한국항해항만학회지 제28권 제8호, pp. 653~657, 2004 (ISSN-1598-5725)
Journal of Korean Navigation and Port Research

자유자이로를 이용한 위치결정에 관한 기초 연구

박석주* · 정태권**

*한국해양대학교 해양시스템공학부, ** 한국해양대학교 운항시스템공학부

A Basic Study on Position Fixing by Free Gyros

Sok-Chu Park · Tae-Gweon Jeong***

**Division of Marine Systems Engineering, Korea Maritime University, Pusan 606-791, Republic. of Korea*
***Division of Ship Operation Systems Engineering, Korea Maritime University, Pusan 606-791, Republic. of Korea*

요 약 : 이 논문은 자유자이로의 방향보존성을 이용하여 위치를 결정하는 방법을 이론적으로 유도한 것이다. 즉, 임의 위치에서 두 대의 자유자이로 회전축의 경사각과 기준 위치로부터 측정한 경과 시간을 기본 요소로 하여 위치를 결정하는 시스템을 제시하고 이 시스템을 구축할 때 나타나는 문제점을 열거하였다.

핵심용어 : 자유자이로, 경사각, 적경, 자이로벡터, 위치벡터, 자전각속도

Abstract : *The authors aim to design further an upgraded and self-contained position fixing system to meet the future commercial requirements. As a first step this paper is to investigate the theoretical structure of position fixing based on the nature of free gyro, in which the tilt angles of the two spin axes at an arbitrary position are measured respectively and the elapsed time with respect to a reference position or starting point is observed. And it illustrates some limitations to be expected in this system.*

Key words : *free gyro, tilt angle, right ascension, gyro vector, position vector, angular velocity of the earth's rotation*

1. 서 론

지구상에서 위치를 측정하는 것을 항법이라고 할 수 있는데 그 방법은 다양하다. 먼저, 인간이 지구상에서 출현한 이후부터 사용되어 온 지리적, 수리적 특성을 이용한 항법, 천체를 이용한 항법, 지상 전파를 이용한 지상 전파항법, 위성을 이용한 위성항법, 뉴턴 역학을 이용한 관성항법 등이 있다.

이런 항법장치 중에서 위성항법인 GPS는 해상, 지상, 공중에서도 그리고 전천후로 정확한 위치 정보를 제공하고 있어 주도적인 항법시스템으로 그 자리를 점하고 있다. 게다가 DGPS 등의 보정 기술의 발달로 GPS는 현대 생활에 없어서는 안 될 문명의 이기로서 생활 전반에 영향을 주고 있다. 그러나 GPS는 항법시스템으로서 그것에 대한 의존성이 아주 높다는 점과 전파교란에 대해 치명적인 취약점 등을 가지고 있어 그에 대한 백업시스템이 강조되고 있다(John A. Volpe, 2001). 관성항법장치는 이것과는 다르게 외부에 송신국(위성, 지상)이 없어도 이동체인 선박에서 독립적으로 위치를 측정하는 방식이다. 이 점은 이 연구에서 제안하려는 시스템과 같으나, 관성항법시스템은 측정시각까지 이동체의 3축 방향 가속도를 측정하여 각각 방향에서의 속도를 구하고 다시 이들 방향에서의 거리를 구하여 이것들을 앞서 측정한 위치에 가감하여 현재의 위치를 구하는 방식이다. 그러다 보니 시간의 경과에 따라 위치의 누적오차가 크게 발생한다.

이런 점을 고려하여 이 연구에서는 위에서 기술한 GPS 혹은 DGPS에 대한 백업 혹은 대체 항법으로서 또 관성항법에서 나타나는 거리의 누적오차 없는 항법시스템으로서 3축이 자유로운 자이로스코프(free gyroscope)(이하 '자유자이로'라고 함)를 이용한 위치결정시스템을 제시하려고 한다.

이 연구에서는 마찰이 없는 이상적인 자유자이로를 이용한다고 가정하고 위치 측정방정식을 유도하기로 한다.

2. 자유자이로의 특성과 위치측정방정식

2.1 자유자이로의 특성

고속으로 회전하고 있는 자유자이로는 그 회전축의 방향을 그대로 유지하려는 성질이 있다. 이것을 자이로축의 방향보존성(gyroscopic inertia)이라고 한다. 지구는 하루에 한번씩 자전을 하고 있으므로 이 방향보존성에 의하여 자이로축은 운동을 하고 있는 것처럼 보인다. 이것을 자이로축의 시운동이라고 한다. 이렇게 시운동이 생기므로 임의 위도 λ에서는 지반의 운동은 식 (1)로 표현된다(A. Frost, 1982).

* 대표저자 : 박석주(정회원), poseidon@mail.hhu.ac.kr 051)410-4305
** 종신회원, tgjeong@mail.hhu.ac.kr 051)410-4246

$$Dg = \Omega \sin\lambda \qquad (1)$$
$$Tg = \Omega \cos\lambda$$

여기서 Ω는 지구의 자전각속도이며, Dg는 지반의 선회운동을 표시하고 Tg는 지반의 경사운동을 의미한다. 따라서 자유자이로는 지구상의 어느 위치에서도 식 (1)로 주어지는 시운동을 하게 된다.

한편 지구의 자전각속도 Ω는 1 항성일(sidereal day)을 기준으로 한 것으로 사용한다(NIMA, 1997).

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.091} = 0.000072921158\,(rad/\sec) \qquad (2)$$

2.2 위치측정방정식 유도

지구를 구로 가정하고 지구 중심을 지나는 구 좌표계를 Fig. 1과 같이 우수좌표계를 설정한다. 즉, X축은 춘분점을 지나 천구와 만나는 선이고, Y축은 X축과 90°가 되며 천의 적도면을 지나는 선이라고 한다. 그러면 Z축은 지구의 회전축으로 천의 북극을 지난다. 각 축의 단위벡터를 각각 i, j, k라고 한다.

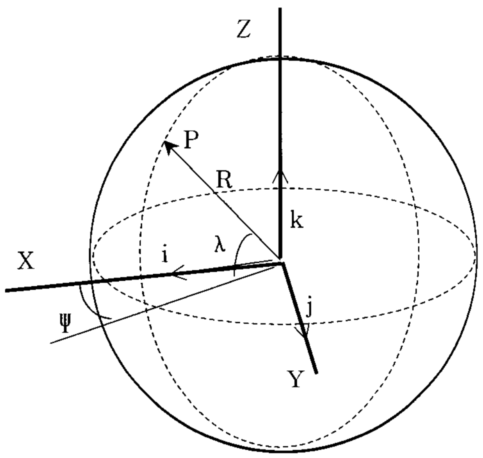

Fig. 1 Spherical Coordinate

그러면 임의 위치 P점을 지나는 위치벡터 R은 다음과 같이 표현된다.

$$R = R(\,i \cos\lambda\cos\psi + j\cos\lambda\sin\psi + k\sin\lambda)$$

단, λ는 위도(적위)[1]를 표시하며, ψ는 춘분점으로부터 측정한 적경[2]을 의미한다. R은 지구 중심에서 임의 위치 P까지의 거리이다. 이 위치벡터 $\boldsymbol{R}$ 을 단위벡터로 표시하면 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} n &= \frac{R}{R} \\ &= i\cos\lambda\cos\psi + j\cos\psi\sin\psi + k\sin\lambda \end{aligned} \qquad (3)$$

2.2.1. 두 대의 자유자이로가 특정방향을 가리키고 있는 경우

두 대의 자유자이로 중 한 대는 천구의 북극을 향하게 설치하고, 다른 한 대는 춘분점을 향하도록 설치한다고 가정한다. 그러면 단위벡터로 표시되는 두 개의 자이로벡터는 각각 식 (4)로 표시된다.

$$\begin{aligned} g_1 &= k \\ g_2 &= i \end{aligned} \qquad (4)$$

지구상 임의의 위치에서 지구 중력 방향은 그 위치에서 위치벡터의 방향과 반대가 된다. 그래서 이 위치벡터와 자이로벡터와의 사이각, 다른 말로 자이로축의 경사각을 각각 θ_1, θ_2라고 하고 위치벡터와 자이로벡터 사이의 내적을 구하면 각각 식 (5)로 표시된다.

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= g_1 \cdot n = \sin\lambda \\ \cos\theta_2 &= g_2 \cdot n = \cos\lambda\cos\psi \end{aligned} \qquad (5)$$

그러니까 두 개의 경사각을 알면 식 (5)에서 위도와 적경을 곧바로 구할 수 있게 된다.

지구 자전각속도를 식 (2)의 Ω라 하고, $t=0$에서 춘분점에 대한 본초자오선의 위상각을 DL_o, 경도를 L_0라고 하면 적경은 식 (6)으로 표현된다.

$$\psi = DL_0 + L_0 + \Omega t \qquad (6)$$

시간의 경과 t와 위상각 DL_0를 알고 있으므로 식 (6)을 이용하여 곧바로 경도를 구할 수 있게 된다.

2.2.2 두 대의 자유자이로가 임의 방향을 가리키고 있는 경우

두 대의 자이로가 서로 다른 임의의 방향을 가리키고 있고, 이들 자이로벡터가 각각 단위벡터이고 식 (7)과 같이 표시된다고 하자.

$$\begin{aligned} g_1 &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ g_2 &= b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned} \qquad (7)$$

식 (7)의 두 자이로벡터는 두 개의 항성과 같은 역할을 한다. 이들 항성의 적위를 각각 λ_a, λ_b라고 하고 적경을 각각 ψ_a, ψ_b라고 하면 식 (8), 식 (9)로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \tan^{-1}\frac{a_2}{a_1} \\ \psi_a &= \tan^{-1}\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \end{aligned} \qquad (8)$$

1) 적위(declination)란 천체(여기서는 관측자)를 지나는 천의 자오선 상에서 천의 적도로부터 천체까지의 호를 말한다. 천의 적도 자체가 지구의 적도를 천구까지 연장한 것이므로 별 혹은 관측자의 위도라고 할 수 있음.

2) 적경(right ascension)이란 춘분점(vernal equinox or point)을 지나는 천의 자오선과 천체(여기서는 관측자)를 지나는 천의 자오선이 극에서 이루는 각을 말함. 이는 천의 좌표에서 춘분점을 기준으로 한 별 혹은 관측자의 경도라고 볼 수 있음.

$$\lambda_b = \tan^{-1}\frac{b_2}{b_1}$$
$$\psi_b = \tan^{-1}\frac{b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \tag{9}$$

또 두 자이로벡터와 위치벡터의 내적을 취하면 각각 식 (10)로 표시된다.

$$\begin{aligned}\cos\theta_5 &= g_1 \cdot n \\ &= a_1\cos\lambda\cos\psi + a_2\cos\lambda\sin\psi \\ &\quad + a_3\sin\lambda \\ \cos\theta_6 &= g_2\cdot n \\ &= b_1\cos\lambda\cos\psi + b_2\cos\lambda\sin\psi \\ &\quad + b_3\sin\lambda\end{aligned} \tag{10}$$

물론 ψ는 식 (6)으로 표시된 것이다.

식 (10)에서 자이로벡터의 성분 a_1, a_2, a_3와 b_1, b_2, b_3를 모르기 때문에 이를 먼저 구하여야 한다. 위치를 알고 있는 곳에서 가동 중인 자이로가 있다고 하자. 그러면 위도 λ, 경도 L_0, 춘분점과 경도 0° 사이의 위상각 DL_0를 알고 있으므로 시간차를 두고 세 번 이상 위치벡터와 자이로벡터와의 사이각 θ_5, θ_6를 각각 측정한 다음 식 (11)과 (12)의 연립방정식을 만들어 이를 풀면 자이로벡터의 성분 a_1, a_2, a_3와 b_1, b_2, b_3를 각각 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_{51}\\ \cos\theta_{52}\\ \cos\theta_{53}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\lambda\cos\psi_1 & \cos\lambda\sin\psi_1 & \sin\lambda\\ \cos\lambda\cos\psi_2 & \cos\lambda\sin\psi_2 & \sin\lambda\\ \cos\lambda\cos\psi_3 & \cos\lambda\sin\psi_3 & \sin\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_{61}\\ \cos\theta_{62}\\ \cos\theta_{63}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\lambda\cos\psi_1 & \cos\lambda\sin\psi_1 & \sin\lambda\\ \cos\lambda\cos\psi_2 & \cos\lambda\sin\psi_2 & \sin\lambda\\ \cos\lambda\cos\psi_3 & \cos\lambda\sin\psi_3 & \sin\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 적경 ψ_1, ψ_2, ψ_3 및 경사각 $\theta_{51}, \theta_{52}, \theta_{53}$와 $\theta_{61}, \theta_{62}, \theta_{63}$는 각각 시간 t_1, t_2, t_3에서 측정하여 얻어진 값이다.

이렇게 구한 자이로벡터는 변하지 않으므로 이번에는 역으로 임의 시각에서 자이로축의 경사각을 구하면 식 (10)이 비록 비선형방정식이지만 이 식을 이용하여 그 임의 위치에서의 위도 λ와 적경 ψ를 곧바로 구할 수 있다. 적경이 구해지면 경과 시간 t와 위상각 DL_0를 알고 있으므로 식(6)을 이용하여 경도를 구할 수 있게 된다.

식 (10)의 비선형방정식은 다음과 같은 방법으로 선형화시킨다. 먼저 위도와 적경을 식 (13)과 같이 분해한다.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \Delta\lambda \\ \psi &= \psi_0 + \Delta\psi\end{aligned} \tag{13}$$

그러면 함수 $f(\lambda,\psi)$는 함수 $f(\lambda_0+\Delta\lambda, \psi_0+\Delta\psi)$로 나타낼 수가 있다. 이것을 테일러급수로 전개하면 다음과 같이 표현할 수 있다(G. B. Thomas & R. L. Finney, 1983). 이 테일러급수에서 1차항까지 사용하면 근사적으로 선형화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}f(\lambda,\psi) &\equiv f(\lambda_0+\Delta\lambda, \psi_0+\Delta\psi) \\ &= f(\lambda_0,\psi_0) + \frac{\partial f(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\lambda_0}\Delta\lambda \\ &\quad + \frac{\partial f(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\psi_0}\Delta\psi + \cdots\end{aligned}$$

한편 식 (10)을 위도 λ_0, 적경 ψ_0의 함수로 바꾸면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned}f1(\lambda_0,\psi_0) &= a_1\cos\lambda_0\cos\psi_0 + a_2\cos\lambda_0\sin\psi_0 + a_3\sin\lambda_0 \\ f2(\lambda_0,\psi_0) &= b_1\cos\lambda_0\cos\psi_0 + b_2\cos\lambda_0\sin\psi_0 + b_3\sin\lambda_0\end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)를 λ_0, ψ_0로 각각 편미분하면 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f1(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\lambda_0} &= -a_1\sin\lambda_0\cos\psi_0 - a_2\sin\lambda_0\sin\psi_0 + a_3\cos\lambda_0 \\ &= a\Lambda \\ \frac{\partial f1(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\psi_0} &= -a_1\cos\lambda_0\sin\psi_0 + a_2\cos\lambda_0\cos\psi_0 \\ &= a\Psi \\ \frac{\partial f2(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\lambda_0} &= -b_1\sin\lambda_0\cos\psi_0 - b_2\sin\lambda_0\sin\psi_0 + b_3\cos\lambda_0 \\ &= b\Lambda \\ \frac{\partial f2(\lambda_0,\psi_0)}{\partial\psi_0} &= -b_1\cos\lambda_0\sin\psi_0 + b_2\cos\lambda_0\cos\psi_0 \\ &= b\Psi\end{aligned} \tag{15}$$

식 (14)과 식 (15) 그리고 위의 테일러 급수의 1차항까지로 연립방정식을 구성하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned}\cos\theta_5 - f1(\lambda_0,\psi_0) &= a\Lambda\cdot\Delta\lambda + a\Psi\cdot\Delta\psi \\ \cos\theta_6 - f2(\lambda_0,\psi_0) &= b\Lambda\cdot\Delta\lambda + b\Psi\cdot\Delta\psi\end{aligned} \tag{16}$$

이를 다시 행렬로 표시하면 식 (17)과 같다.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_5 - f1(\lambda_0,\psi_0)\\ \cos\theta_6 - f2(\lambda_0,\psi_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\Lambda & a\Psi\\ b\Lambda & b\Psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\lambda\\ \Delta\psi\end{bmatrix} \tag{17}$$

식 (17)에서 $\Delta\lambda, \Delta\psi$가 0이 될 때까지 즉, λ_0, ψ_0가 λ, ψ와 같아질 때까지 반복하면 그 λ, ψ가 바로 위도와 적경이 된다. 적경을 구하고 나면 앞에서 말한 바와 같이 식 (6)을 이용하면 경도를 구할 수 있다.

3. 자유자이로에 의한 위치측정의 예

먼저 자이로벡터를 구하여야 하는데 이것은 알고 있는 위치에서 일정 시간간격으로 경사각을 측정한 후 식 (11)과 식(12)의 방정식을 풀면 구할 수 있다.
하나의 예로서 다음과 생각하여 본다.

○ 위치 : 북위 35.456216°, 동경 127.234261°
○ 경사각 :
- Gyro 1
  t=0(초) 84.14503077802169°
  t=4(초) 84.15778729405136°
  t=8(초) 84.17054304608634°

- Gyro 2
  t=0(초) 58.75116275701419°
  t=4(초) 58.76475211656175°
  t=8(초) 58.77834134666811°

○ 지구자전각속도

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.091} \ (rad/\sec)$$

○ 춘분점과 본초자오선과의 위상각

$$DL_0 = 0$$

이 위상각을 여기서는 0°로 하였지만 다른 각으로 하여도 위치를 측정하는 데에는 전혀 지장이 없음.

이들 값을 이용하여 식 (11)과 식 (12)를 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0.10201 \\ 0.10179 \\ 0.10157 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49287 & 0.64853 & 0.58008 \\ -0.49306 & 0.64838 & 0.58008 \\ -0.49325 & 0.64824 & 0.58008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.51876 \\ 0.51855 \\ 0.51835 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49287 & 0.64853 & 0.58008 \\ -0.49306 & 0.64838 & 0.58008 \\ -0.49325 & 0.64824 & 0.58008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

이들 방정식에서 성분 a_1, a_2, a_3와 b_1, b_2, b_3를 구한 후 자이로벡터로 표시하면 각각 다음과 같다.

$$g_1 = 0.81380\ i + 0.46985\ j + 0.34202\ k$$
$$g_2 = 0.44151\ i + 0.82951\ j + 0.34202\ k$$

여기서 구한 두 자이로벡터의 사이각은 30°이다.

일단 두 자이로벡터가 구해졌으므로 임의 시각에서 자이로축의 경사각을 측정하면 곧바로 위치를 구할 수 있다. 식 (13)에서와 같이 λ_0, ψ_0를 가정하고 식 (17)을 반복 이용하면 위치가 구해지게 된다.

가정위치를 북위 30°, 동경 120°로 하고 시간 $t=0$로 하여 식 (17)을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -0.06944 \\ -0.08362 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29620 & -0.81380 \\ 0.04738 & -0.69032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta\psi \end{bmatrix}$$

여기서 $\Delta\lambda, \Delta\psi$를 구하여 식 (13)으로 새로운 λ, ψ를 결정한다. 이 새로운 λ, ψ를 λ_0, ψ_0로 입력하여 다시 식 (17)을 구성하고 $\Delta\lambda, \Delta\psi$를 구한다. 이렇게 계속 반복하여 $\Delta\lambda, \Delta\psi$가 각각 0이 되면 계산이 종료된다. 이 때 위도는 그대로 사용하고 경도는 식 (6)을 이용하여 구한다. 이렇게 얻어진 위치는 원래의 위치와 같은 북위 35.456216°, 동경 127.234261°이다.

4. 자유자이로의 위치측정방정식에 대한 문제점 검토

앞 절에서 위치 측정방정식을 유도하고 이를 적용하여 보았다. 이 방정식에 의한 시스템으로 위치를 구하려고 하면 다음의 조건을 고려하여야 한다.

① 우선 위치벡터와 자이로벡터 사이의 각 즉 경사각을 측정하는 장치가 있어야 한다. 그것은 연직방향 자이로(vertical gyro)[3]를 이용하면 가능할 것이다.
② 다른 하나는 경도 계산에는 정확한 시계와 함께 지구 자전각속도의 값을 어느 것으로 사용할 것인가이다. 시계는 통상적인 수정시계라도 그 정확도가 극히 높으니 크게 문제될 것은 없는 것으로 보인다.
③ 지구의 자전각속도는 이 연구에서는 항성일을 기준으로 한 것을 이용하였는데 이것은 거의 상수 값으로 보면 되므로 이에 의한 오차는 거의 없을 것으로 보인다.
④ 다른 문제로는 위치 측정방정식을 유도할 때 지구를 구라고 가정하였는데 지구의 모습을 보다 잘 표현하고 있는 것이 WGS 84에서 정한 회전타원체이므로 이것에 따라 위치벡터는 수정되어야 한다.
⑤ 이 연구에서 제안된 위치측정방식의 결점은 2차원의 평면위치 정보만 제공하고 높이 정보는 제공하지 않은 점이다. 고도가 필요한 항공기에서는 고도계(height meter), 수심이 필요한 잠수함에서는 수심계(depth meter)와 같은 연직 방향의 거리측정용 계기를 이용하여야 할 것이다.

5. 결 론

이 연구에서는 두 대의 자유자이로의 경사각을 이용하여 위치를 측정하는 방정식을 도출하였는데 그 결과는 다음과 같다.

① 가동 중인 두 자이로벡터는 식 (11)과 식 (12)로 각각 구할 수 있다.
② 두 자이로벡터를 알고 있으므로 자이로 경사각을 측정하면 식 (17)을 여러 번 반복 계산하여 정확한 위치와 경도를 구할 수 있다.

두 대의 자유자이로를 이용한 위치 측정시스템은 제4장에서 말한 언급한 몇 가지 조건을 만족하여야 한다. 아울러 이를 실제에 적용하기 위하여서는 제작하여 위치 오차를 검정하여야 한다. 이들에 대하여서는 추후의 연구 과제로 남긴다.

---

3) 연직방향 자이로는 이 연구에서 다루는 자유자이로와는 전혀 다른 것으로 단순히 연직방향을 찾기 위한 것임. 자유자이로의 경사각은 연직방향으로부터 측정된 것이므로 관성항법 중 하나인 스트랩다운(strap-down) 방식의 이론식을 이용하면 경사각 측정이 가능할 것으로 판단됨. 따라서 이 vertical gyro는 필요하지 않을 수도 있음.

참 고 문 헌

[1] A. Frost(1982), "Marine Gyro Compasses for Ships' Officers", Brown, Son & Ferguson Ltd, p.10.

[2] George B. Thomas & Ross L. Finey(1983), "Calculus and Analytic Geometry", Addison-Wesley, p.644.

[3] John A. Volpe National Transportation Systems Center, "Vulnerability Assessment of the Transportation Infrastructure Relying on the Global Positioning System", August 29, 2001, pp. 41~56.

[4] NIMA WGS 84 Update Committee(1997), "Department of Defense World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic System", pp. 3~5.

원고접수일 : 2004년 4월 28일
원고채택일 : 2004년 8월 5일