의 역 상황'이라는 분수 나눗셈의 의미에 대한 이해가 매우 부족한 것으로 나타났다. 따라서 예비 초등 교사들을 위한 교육에서는 분수의 나눗셈에서 단위 비율의 결정, 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈의 의미를 다양한 실제 상황 및 맥락과 관련지어 이해하게 하는 지도가 이루어질 필요가 있다.

I. 서 론

초등교사 연수 프로그램이나 교사 양성 기관에서의 교육 프로그램을 개발하기 위해서는 다양한 영역에서 초등교사 또는 예비 초등 교사의 수학적 지식에 대한 실태 분석 연구를 참고할 필요가 있다. 그러나 이종욱(2003)에 의하면 우리나라 예비 초등 교사의 수학적 지식에 대한 연구는 그다지 많지 않은 편으로 보고되고 있다. 특히, 분수 나눗셈은 초등학교 수학의 '수와 연산' 영역의 최상위의 내용으로, 학생들뿐 아니라 교사들도 분수 나눗셈의 의미와 관련하여 적절한 개념적 이해에 도달하지 못하는 경우가 적지 않다(Ma, 2002). 이런 상황에서 본 연구는 우리나라 예비 초등 교사들이 분수 나눗셈의 의미를 어느 정도 이해하고 있는지 알아보고 이를 통해 교사교육에의 시사점을 얻고자 한다.

서관석과 전경순(2000)이 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식 수준을 '$3 \div \frac{1}{2}$의 상황을 설명하는 문장제'를 기술하게 하여 조사한 바에 의하면, 57%의 예비

*경인교육대학교(pkspark@ginue.ac.kr)
**경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)
***경인교육대학교(jhyim@ginue.ac.kr)

초등 교사들이 부적절한 예를 기술하거나 예를 들지 못했다. 김민경(2003)은 나눗셈 개념에 대한 예비 초등 교사의 이해도를 자연수 나눗셈 문장제, 분수 나눗셈 문장제, 자연수÷분수, 나눗셈 알고리즘에 대해 조사하였는데, '$\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$로 나누는 문장제'를 만들라는 과제에 대한 조사 결과 정답율은 54.5%로 나타났다. 그런데 이들 선행연구에서 우리나라 예비 초등 교사들이 분수 나눗셈 문장제 구성에 있어 어떤 유형의 오류를 범하며 어떤 유형의 문장제를 구성하는지에 대한 상세한 분석은 이루어지지 않았다.

Ma(2002)는 미국의 초등학교 교사 23명에게 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$을 식으로 제시하고, 이 식에 적합한 문장제를 여러 가지 만들게 한 후, 16명의 미국 교사들이 만든 잘못된 문장제를 분석하여, 그들이 범한 오류를 '$\frac{1}{2}$로 나누기를 2로 나누기로 오해', '$\frac{1}{2}$로 나누기를 $\frac{1}{2}$을 곱하기로 오해', '$\frac{1}{2}$로 나누기, 2로 나누기, $\frac{1}{2}$을 곱하기를 모두 동일한 것으로 오해'하는 세 가지 유형으로 구분하여 분석하였다. 또, 중국의 초등교사 72명에게도 똑같은 분수 나눗셈을 제시하고 그 식에 적합한 문장제를 만들어 보게 한 후, 65명의 중국 교사들이 만든 올바른 문장제를 분석하여, 그 문장제의 유형을 '포함제', '등분제', '곱과 인수 모델'의 세 가지로 나누어 분석하였다.[1])

본 연구에서는 우리나라 예비 초등 교사들이 만든 분수 나눗셈 문장제의 오류 유형을 분석하고, Ma가 제시하지 않은 다른 유형의 오류가 나타나는지도 알아본다. 또한 예비 초등 교사들이 만든 올바른 분수 나눗셈 문장제를, Ma가 제시한 세 가지 유형 대신, 그 세 가지를 포함하면서도 좀 더 정교하게 분수 나눗셈의 의미를 구분한 Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)의 '포함제', '등분제', '단위 비율 결정', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'의 다섯 가지 유형으로 나누어 분석한다.

본 연구는 G교육대학교의 3학년생 2개반 71명[2])에게 분수 나눗셈 '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$'에 적합한 문장제를 최대 10개까지 만들도록 하였고, 그 중 틀리거나 맞은 문장제를 하나라도 적어낸 48명의 답안을 분석하였다. 그들은 사전에 이러한 문장제를 만들어 본 경험이 없었으며, 교육대학교에 입학한 후 분수의 의미나 나눗셈의 의미를 정식으로 학습하지 않은 상태였다. 그런만큼 이 조사는 그들이 자연스럽게 가지고 있는 분수 나눗셈의 의미에 대한 이른바 '개념 이미지(Vinner, 1991)'를 잘 드러내어 주는 것으로 볼 수 있다.

II. 분수 나눗셈의 의미에 대한 오해

이 장에서는 우리나라 예비 초등 교사들도 Ma(2002)가 제시한 세 가지 유형의 오류를 범하는지와 계산 결과가 자연수가 아닌 분수가 되는 나눗셈의 문장제를 만들 때, 제수나 몫에 '사람의 수'와 같은 이산량을 소재로 사용하는 예를 제시하는지를 알아본다. 그리고 이 과정

1) Ma(2002)의 책을 번역한 신현용과 승영조는 '포함제', '등분제' 대신 각각 '측정 모델', '분할 모델'이라 하고 있다.
2) 1학기 초에 수학 심화반과 타 심화과정을 각각 한 반씩 대상으로 하였으나 이들의 반별간 의미있는 차이는 나타나지 않아 반별 차이 분석은 하지는 않음.

에서 Ma가 제시하지 않은 다른 유형의 오류가 나타나는지도 함께 알아본다. 우리나라 예비 초등 교사 48명이 만든 150개의 답안 중 32명(약 67%)이 제시한 88개(약 59%)의 답안이 오류를 포함하고 있는 것이었다. 그러나 오류를 나타낸 답 중에서도 32%(48개)만이 분수 나눗셈의 오류 유형으로 분류할 수 있는 것이었다.[3)]

1. '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해

Ma(2002)의 관찰에 의하면, 미국 교사 23명 중 10명(약 23%)이 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해하고 있었는데, 그들은 대개 한 양을 두 사람에게 똑같이 나누어 주기, 즉 두 부분으로 나누기와 관련된 다음과 같은 문장제를 만들었다.

> 파이를 이용하면 돼요. 파이 한 판과 또 다른 파이 $\frac{3}{4}$쪽이 있고, 두 사람이 있어요. 각자 똑같이 가질 수 있도록 이걸 똑같이 나누려면 어떻게 해야 할까요?(p. 139)

이 문제는 $1\frac{3}{4} \div 2$에 적합한 문장제이지, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제는 아니다. $\frac{1}{2}$로 나누기를 2로 나누기로 오해하기에 이러한 문장제를 만든 것이다. 우리나라 예비 초등 교사들 48명 중 15명(31%)이 이러한 오류를 범하고 있었다. 다음은 그들이 제시한 문장제의 예이다.

① 피자 $1\frac{3}{4}$판이 있다. 이것을 영희와 철이에게 똑같이 나누어 주면 그들은 얼마큼씩 먹을 수 있을까?
② 구리 전선을 $1\frac{3}{4}$m 구입했는데, 공사하면서 구리 전선을 $\frac{1}{2}$로 나누어 사용하였다. 사용한 전선의 양은?
③ 한 상자에 24자루인 볼펜이 1과 $\frac{3}{4}$상자 있습니다. A와 B가 이 볼펜을 반으로 나누어 가지려면 각각 몇 자루씩 가져야 할까요?

'반으로 나눈다'는 일상적인 표현에서의 '반'은 '나눈 결과로 생기는 각각의 조각이 처음 양의 반'을 의미한다. 그러나 'A로 나눈다'는

---

3) 기타 40개의 답안은 다음과 같이 오류 유형이라기보다 문장제로 볼 수 없는 경우였는데, 이것은 진술의 성격에 따라 6가지로 구분할 수 있었다.
① '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$을 계산해 보시오.', '$1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$을 몇 번 포함하는가?', '대분수 $1\frac{3}{4}$을 진분수 $\frac{1}{2}$로 나누시오.'와 같이 답을 구할 수는 있지만 식을 문장으로만 진술한 경우
② '1과 $\frac{3}{4}$의 피자를 두 개의 접시에 놓으려고 합니다. 어떻게 할까요?', '현성이는 $1\frac{3}{4}$개의 사탕을 2명에게 1개꼴로 나누어 주었다. 그럼 한 사람당 사탕을 몇 개씩 가질 수 있나?', '$\frac{7}{4}$씩의 종이를 $\frac{1}{2}$씩 나눕니다. 총 몇 조각인가요?'와 같이 물음이 애매하거나 문장이나 문맥이 어색하여 문제가 성립하지 않는 경우 ③ '$\frac{7}{4} \div \frac{2}{4}$와 같은 식을 쓰시오'와 같이 문제에서 요구하는 것과는 다르게 임의로 문제를 바꾸어 버리는 경우 ④ 기타 '$1\frac{3}{4}$에서 $\frac{1}{2}$로 나누어 보자'와 같은 지시문이나 '$1.75 \div 0.5$'와 같이 문장이 아니라 식이나 수직선, 그림만 제시해 둔 경우, ⑤'윤정이는 끈 $1\frac{3}{4}m$를 $\frac{1}{2}m$씩 자르려고 한다. 하나의 끈은 몇 m인가?'와 같이 문제에 이미 답이 나타나 있어 문제로서의 의미가 없는 경우, 그리고 ⑥'현성이의 숫자 카드에 $1\frac{3}{4}$이라는 숫자가 있다. 지현이의 카드엔 현성이의 수를 $\frac{1}{2}$로 나눈 수가 써 있다. 지현이의 수는?'와 같이 억지로 만들어 자연스런 맥락이라고 보기 어려운 경우 등. 개인별로 올바른 문장제(최대 8개)만 만든 사람은 16명인 반면 모두 틀린 답안(최대 9개)만 제시한 사람도 20명이 있었다. 이처럼 예비 초등 교사들은 분수 나눗셈의 의미와는 별도로 문장제를 만드는 것 자체에도 익숙하지 않음을 알 수 있다.

수학적 표현에서의 'A'는 나눈 결과로 생긴 조각의 크기가 아니라 제수를 뜻한다. 따라서 '반으로 나누기'라는 일상 표현에 대응하는 수학적 표현인 '$\frac{1}{2}$로 나누기'는 일상적 표현과 그 의미가 다르다. 예비 초등 교사들이 위와 같은 오류를 범하는 이유는 '$\frac{1}{2}$로 나누기'에서 $\frac{1}{2}$이 '반'이므로, $\frac{1}{2}$로 나누기를 '반으로 나누기'라고 생각하여, 수학적 표현과 일상적 표현의 의미를 혼동하기 때문으로 보인다. 그들은 $\frac{1}{2}$을 단순히 '반'이라고 생각할 뿐만 아니라, 어떤 양을 '$\frac{1}{2}$로 나눈다'는 의미를 문맥에 맞게 파악하지 못하고 있는 것이다. 이러한 생각은 예 ②의 '구리 전선을 $\frac{1}{2}$로 나누어'에서 분명하게 볼 수 있다. 이러한 오류의 예가 비교적 많다는 점에서, 이것은 일상 언어와 수학적 언어 사용의 불일치에 기인하는 구조적 오류라고 할 수 있다.

2. '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 곱하기'로 오해

Ma(2002)의 관찰에 의하면, 23명 중 6명(26%)의 미국 교사들이 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 곱하기'로 오해하고 다음과 같은 문장제를 만들었다.

> 이렇게 작은 수에는 아마도 파이를 사용하는 것이 가장 수월할 것입니다. 분수의 경우에는 전형적으로 파이를 사용합니다. 전체 파이 하나와 $\frac{3}{4}$쪽이 있습니다. $\frac{1}{4}$쪽은 누군가 훔쳐 먹었다고 해 둡시다. 아무튼 전체 하나를 4등분해서 모두 $\frac{1}{4}$쪽 자리로 만든 다음 전체의 반을 가져야 합니다.(p. 139)

Ma에 의하면, 위 문제의 마지막 부분에 있는 '전체의 반'이라는 뜻을 식으로 표현하면 (전체의 양)$\times\frac{1}{2}$이 되므로, 위의 문제는 $1\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$에 적합한 문장제이지, $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$에 적합한 문장제가 아니다. '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 곱하기'로 오해하기에 이러한 문장제를 만든 것이다.

우리나라 예비 초등 교사 48명 중 단지 1명(2%)만이 이러한 오해를 하고 있었다. 다음의 두 문장제는 동일한 한 사람이 제시한 것이다.[4)]

> ① 아이스크림을 $1\frac{3}{4}$갤런 구입했는데, 그 중의 $\frac{1}{2}$이 딸기 맛이었다. 딸기 아이스크림은 모두 몇 갤런인가?
> ② 자갈 $1\frac{3}{4}$kg을 바닷가에서 가져왔는데, 그 중 $\frac{1}{2}$을 친구에게 주었다. 친구에게 준 자갈의 양은 몇 kg인가?

우리나라 예비 초등 교사들이 제시한 예 중에서 이러한 오해를 보여주는 또 다른 예는 없었다. 미국 교사들과는 달리 그들이 이러한 유

4) 그는 비록 '갤런'이라는 특별한 들이 단위까지 사용하고 있지만 분수 나눗셈의 의미에 대해서는 사실상 총체적인 오해를 하고 있었다. 이 사람은 틀린 9개의 문장제를 제시하고 있는데, 그 중 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해하고 있는 문장제가 4개, 부정확한 문장제가 3개, '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$로 빼기'로 오해한 문장제도 2개나 있어서 분수나눗셈에 관한 총체적인 오류를 범하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 개인별 특성이 나타나는 부분도 있지만 이 논문에서는 초등 예비 교사라는 집단이 현상적으로 나타내 보이는 오류에 초점을 맞추고 있기 때문에 개인에 대한 심층적인 분석은 후속연구로 남겨두기로 한다.

형의 오해를 거의 하지 않는다고 단정하기는 어렵지만, 이런 오류를 범한 미국 교사들의 백분율과 우리나라 예비 초등 교사들의 백분율 사이에는 적지 않은 차이가 있다.[5)]

3. '$\frac{1}{2}$로 나누기', '2로 나누기', '$\frac{1}{2}$을 곱하기'를 모두 동일한 것으로 오해

Ma(2002)의 관찰에 의하면, 23명의 미국 교사들 중 2명(약 9%)이 '$\frac{1}{2}$로 나누기', '2로 나누기', '$\frac{1}{2}$을 곱하기'를 모두 동일한 것으로 오해하고 있었다.

> 1과 $\frac{3}{4}$을 반으로 나누기라 좋아요. 어디 봅시다……. 이거 하나를 모두 가지고 있고, 또 $\frac{3}{4}$개를 가지고 있는데, 전체의 반만 갖고 싶습니다. (p. 140)

Ma에 의하면, 이 문장제에서 '1과 $\frac{3}{4}$을 반으로 나누기'는 $\frac{1}{2}$로 나누기를 2로 나누기로 오해하고 있음을, 그리고 '전체의 반'은 $\frac{1}{2}$로 나누기를 $\frac{1}{2}$을 곱하기로 오해하고 있음을 보여준다. 조사 대상인 우리나라 예비 초등 교사들이 제시한 문장제 중 이러한 오해를 보여주는 예시는 없었다. 그러나 이것만으로 미국교사들과는 달리 그들이 이러한 유형의 오해를 하지 않는다고 단정하기는 어렵다. 사실 위의 예는 그 세 가지를 동시에 보여주는 희귀한 예에 해당한다. 실제로 앞에서 $\frac{1}{2}$로 나누기를 $\frac{1}{2}$을 곱하기로 오해한 경우도, 이 세 가지를 동일한 것으로 간주하고 있는 것으로 볼 여지가 있다.

4. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$을 $1\frac{3}{4} \times 2$로 바꾸어 문장제 만들기

Ma(2002)의 연구에는 소개되지 않은 것으로, 우리나라 예비 초등 교사들 중 비교적 많은 수인 7명(15%)이 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들라는 요구에 대해 다음과 같이 $1\frac{3}{4} \times 2$에 적합한 문장제를 만들어 제시하였다.[6)]

> ① 물을 1L와 $\frac{3}{4}$L를 마신 동생이, 내일은 2배를 마시겠다고 한다. 동생이 내일 마실 물의 양은?
> ② 수정이는 피자 $1\frac{3}{4}$의 2배를 먹었다. 얼마만큼 먹었는가?
> ③ 운동장을 1바퀴와 $\frac{3}{4}$만큼 뛰었다. 조금 쉬었다가 아까와 동일한 만큼을 뛰었다. 총 달린 양은?
> ④ 집에서 학교까지의 거리는 $1\frac{3}{4}$km이다. 집에서 학교까지의 왕복 거리는?

'계산'의 관점에서 보면, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$과 $1\frac{3}{4} \times 2$는 같다. 그래서 일부 예비 초등 교사들은 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만드는 것과 $1\frac{3}{4} \times 2$에 적합한 문장제를 만드는 것 사이에

---

5) 이러한 차이가 어디에 기인하는 것인가는 분명하지 않다. 미국 교사들의 경우 '구조적인 오류'로 보이는 반면, 우리나라의 그 예비교사의 경우는 '개인적인 오류'로 보인다. 이 논문에서는 개인의 경향을 조사하기 보다는 전체의 경향을 조사하는 데 관심이 있으므로 이에 대해서는 논의하지 않기로 한다.
6) 이들 중 2명만 올바른 문장제를 함께 제시하고 있었다.

아무런 차이가 없다고 생각한 것으로 보인다. 그들은 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} \times 2$라는 계산의 결과를 미리 생각하고 그것을 이용한 것이다. 이는 그들이 분수의 나눗셈이라는 의미보다는 제수가 분수인 나눗셈은 제수의 역(분자와 분모를 뒤집은 값)을 곱하면 된다는 계산 알고리즘에 익숙해 있기 때문이라 판단된다.

5. '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 빼기'로 오해

우리나라 예비 초등 교사들 중 3명은 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제 대신 다음과 같이 $1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들기도 했다.

① 사과 3개에서 1개를 갖고 $\frac{3}{4}$만큼을 더 가져갔습니다. 그 중에서 $\frac{1}{2}$만큼을 빼면 몇 조각이 남습니까?
② 폐휴지가 $1\frac{3}{4}$kg 있었는데, 이번에 그 중 $\frac{1}{2}$kg을 태워 버렸다. 남은 폐휴지의 양은?
③ 사과 1개와 그것의 $\frac{3}{4}$개가 있습니다. 사과잼을 만드는데 $\frac{1}{2}$개의 사과가 필요합니다. 사과잼을 만들고 난 후 남은 사과의 양을 기약분수로 나타내어 보시오.

예 ①을 제시한 사람이 만든 7개의 문장제와 예 ②를 제시한 사람이 만든 9개의 문장제는 모두 의미가 부정확한 것으로 앞에서 분류한 어떠한 오류 유형에도 속하지 않는 것이었다.[7]

예 ③을 제시한 예비 초등교사는 포함제를 사용한 올바른 문장제와 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해한 문장제를 함께 제시하고 있어서 나누라는 부호(÷)를 빼라는 부호(-)로 잘못 보고 푼 것은 아님을 알 수 있다.

한편, 예 ③을 제시한 예비 초등 교사의 또 다른 예에서도 그러하듯이 '어떤 것 1개와 $\frac{3}{4}$개'를 습관적으로 '어떤 것 1개와 그것의 $\frac{3}{4}$개' 라고 표현하고 있다. 이러한 오해는 구조적인 것이라기보다는 특정한 개인에 한정된 표현의 오류로 보이나, 이와 같은 오류가 일어날 수 있음을 예비 초등 교사들에게 인식시킬 필요가 있다. 이는 $2\frac{3}{4}$과 같은 또 다른 예를 들어, '2와 그것의 $\frac{3}{4}$'이 얼마인지를 다시 확인해 보도록 하는 반례를 통해 의미에 보다 집중하도록 교정할 수 있을 것이다.

6. 교육적으로 문제점이 있는 예를 제시

Ma(2002)에 의하면 다음과 같이, 개념적으로는 옳지만 '사람의 수'를 분수로 나타내는 부적절한 예를 제시하는 교사도 있었다. Ma는 이러한 문장제는 개념적으로 옳지만 교육적으로는 문제점이 있는 예라고 하였다.

예를 들어 초콜릿 두 개와 $\frac{1}{4}$개를 가지고 있다고 해요. 나는 한 어린이에게 $\frac{1}{2}$개씩 나눠주고 싶어요. 그러면 몇 명의 아이가 초콜릿을 받게 될까요? 물론 답은 $4\frac{1}{2}$명이죠. 그래요. 아이가 $\frac{1}{2}$명이라는 것 때문에 아이를 예로 들면 문제가 있긴 해요. 그러니까? 네 명의 아이는 제대로 초콜릿을 받고, 한 명은 다른 아이들의 반만 받는 거죠. 애들은 그걸 이해할 수 있을 거예요.(p. 142)

---

7) '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 빼기'로 오해하는 경우는 특수한 경우라고 볼 수도 있다. 이러한 사례는 예비 초등 교사들 중에 초등수학의 기본적인 내용에 대한 이해조차 결여된 경우도 있음을 보여준다.

우리나라 예비 초등 교사들 15명(31%)이 만든 17개의 문장제가 분수인 제수나 몫에 '사람의 수'를 소재로 사용한 것이었다. 다음은 그들이 제시한 예시이다.

① 주스가 $1\frac{3}{4}$L있다. 한 사람당 $\frac{1}{2}$L씩 나눠주면 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가?

② 나는 $1\frac{3}{4}$m의 색 테이프가 있다. 이것을 한 사람에게 $\frac{1}{2}$m씩 나누어 주려고 한다. 모두 몇 사람에게 나누어 줄 수 있는가?

③ 피자 $1\frac{3}{4}$개를 가지고 있는데, $\frac{1}{2}$개씩 나누어주면 몇 명이 먹게 될까?

④ $1\frac{3}{4}$kg이 들어 있는 꿀을 $\frac{1}{2}$kg씩 나누어 가진다면 모두 몇 사람이 가질 수 있는가?

사람 이외에도 병, 봉지, 동물 등과 같은 이산량을 소재로 하여 문장제를 만들 경우 동일한 문제점이 있게 된다. 18명(40%)이 제시한 37개의 문장제가 이러한 경우였다.

① 물 $1\frac{3}{4}$L를 $\frac{1}{2}$L씩 담을 수 있는 병에 옮기려고 한다. 몇 병에 담을 수 있을까요?

② $1\frac{3}{4}$kg의 딸기가 있다. 한 봉지에 $\frac{1}{2}$kg씩 담으려면 모두 몇 봉지를 만들 수 있을까?

③ $1\frac{3}{4}$cm 길이의 수수깡으로 $\frac{1}{2}$cm의 원기둥 모양을 몇 개나 자를 수 있는가?

④ 쥐를 잡으려고 쥐약 한 포와 $\frac{3}{4}$포를 쥐덫 위에 놓았다. 쥐의 치사량은 $\frac{1}{2}$포이다. 몇 마리의 쥐를 잡을 수 있나?

물론, 이러한 예들은 개념적으로는 옳게 만들어진 것으로 답을 구하기 위해 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 식을 세워 계산하면 된다. 그러나 이것들이 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$에 완전히 들어맞는 문장제는 아니다. 예 ①에서 $\frac{7}{2}$병은 병 3개와 반병으로 이해될 수 있다. 그러나 병 자체를 반으로 나눌 수는 없기 때문에 답은 4병이라고 해야 하며, 예 ④에서는 3마리라고 해야 한다. 이러한 예에서처럼, 나머지를 올림 또는 버림해야 하는 상황까지 고려하면 식은 같아도 답은 달라진다. 이러한 문장제는 문제해결을 위한 예로 종종 사용되는 것들이다.

이상 우리나라 예비 초등 교사들이 제시한 문장제 중 분수 나눗셈 문장제의 오류 유형으로 분류할 수 있는 48개의 답안을 유형별로 정리하여 나타내면 <표 Ⅱ-1>와 같다.

<표 Ⅱ-1> 문장제 오류 유형 및 유형별 응답자와 문항 수 분류

오류 유형	응답자 수	문항 수
2로 나누기로 오해	15	29
$\frac{1}{2}$을 곱하기로 오해	1	2
$\frac{1}{2}$로 나누기, 2로 나누기, $\frac{1}{2}$을 곱하기를 동일한 것으로 오해	0	0
$1\frac{3}{4}\times 2$로 바꾸어 문장제 만들기	7	13
$\frac{1}{2}$로 나누기를 $\frac{1}{2}$을 빼기로 오해	3	4

또한, 개념적으로는 옳으나 교육적으로는 문제점이 있는 문장제를 유형별로 정리하면 아래의 <표 Ⅱ-2>와 같다.

Ⅲ. 분수 나눗셈 문장제의 유형

이 장에서는 우리나라 예비 초등 교사 48명 중 28명(약 58%)이 만든 62개의 올바른 분수 나눗셈 문장제를 Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)가 분수 나눗셈의 의미로 제시한 '포함제', '등분제', '단위 비율 결정', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'의 다섯 가지 유형으로 나누어 살펴본다.

1. 포함제

포함제는 주어진 양과 같은 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. Ma(2002)에 따르면, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 포함제 상황은 '$1\frac{3}{4}$안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수 알아내기' 또는 '$1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인지 알아내기'이다. 우리나라 예비 초등 교사 48명 중 27명(56%)이 이러한 포함제를 제시하였다. 이는 우리나라 예비 초등 교사들의 대부분이 분수의 나눗셈은 포함제 상황으로 만들고 있음을 보여준다. 다음은 그들이 제시한 문장제의 일부이다.

① 물이 $1\frac{3}{4}$L 있습니다. 한 사람이 $\frac{1}{2}$L씩 마신다면 모두 몇 사람이 마실 수 있습니까?

② 나는 $1\frac{3}{4}$m의 색 테이프가 있다. 이것을 한 사람에게 $\frac{1}{2}$m씩 나누어 주려고 한다. 모두 몇 사람에게 나누어 줄 수 있는가?

③ 모래가 $1\frac{3}{4}$kg이 있다. 이 모래를 $\frac{1}{2}$kg씩 나누어 담으면 몇 봉지가 나오는가?

④ 왕서방은 조서방에게 $1\frac{3}{4}$kg의 쌀을 빌려 왔다. 하루에 $\frac{1}{2}$kg씩 갚으려 한다. 며칠 걸리는가?

⑤ 영철이는 피자 한 조각과 $\frac{3}{4}$조각을 먹을 수 있습니다. 영호는 피자를 $\frac{1}{2}$조각밖에 먹지 못합니다. 영철이는 영호가 먹은 피자의 몇 배를 더 먹었나요?

⑥ 언니는 하루에 $1\frac{3}{4}$L만큼의 우유를 먹고 나는 $\frac{1}{2}$L만큼을 먹는다. 언니는 나의 몇 배만큼의 우유를 먹는가?

그런데 그들이 만든 포함제 상황의 문장제 중 ⑤와 ⑥을 제외한[8] 상당수가 개념적으로는 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연

<표 Ⅱ-2> 개념적으로는 옳으나 교육적으로 문제점이 있는 답안의 분류

구분		응답자 수	문항 수
개념적으로는 옳으나 교육적으로 문제점이 있는 예	사람의 수를 소재로 사용	15	17
	사람 이외의 이산량을 소재로 사용	18	37

8) ⑥의 경우는 배의 개념을 도입하여 비교적 잘 만든 문장제라고 볼 수 있다. 이러한 배 개념을 사용한 예비 초등 교사는 2명뿐이었으며, 그들이 만든 문장제는 모두 3개였다. 그러나 ⑤에서 볼 수 있듯이 실생활의 맥락에서 보면 피자를 $\frac{1}{2}$조각밖에 먹지 못한다는 비현실적인 상황과 '더 먹었는지'를 묻는 문장의 상황은 적절하지 못하다.

수)과 그대로 일치하지 않는 것이었다. 서관석과 전경순(2000)이 사용한 $3 \div \frac{1}{2}$의 상황을 설명하는 문장제나 김민경(2003)이 사용한 $\frac{3}{5}$을 $\frac{1}{5}$로 나누는 문장제와 달리, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 계산 결과는 자연수가 아닌 분수가 되므로 실제 문제의 해와 계산 결과가 그대로 일치하지 않는다. 그럼에도 불구하고, 예비 초등 교사들이 위와 같은 문장제를 만든 것은 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 계산 결과가 $\frac{7}{2}$이라는 것을 미처 생각하지 않은 채 문장제를 만들었거나 분수 나눗셈에서 포함제가 지닌 이와 같은 문제점을 간과했기 때문일 수 있다. 참고로, Ma(2002)가 조사한 중국 교사 72명 중 65명이 만든 80개의 문장제 중에는 상대적으로 적은 16개의 문장제만이 포함제 유형에 속하였다.

$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 포함제는 구조적으로 '어떤 것이 $1\frac{3}{4}$단위만큼 있고, 그것을 $\frac{1}{2}$단위만큼씩 나누면, 몇 번 나눌 수 있는가?'라는 형태를 가진다. 이때 단위로 등장할 수 있는 것은 m, L, kg, 시간, 일, 개, 판 등이다. 또, '있다' 대신 맥락에 따라 '사온다', '걸린다', '빌려준다' 등의 표현이 사용될 수 있다. 마찬가지로 '몇 번 나눌 수 있는가' 대신 맥락에 따라서는 '몇 개 있는가', '몇 사람에게 줄 수 있는가' 등의 표현이 사용될 수 있다. 이러한 구조를 더 간단히 나타내면, Ma(2002)가 표현한대로, '$1\frac{3}{4}$ 안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수 알아내기' 또는 '$1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인지 알아내기'가 된다. 물론, 개수는 자연수이므로 분수 나눗셈의 계산 결과와 일치하지 않는 상황이 존재한다.

포함제의 구조를 'b는 a의 몇 배인지 알아내기'와 같이 나타낼 수 있다. 이때, Ma(2002)가 주목했듯이, a와 b가 모두 자연수로 주어지든, 아니면 모두 분수로 주어지든 b는 모두 a의 '몇 배'라는 형태를 취한다. 다만 그 몫이 이산량으로 주어지는 경우, 그것이 자연수이어야 한다는 것을 염두에 두어야 한다. 우리나라 예비 초등 교사들의 상당수는, 자연수 나눗셈의 포함제 구조를 분수 나눗셈의 포함제 구조로 확장하여 포함제를 많이 만들고는 있지만, 몫이 이산량으로 주어지는 경우 그것이 자연수이어야 한다는 것을 간과하고 있는 것으로 보인다. 이에 비해 중국 교사들이 상대적으로 포함제를 많이 만들지 않은 것은, 그들이 나눗셈의 포함제 상황을 잘 몰라서라기보다는 그것이 분수 나눗셈 특유의 의미를 나타낸다고 생각하지 않기 때문이라는 판단을 하고 있는 것으로 보인다. Ma(2002)에 의하면, 이것은 중국 교사의 경우 충실한 교사 교육과 교재 연구 활동에 기인하는 것으로 보인다. 뒤에서 논의하겠지만, 계산 결과가 분수가 되는 분수 나눗셈의 경우는 포함제보다 단위 비율의 결정 상황이나 곱셈의 역 상황이 계산 결과와 더 잘 어울린다.

2. 등분제

등분제는 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. 예를 들어, 우유 $\frac{3}{2}$L를 6명에게 나누어 줄 때 몇 L씩 나누어 주어야 하는지 구하는 상황이다. 6명 각각이 받는 양이 몇 L씩인지 구하기 위해서는 $\frac{3}{2} \div 6$을 계산하여야 한다.

Ma는 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 예로 '어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$

이 되는 그 어떤 수 알아내기'를 소개하면서 이를 등분제(분할모델)로 소개하고 있다. 이와 같은 해석에도 일리가 있다. 우유 $\frac{3}{2}$L를 6명에게 나누어 주는 상황에서 (나누는 수 6이 자연수라는 것이 아니라) '1인당' 얼마씩 나누어 주어야 하는지에 주목하고, 이로부터 1 단위에 해당하는 양을 구하는 것을 등분제의 본질로 볼 수도 있기 때문이다. 1 단위에 해당하는 양을 구하는 것이라는 것은 제수가 자연수일 때뿐 아니라 분수인 경우에도 그대로 확장, 적용될 수 있다.

그러나 '등분'이라는 말은 나누는 수가 자연수인 경우와 잘 어울리지만, 분수인 경우와는 어울리지 않는다. 2등분, 3등분한다는 말과 달리, $\frac{1}{2}$등분한다는 말은 일상적으로 성립하지 않는다. 이와 같이 등분이라는 말이 지닌 일상적 의미는 나누는 수가 자연수인 경우에 적합하다는 점을 고려하면, '단위 비율을 결정하는 것'과 '등분'은 구분이 가능하다. 이 때문에 본 논문에서는, Sinicrope, Mick & Kolb(2002)와 같이, 등분하는 상황을 단위 비율을 결정하는 상황과 구분하는 것이 가능하다고 본다.

나누는 수가 자연수인 경우에 한정하여 '등분'을 사용하기로 하면, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 등분제는 있을 수 없다. 그러므로 나눗셈의 의미를 일상적인 의미의 등분으로만 이해하고 있다면, 나누는 수가 자연수가 아닌 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 해당하는 적절한 문장제는 만들 수 없을 것이다. Graeber, Tirosh와 Glover(1989), Simon(1993)는 예비 초등 교사들 대부분이 나눗셈을 등분제로 이해하기 때문에 포함제의 상황을 잘 연결시키지 못한다고 볼 수 있다고 하였다(김민경, 2003에서 재인용). 본 연구에서 적절한 문장제를 만들지 못한 예비 초등 교사들 중에도 나눗셈을 등분이라는 제한된 의미로만 이해하고 있는 경우가 있을 개연성이 있다.

3. 단위 비율의 결정

포함제는 같은 종류의 양을 비교하는 확률이나 타율에서와 같이 '율(率)'이라는 이름을 붙일 수 있는 상황에 해당한다. 그리고 등분제는 다른 종류의 양을 비교는 속도나 밀도에서와 같이 '도(度)'라는 이름을 붙일 수 있는 곳이나 단가를 구하는 상황에 해당한다.

Freudenthal(1983; 우정호, 1999: 44, 256에서 재인용)은 전자의 경우를 '내적인 비', 후자의 경우를 '외적인 비'라고 부르고 있다. 이 비의 값을 몫으로 해석하면, 내적인 비는 수이고 외적인 비는 양(정도)이다. 이처럼 포함제와 등분제는 몫을 구하는 문제가 아닌 비율을 구하는 문제로 확장시킬 수 있다.

단위 비율의 결정 상황은 불특정한 비율(분수)로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산한 양을 구하는 경우이다. 단위 비율의 결정 상황은, 포함제와 달리, 분수 나눗셈의 계산 결과와 실제 문제의 해가 그대로 일치할 수 있다는 장점이 있다.

Ma는 중국 교사가 제시한 문장제의 대부분(곧 80개의 문장제 중 약 78%인 62개)이 이러한 유형에 속했다고 하였다. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 단위 비율의 결정 상황은 구조적으로, Ma(2002)에 제시된 것과 같이, '어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는 그 어떤 수 알아내기'라고 할 수 있다. 이러한 구조를 간단히 그리고 일반적으로 나타내면 $b \div a$는 '어떤 수의 a만큼이 b가 되는 그 어떤 수 알아내기'이다.

그런데 이때 a와 b가 모두 자연수로 주어지면, b는 일정한 단위량의 '몇 배'라는 형태가 된다. 이에 비해 a와 b가 모두 분수로 주어지면, b는 일정한 단위량의 '몇 분의 몇'이라는 형태가 된다.

Ma는 중국 교사들의 대다수가 단위 비율을 결정하는 유형의 문장제를 제시하는 이유를 설명하는 과정에서, 이러한 미묘한 의미 변화에 주목했다. 그리고 그는 이러한 의미 변화라는 독특함 때문에, 중국 교사들이 분수 나눗셈의 의미를 부각하는 단위 비율을 결정하는 유형을 나타내는 문장제를 많이 만든 것으로 보고 있다. 우리나라의 경우 48명의 예비 초등 교사들 중에서는 2명만이 이러한 예를 제시하였다.

> ① 무게가 $1\frac{3}{4}kg$인 철봉의 길이를 재어 보았더니 $\frac{1}{2}$m이었다. 이 철봉 1m의 무게는 몇 kg일까?
> ② 어느 날 갑자기 마을의 자랑인 커다란 은행나무가 벼락을 맞아 정확히 반이 쪼개어졌다. 쪼개어진 나무의 높이가 $1\frac{3}{4}$m라고 한다면 원래 나무의 높이는 몇 m인가?[9]

이것으로 보면, 우리나라 예비 초등 교사들은 분수 나눗셈의 의미 중 단위 비율의 결정이라는 상황에 매우 취약하다고 할 수 있다. 이는 초등교사 양성 프로그램에서 초등예비교사들이 나누는 수가 자연수일 때의 등분의 의미를 분수의 나눗셈에서 '단위 비율의 결정'과 관련하여 깊게 이해할 수 있게 주의하여 지도할 필요가 있음을 시사한다.

4. 곱셈의 역

곱셈의 역 상황은 곱셈의 역조작으로서의 나눗셈하기를 의미한다. Ma(2002)가 '곱과 인수 모델'이라고 부르는 것을 Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)는 '곱셈의 역 상황'과 '카테시안 곱의 역 상황'으로 구분하고 있다. Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)는 곱셈의 역 상황으로 '피자를 좋아하는 아동은 48명이다. 이것은 샐러드를 좋아하는 아동의 수의 $1\frac{1}{2}$배이다. 샐러드를 좋아하는 아동은 몇 명인가?'와 같은 예를 들고 있다. 곱셈의 역상황은 배의 상황의 역을 의미하는 것으로 보인다. '카테시안 곱의 역' 상황은 직사각형의 넓이와 한 변의 길이를 알 때 다른 한 변의 길이를 구하는 상황과 같은 것이다. Ma는 세 명의 중국 교사가 곱과 인수 모델을 제시했다고 하며, 곱셈의 역상황과 카테시안 곱의 역 상황에 해당하는 예를 각각 하나씩 제시하고 있다.

다음은 Ma가 제시한 곱셈의 역 상황의 예이다.

> 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈은, 곱과 하나의 인수를 알고 있을 때 다른 인수를 나타내는 수를 알아내는 것입니다. 이러한 관점에서, 우리는 "어떤 인수와 $\frac{1}{2}$을 곱한 값이 $1\frac{3}{4}$이라면, 그 인수는 무엇인가?"와 같은 문장제 문제를 얻을 수 있습니다.(p. 76)

실생활 소재를 사용하여 곱셈의 역 상황 유형의 문제를 만든다면 '가방의 무게가 $1\frac{3}{4}$kg이다. 이 가방의 무게는 화분의 무게의 $\frac{1}{2}$이라

9) 나무가 쪼개어진다고 하면 일반적으로 높이보다는 폭으로 잘려나가는 경우를 생각하기 쉽다. 이와 같이 문제를 만든 학생의 표현에는 문제가 있지만 개념상의 문제가 없다고 보아 '높이의 반이 잘려나갔다'라는 표현으로 해석하였다.

고 한다. 화분의 무게는 얼마인가?'와 같은 문제를 만들 수 있다.[10] 곱셈과 나눗셈을 서로 연관시킬 수 있을 때, 이러한 문장제를 만들 수 있다. 우리나라의 예비 초등 교사 48명 중 이러한 예를 제시한 학생은 한 명도 없었다. 중국 교사들의 경우도 72명 중 1-2명이 이러한 예를 제시한 것으로 볼 때, 우리나라 예비 초등 교사들 중 단 1명도 이러한 예를 제시하지 않았다고 해서 특이하다고 볼 수는 없을 것이다. 그러나 우리나라 예비 초등 교사들이나 중국 교사들이 이러한 예를 거의 제시하지 않았다는 것은, 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈의 의미를 다양한 실제 상황 및 맥락과 관련지어 이해하게 하는 지도가 교사 양성 교육에서 의식적으로 이루어질 필요가 있음을 시사한다.

5. 카테시안 곱의 역 상황

양과 양의 곱 또는 차원과 차원의 곱은 동수누가나 배와는 구분되는 상황으로, 카테시안 곱의 상황에 해당한다. '카테시안 곱의 역 상황'은 바로 이러한 상황의 역을 말한다. 우리나라 예비 초등 교사 48명 중에서 단지 2명이 다음과 같은 3개의 예를 제시하였다.

① 넓이가 $1\frac{3}{4}cm^2$이고, 높이가 $\frac{1}{2}cm$인 평행사변형의 밑변의 길이는 몇 cm입니까?

② 넓이가 $1\frac{3}{4}m^2$인 직사각형 모양의 땅이 있습니다. 이 땅의 가로의 길이가 $\frac{1}{2}m$ 라면 세로의 길이는 몇 m입니까?

③ 넓이가 $1\frac{3}{4}m^2$인 직사각형 모양의 테이블 위에 TV를 올리려고 한다. TV는 테이블의 면과 꼭 맞게 하고 싶다. TV의 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$m라고 한다면 다른 한 변의 길이는 몇 m인가?

위의 예를 보면, 우리나라 초등예비교사들이 만든 카테시안 곱의 역에 해당하는 문장제는 모두 직사각형의 넓이를 소재로 하고 있다. 이는 넓이를 나타내기 위한 카테시안 곱에 나름대로 친숙하기 때문인 것으로 보인다. 그러나 이를 확장하면 밑넓이와 높이의 관계를 통해 기둥의 부피를 구하는 문제를 역의 관계로 나타낼 수 있는데도, 직사각형의 넓이 이외의 소재를 사용하여 더 이상의 다른 문장제를 만들지는 않았다. 또 "$1\frac{3}{4}km$의 거리를 가는데 $\frac{1}{2}$시간이 걸렸을 때 속력을 구하라"는 것과 같은 속도나 농도를 이용한 소재도 카테시안 곱의 역 상황의 나눗셈 문장제를 구성하는 데 사용할 수 있으나,[11] 이와 같은 문장제를 제시한 예비 초등 교사는 없었다.

이상 우리나라 예비 초등 교사 48명 중 개념적으로 적절한 문장제를 하나라도 만든 28명(약 58%)이 제시한 62개의 문장제의 유형을 표로 정리하여 제시하면 다음 <표 III-1>과 같다. 한 예비 초등 교사가 두 개 이상의 유형의 문장제를 제시한 경우가 있으므로 응답자 수의 합계는 의미가 없다.

IV. 결 론

본 연구는 분수의 나눗셈 지도법에 대한 학습을 하지 않은 우리나라의 예비 초등 교사들

---

10) 화분의 무게를 □라고 하면, □× $\frac{1}{2}$ = $1\frac{3}{4}$ 으로부터 □= $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

11) Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)의 연구에서는 속도나 농도는 카테시안 곱의 역 상황의 예로 언급되지 않았다.

이 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들 때 나타나는 오류 유형과 만든 문장제의 유형을 분석하여 그들이 분수 나눗셈의 의미를 어떻게 이해하고 있는지를 통해 교사교육에의 시사점을 얻고자 하였다. 이를 위해 Ma(2002)가 제시한 세 가지 오류 유형을 기초로 그 외에 또 다른 오류를 범하는지를 알아보고, 올바른 문장제를 만든 경우는 Sinicrope, Mick와 Kolb (2002)가 분수 나눗셈의 의미로 제시한 '포함제', '등분제', '단위 비율 결정', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'의 다섯 가지로 나누어 살펴보았다.

우리나라 예비 초등 교사 48명 중 32명(약 67%)이 한 개 이상의 잘못된 문장제(총 88개, 약 59%)를 제시하였다. 잘못된 답안 중에서는 분수 나눗셈의 오류 유형으로 구분할 수 있는 48개의 문장제만을 분석의 대상으로 삼았다.

예비 초등 교사 15명이 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '2로 나누기'로 오해하면서 비교적 많은 예를 제시했다는 점에서 이것은 일상 언어와 수학적 언어 사용의 불일치에 기인하는 구조적인 오류로 보인다. 이는 교사 교육의 과정에서 예비 초등 교사들이 이러한 오해에 주목하게 하고, 그것

우는 1명(2%)으로, 이는 동일한 오류를 범한 미국 교사들의 백분율(26%)에 비해 상당한 차이가 있다. '$\frac{1}{2}$로 나누기', '2로 나누기', '$\frac{1}{2}$을 곱하기'를 모두 동일한 것으로 동시에 간주하는 오해를 보여주는 예는 없었다. 한편, Ma (2002)에는 소개되지 않은 것으로 $1\frac{3}{4} \times 2$에 적합한 문장제를 만드는 경우가 적지 않았다. 이와 같은 유형은, 우리나라 예비 초등 교사들이 분수로 나누는 것은 나누는 분수의 역수를 곱하면 된다는 나눗셈 알고리즘에 익숙한 반면, 분수 나눗셈의 의미에 취약하기 때문인 것으로 보인다. 그리고 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$로 빼기'로 오해하는 경우도 있었다.

Ma(2002)의 연구에서, 중국 교사들이 만든 문장제의 대부분(78%)이 '단위비율의 결정 상황'의 문제인 것과 달리, 우리나라 예비 초등 교사들은 단지 2명이 단위 비율을 결정하는 유형의 문장제를 소수 제시하였다. 우리나라 예비 초등 교사들이 만든 올바른 문장제 중의 약 90%가 '포함제'였으며, 사람, 병, 봉지의 수 등 이산량을 소재로 사용한 것이 대부분이었다. 개념적으로 옳게 만든 문제라도 대부분은 실제 문제 상황의 해(자연수)와 계산 결과(분수)가 일치하지 않는 문제점을 지닌 포함제 상황의 문제를 만든 것이다. 한편, '배로서의 곱셈의 역 상황'에 해당하는 문장제의 예를 제시한 사람은 없었고, 2명이 '카테시안 곱의 역 상황'에 해당하는, 직사각형의 넓이를 소재로 한 문장제를 제시하였다.

<표 III-1> 문장제의 각 유형에 대한 응답자 수와 문항 수

문장제 유형		응답자수	문항 수
포함제	몫이 자연수의 이산량인 경우	27	53
	배 개념을 이용	2	3
단위 비율의 결정		2	3
(배로서의) 곱셈의 역		0	0
카테시안 곱의 역		2	3

우리나라 예비 초등 교사들은 배 개념을 이용한 포함제와 단위 비율의 결정이라는 분수 나눗셈의 의미에 대한 이해뿐만 아니라, 포함제가 분수 나눗셈 상황에서 지니는 문제점에 대한 인식이 부족한 것으로 보인다. 그리고 나눗셈이 곱셈과 역연산의 관계에 있다는 것을 지식으로는 알고 있고 또 두 분수의 곱을 계산할 수는 있어도, 자연수가 아닌 분수나 소수의 배로서의 곱셈 또는 카테시안 곱의 역 상황을 이용하여 분수 나눗셈 문제를 만들 수 있다는 인식을 그다지 하지 못하는 것으로 드러났다.

따라서 예비 초등 교사들을 위한 교육의 과정에서는 나눗셈의 의미와 여러 가지 모델을 통한 학습의 경험도 필요하겠지만, 특히 분수의 나눗셈에서 몫이 자연수가 아닌 경우 포함제의 제한점이나 등분제와 단위 비율의 결정을 서로 관련지어 이해하게 할 필요가 있다. 그리고 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈의 의미를 다양한 실제 상황 및 맥락과 관련지어 이해하게 하는 의식적인 지도가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. **학교수학** **5**(2), 223-240.

서관석 · 전경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구:교사교육적 관점. **수학교육학연구, 10**(1), 103~114.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교출판부.

이종욱(2003). 예비 초등 교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교수학적 지식. **수학교육학연구** **12**(4), 447-462.

Freundenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel publishing company.

Graeber, A. O., & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions on solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 95-102.

Ma, L. (2002). **초등학교수학 이렇게 가르쳐라**. 신현용 · 승영조(역). 서울: 승산. (영어 원작은 1999년 출판)

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 233-254.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions.* (pp. 153-161). (2002 Yearbook). VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Press

A Study on Understanding of the Elementary Teachers in Pre-service with respect to Fractional Division

Park, Kyo Sik (Gyeong-In National University of Education)
Song, Sang Hun (Gyeong-In National University of Education)
Yim, Jae Hoon (Gyeong-In National University of Education)

The purpose of this study was to analyze the error patterns and sentence types in word problems with respect to $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ which were made by the pre-service elementary teachers, and to suggest the clues to the education in pre-service. Korean elementary teachers in pre-service misunderstood 'divide with $\frac{1}{2}$' to 'divide to 2' by the Korean linguistic structure. And they showed a new error type of $1\frac{3}{4} \times 2$ by the result of calculation.

Although they are familiar to 'inclusive algorithm' they are not good at dealing with the fractional divisor. And they are very poor at the 'decision the unit proportion' and the 'inverse of multiplication'. So, it is necessary to teach the meaning of the fractional division as 'decision the unit proportion' and 'inverse of multiplication' and to give several examples with respect to the actual situation and context.

* key words : fraction(분수), division(나눗셈), inclusive algorithm(포함제), word problems(문장제), error pattern(오류 유형), teacher education in pre-service(예비교사교육)

논문접수 : 2004. 7. 23
심사완료 : 2004. 8. 24