

고유구조 지정을 이용한 다중출력 시스템의 강인한 관측기 설계

허 건 수[†], 남 준 철^{*}

(2003년 6월 26일 접수, 2004년 9월 1일 심사완료)

Robust Observer Design for Multi-Output Systems Using Eigenstructure Assignment

Kunsoo Huh and Joonchul Nam

Key Words : Robust Observer(강인한 관측기), Condition Number, Eigenstructure(고유구조), Sylvester Equation(Sylvester 방정식), Measure of Observability(관측도)

Abstract

This paper proposes a design methodology for the robust observer using the eigenstructure assignment in multi-output systems so that the observer is less sensitive to the ill-conditioning factors such as unknown initial estimation error, modeling error and measurement bias in transient and steady-state observer performance. The robustness of the observer can be achieved by selecting the desired eigenvector matrix to have a small condition number that guarantees the small upper bound of the estimation error. So the left singular vectors of the unitary matrix spanned by space of the achievable eigenvectors are selected as a desired eigenvectors. Also, this paper proposes how to select the desired eigenvector based on the measure of observability and designs the observer with small gain. An example of a spindle drive system is simulated to validate the robustness to the ill-conditioning factors in the observer performance.

1. 서 론

확정적 상태변수 관측기와 칼만 필터가 소개되어진 후, 관측기의 이론이나 응용분야에 많은 연구가 수행되어왔다. 이러한 관측기들은 제어 시스템이나 기계 감지 시스템에서 상태변수를 추정하는데 사용되어지고 있다. 그러나 일반적으로 사용되는 확정적 관측기들은 시스템 섭동이 있거나 측정오차가 있는 경우 제약을 받게 된다. 왜냐하면 이러한 요인으로 인해 종종 과도상태와 정상상태에서 큰 오차를 일으켜 거짓 정보를 발생시키기 때문이다. 이와 같이 오차를 발생시키는 요인들을 ill-conditioning 요소라고 할 수 있는데, 이러한 요

인들로는 초기 추정오차, 라운드 오프 오차, 모델링 오차, 그리고 센싱 편차가 있다. 따라서, 이러한 ill-conditioning 요소에 강인한 관측기의 설계가 필요하다. 이러한 단점을 해결하기 위해 플랜트 섭동에 근거한 강인한 극점배치법,⁽¹⁾ 고유구조 지정 기법,⁽²⁾ 그리고 강인한 PI 관측기⁽³⁾가 설계되기도 하였지만 이러한 관측기는 플랜트 섭동 경우만 적용될 수 있었다. 따라서 ill-conditioning 요소들을 동시에 고려하기 위해 관측기 설계시 관측기 성능에 크게 영향을 미치는 인자를 찾아내어 그 인자를 조절함으로써 관측기 성능을 개선시킬 수 있다. 최근, Huh and Stein⁽⁴⁾에 의해서 선형시스템에서 ill-conditioning 요소에 대한 관측기의 과도상태에서와 정상상태에서 성능을 좌우하는 주요 인자는 관측기 행렬의 L_2 -norm에 근거한 condition number와 그 고유벡터 행렬의 L_1 -norm에 근거한 condition number임이 밝혀졌다. 또한 이러한 인자들은 하나의 주지표로 통합될 수 있어서 관측기 설계시 기준을 마련 할 수 있으며 그 주지표는 관측기 행렬

[†] 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : khuh2@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0437 FAX : (02)2295-4584

^{*} 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

의 고유벡터 행렬의 L_2 -norm에 근거한 condition number이다.⁽⁴⁾ 그래서 이러한 condition number가 작은 값을 갖도록 관측기 게인을 조정함으로써 ill-conditioning 요소에 대해 강인성이 보장되는 관측기가 Huh and Stein⁽⁵⁾에 의해서 설계되었으나 단일출력 시스템에서만 적용하였다.

단일출력 시스템에서의 관측기의 추정성능은 대체로 고유값들에 의하여 지배를 받는다. 하지만 시스템이 다중출력이 되면 응답은 고유값들 뿐만 아니라 고유벡터들에 의해서도 영향을 받게 된다.⁽⁶⁻⁸⁾ 단일출력 가관측 시스템의 경우 페루프 시스템의 고유값들을 임의의 원하는 위치로 옮길 수 있게 하는 게인행렬은 유일하게 존재하지만, 다중출력 가관측 시스템의 경우는 게인행렬이 유일하게 결정되지 않고 일반적으로 무한히 많은 해가 존재하게 되는데 이는 옮기고자 하는 고유치들의 수보다 이득행렬에 주어지는 자유도가 많기 때문이다.⁽⁶⁻⁸⁾ 따라서, 원하는 관측기의 응답을 얻기 위하여 이러한 여유 자유도를 사용하여 고유값들 뿐만 아니라 고유벡터들도 동시에 배치하여야 한다. 임의의 고유벡터의 설정은 관측기의 성능이 ill-conditioning 요소에 의하여 민감하게 저하될 수 있다. 따라서 고유벡터의 설정이 다중출력 시스템에 대한 강인한 관측기 설계에 있어서 중요한 인자임을 알 수 있다.

강인한 고유구조 지정 기법들은 제어기 설계에 많이 연구되어 왔는데, Kautsky 등⁽⁹⁾과 Mudge 등⁽¹⁰⁾은 고유벡터 행렬이 가능한 well-conditioned되도록 원하는 극점들에 상응하는 우 고유벡터를 지정하였다. 그리고 Wilson 등⁽¹¹⁾은 Lyapunov 방정식과 고유구조를 이용하여 원하는 고유구조와 획득되는 고유구조 사이의 오차를 최소화하도록 하였다.

본 논문에서는 제어기 설계에 사용된 고유구조 지정 기법들^(8,12-14)을 이용하여 다중 출력 시스템에 대한 관측기를 설계하였다. 즉, 열공간, 영공간, 그리고 Sylvester 방정식 접근법을 이용하여 관측기를 설계하는 방법을 제시하였다. 또한 관측기 설계시 초기 추정오차, 라운드오프 오차, 모델링 오차, 센싱 편차 등의 ill-conditioning 요소에 강인한 관측기를 설계하기 위해 Rew, Junkins, and Juang⁽¹³⁾이 제시한 강인한 고유 벡터 지정 기법을 관측기 설계에 사용하였다. 이 기법은 고유구조로부터 획득 가능한 고유벡터가 존재하는 공간을 생성하여 이 영역의 유니타리 행렬들을 구하여 이들의 집합의 좌 특이 벡터들을 원하는 고유벡터로 사용하여 well-conditioned되도록 하는 방법이다. 그리고 원하는 고유벡터를 간편하게 설정할 수 있는 방법으로 관측도(measure of observability)에 근거하여 설

정하는 방법을 제시하였다. Hamdan 등⁽¹⁵⁾은 우 고유벡터가 출력 행렬 C 의 행벡터의 방향에 근접할수록 관측도가 커짐을 보였다. 그래서 이 값이 크도록 하여 고유값을 원하는 곳에 위치시키는데 필요한 게인의 크기를 줄일 수 있도록 하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 관측기의 고유구조를 정의하고 고유구조 지정 기법을 관측기 설계에 적용하였고, 3장에서는 고유벡터를 설정하는 방법을 통해 강인한 관측기를 설계하였다. 그리고 관측도에 근거한 원하는 고유벡터를 설정하는 방법을 제시하였다. 4장에서 spindle drive system의 예제를 통해 설계된 관측기의 성능을 검증하였으며, 마지막 5장에서 결론을 맺었다.

2. 고유구조를 이용한 관측기 설계

2.1 관측기의 고유구조 정의

다중출력 시불변 시스템을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in \mathbf{R}^n$ 는 상태변수, $u \in \mathbf{R}^m$ 는 입력변수, 그리고 $y \in \mathbf{R}^r$ 는 측정변수이다. 그리고 행렬 C 는 full row rank이고, 시스템 (C, A) 는 관측 가능하다고 가정한다.

관측기는 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (2)$$

여기서 L 은 관측기 게인 행렬이다.

서로 상이한 공역 복소수로 이루어진 고유값들의 행렬을 $A = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 라고 하고, 행렬 A 의 고유값과 다르다고 하자. 그러면 관측기의 고유구조는 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} (A - LC)\phi_i &= \lambda_i \phi_i \\ (A - LC)^T \psi_i &= \lambda_i \psi_i \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ϕ_i 와 ψ_i 는 각각 고유값 λ_i 에 대한 우 고유벡터와 좌 고유벡터를 나타낸다. 그리고 각각의 우 및 좌 고유벡터 행렬은 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ 와 $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$ 으로 정의한다.

2.2 관측기의 고유구조 지정

관측기의 게인을 구하기 위하여 다음과 같은 세 가지 고유구조 지정 방법을 이용하였다. 이들 방법들은 제어기 설계에 사용된 방법들이지만, 관측기의 설계에 있어서도 이러한 방법을 사용할 수 있다. 그리고 관측기 설계에 사용할 고유구조는

좌 고유구조를 사용한다. 왜냐하면 우 고유구조는 행렬 C 가 정방행렬이 아닐 경우 설계된 관측기 행렬의 고유값이 처음 위치시키고자 했던 원하는 고유값과의 일치성이 보장되지 않을 수 있기 때문이다.

2.2.1 열공간을 이용한 관측기 설계

열공간을 이용한 방법은 고유구조로부터 획득 가능한 고유벡터가 존재하는 열공간을 구하여 그 영역에서 원하는 고유벡터와 최소 자승 관점에서 최소가 되는 고유벡터를 구하는 것이다.⁽⁸⁾

식 (3)의 좌 고유구조를 다시 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_i &= (A - \lambda_i I)^{-T} C^T L^T \psi_i \\ \Rightarrow \psi_i^a &= M_i z_i \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $M_i = (A - \lambda_i I)^{-T} C^T$ 으로 정의하며 획득 가능한 고유벡터 (ψ_i^a)가 존재할 수 있는 열공간을 생성한다. 그리고 $z_i = L^T \psi_i$ 라고 정의하고, 원하는 고유벡터 (ψ_i^d)와 획득 가능한 고유벡터 사이의 오차를 나타내는 다음의 성능 지표를 최소화하도록 선택한다.

$$J = \|\psi_i^d - \psi_i^a\|^2 = \|\psi_i^d - M_i z_i\|^2 \tag{5}$$

결국 획득된 고유벡터와 선택된 z_i 를 통해 다음과 같이 관측기의 계인을 구하게 된다.

$$L = (\Psi^a)^{-T} Z^T \tag{6}$$

여기서 $\Psi^a = [\psi_1^a, \psi_2^a, \dots, \psi_n^a]$, $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ 이다.

2.2.2 영공간을 이용한 관측기 설계

영공간을 이용한 관측기 설계는 고유구조를 통해 획득 가능한 고유벡터가 존재하는 영공간을 생성하여 이 영역에서 원하는 고유벡터와 최대한 가까운 고유벡터를 선정하는 것이다.⁽¹²⁾

식 (3)의 좌 고유구조는 다음식과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$(\lambda_i I - A^T) \psi_i + C^T L^T \psi_i = 0 \tag{7}$$

위 식으로부터 영공간을 생성할 수 있으며,

$$Q_i \equiv \left[\lambda_i I - A^T \mid C^T \right] \quad N_i \equiv \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} \tag{8}$$

여기서 행렬 N_i 의 열들은 행렬 Q_i 의 영공간의 기저를 이루다. 그리고 N_{1i} 들을 이용해 아래와 같이 획득 가능한 고유벡터의 기저만으로 이루어진 행렬 Ψ_{aug}^a 을 구성한다.

$$\Psi_{aug}^a = [N_{11}, N_{12}, \dots, N_{1i}, \dots, N_{1n}] \tag{9}$$

다음으로는 우 고유벡터 행렬과 좌 고유벡터 행렬 간의 성질인 $\Phi^T \Psi = I$ 을 이용한 성능 지표, $J = \|\left(\Phi^d\right)^T \Psi_{aug}^a P - I\|$ 를 최소화하는 계수 행렬 (P)를 구하여, 획득 가능한 고유벡터를 다음식과 같이 구한다.

$$\Psi^a = \Psi_{aug}^a P \tag{10}$$

따라서 식 (10)의 획득된 고유벡터(Ψ^a), 기저(N_{2i}), 그리고 계수 행렬(P)을 통해 관측기 계인을 구하게 된다.

$$L = (\Psi^a)^{-T} W^T \tag{11}$$

여기서 $W = N_{2i} P$ 이다.

2.2.3 Sylvester 방정식을 이용한 관측기 설계

좌 고유구조는 다음과 같이 정의된 매개변수 $h_i = L^T \psi_i$ 를 도입하여 이것으로부터 고유벡터를 결정할 수 있다.

$$(A - \lambda_i I)^T \psi_i = C^T h_i \tag{12}$$

위 식을 행렬로 다시 정리하면, 일반적으로 알려진 Sylvester 방정식의 형태로 나타낼 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$A^T \Psi - \Psi \Lambda = C^T H \tag{13}$$

매개변수는 설계 목적에 맞게 임의로 정하거나, 위 식으로부터 원하는 고유벡터 행렬에 대하여 C^T 를 pseudoinverse시켜 구할 수 있다. 이를 다시 식 (13)에 대입하여 Sylvester 방정식을 만족하는 고유벡터 행렬을 얻을 수 있다. 이로써 획득된 고유벡터 행렬과 매개변수 행렬을 통해 관측기 계인 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$L = (\Psi^a)^{-T} H^T \tag{14}$$

여기서 $H = [h_1, h_2, \dots, h_n]$ 이다.

지금까지 고유구조를 이용하여 관측기를 설계하였는데 처음 언급된 두 가지 방법에서 최종 획득되는 고유벡터는 원하는 고유벡터와의 최소 자승 관점에서 얻어지기 때문에 그 특성이 원하는 고유벡터에 의해 결정됨을 알 수 있다. 따라서 강인성에 크게 영향을 미치는 것이 원하는 고유벡터의 선택에 있음을 알 수 있다. 그리고 마지막 방법은 매개변수를 선정하는 것이 가장 중요한 문제인데 이 매개변수 또한 원하는 고유벡터를 통해 결정할 수 있으므로 결국 위에서 언급된 방법들의 강인한 관측기의 설계를 위해선 원하는 고유벡터 선택의 문제로 귀결된다. 따라서 다음 절에서 강인한 관측기가 설계되도록, 원하는 고유벡터를 설정

하는 방법에 대해 살펴 보기로 한다.

3. 관측기의 원하는 고유벡터 설정

3.1 강인한 고유벡터 설정

이 절에선 condition number가 작게 나오도록 관측기 고유벡터를 설정하는 방법을 개발하기 위해 참고 문헌^(13,14)에 소개된 방법을 수정하여 적용하였다. 이 방법은 고유구조를 이용하여 획득 가능한 고유벡터들이 존재하는 열공간을 생성하여 이 영역을 통해 유니터리 행렬의 특이 벡터들을 원하는 고유벡터로 선정하는 것이다. 그리고 또한 원하는 고유벡터를 획득 가능한 고유벡터들이 존재하는 열공간을 이용하여 구할 수도 있는데, 이 방법을 이용하면 원하는 고유값과 행렬 A의 고유값이 같아도 특이성(singularity) 문제가 발생하지 않는 이점이 있다.

먼저 열공간을 통해 원하는 고유벡터를 얻도록 하자. 식 (7)을 식 (15)와 (16)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\psi_i = (A - \lambda_i I)^{-T} C^T L^T \psi_i \quad (15)$$

$$\psi_i = (A - \lambda_i I)^{-T} C^T h_i \quad (16)$$

위 식에서 알 수 있듯이 획득 가능한 고유벡터는 $(A - \lambda_i I)^{-T} C^T$ 의 열공간에 놓이게 된다. 이 영역을 생성할 수 있는 유니터리 기저 행렬 U_i 는 다음과 같이 특이값 분해 방법⁽¹⁶⁾을 이용하여 구할 수 있다.

$$(A - \lambda_i I)^{-T} C^T = [U_{1i} \quad U_{2i}] \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1i}^H \\ V_{2i}^H \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\psi_i = U_i h_i$$

여기서 $U_i = U_{1i}$ 로 정의한다. 위 식으로부터 획득 가능한 고유벡터가 존재하는 열공간이 유니터리 행렬에 의해 생성되어질 수 있음을 알 수 있다.

각각의 고유값에 대해서 구한 유니터리 행렬들의 집합을 $S = [U_1, U_2, \dots, U_n]$ 라고 정의한 후 다시 특이값 분해를 통해 좌 특이 벡터들을 구한다.

$$S = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^H \quad (18)$$

이렇게 구한 좌 특이 벡터 행렬 (\hat{U})의 특이 벡터들이 바로 원하는 고유벡터 ψ_i^d 가 되며 이는 식 (19)와 같이 최소 자승 문제로 나타낼 수 있다.

$$\psi_i^d = U_i h_i + e_i \quad (19)$$

획득 가능한 고유벡터는 다음 식과 같이 최소 자승 투영으로서 구할 수 있고,

$$\psi_i^a = U_i U_i^H \psi_i^d \quad (20)$$

이는 다음 식처럼 다시 표현 할 수 있다.

$$\|e_i\| = \|(I - U_i U_i^H) \psi_i^d\| \quad (21)$$

여기서 $k = \text{index}(i)$ 로써 식 (21)를, 즉 오차를 최소화 하도록 정한다. 이것은 각 고유값에 대한 고유 벡터의 순서를 다시 지정하는 것이다. 앞장 2.2.1과 2.2.2절에서 언급된 두 가지 방법에서 식 (18)에서의 좌 특이 벡터들을 원하는 고유벡터로 사용하면 관측기의 강인성을 위한 조건인 작은 condition number를 만족하는 강인한 관측기를 설계할 수 있다. 또한 2.2.3절에서 언급된 방법에서 관측기의 강인성을 위한 매개변수를 구하기 위해 위와 같이 구해진 획득된 고유벡터 행렬을 Sylvester 방정식에 적용하면 다음과 같이 매개변수 행렬을 구할 수 있다.

$$H = (C^T)^+ (A^T \psi^a - \psi^a \Lambda) \quad (22)$$

여기서 $(C^T)^+$ 는 행렬 C^T 의 Moore-Penrose pseudoinverse이다.

다음으로 열공간을 통해 원하는 고유벡터를 얻는 방법을 제시하도록 하겠다.

식 (7)을 식 (23)과 같이 정리한 후, 특이값 분해를 이용해 C^T 의 열공간 (N_{C^T})을 곱하여 식 (24)과 같은 형태를 구할 수 있다.

$$(A - \lambda_i I)^T \psi_i = C^T L^T \psi_i \quad (23)$$

$$N_{C^T}^T (A - \lambda_i I)^T \psi_i = 0 \quad (24)$$

위 식에서 알 수 있듯이 획득 가능한 고유벡터는 $N_{C^T}^T (A - \lambda_i I)^T$ 의 열공간에 놓이게 된다. 이 영역을 생성할 수 있는 유니터리 기저 행렬 U_i 는 다음과 같이 특이값 분해 방법을 이용하여 구할 수 있다.

$$N_{C^T}^T (A - \lambda_i I)^T = [U_{1i} \quad U_{2i}] \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1i}^H \\ V_{2i}^H \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서 $U_i = U_{1i}$ 로 정의한다. 위 식으로부터 획득 가능한 고유벡터가 위와 같은 유니터리 행렬의 열공간에 의해 생성되어질 수 있음을 알 수 있다. 이와 같이 생성된 유니터리 행렬들을 식 (18)과 같은 방법으로 좌 특이 벡터 행렬을 구하여 원하는 고유벡터를 지정할 수 있다. 만약 원하는 고유값과 행렬 A의 고유값이 같을 경우 원하는 고유 벡터는 이와 같이 얻을 수 있고, 2장에서 열공간을 이용한 고유구조 지정기법을 통해 강인한 관측기를 설계할 수 있다.

3.2 관측도(measure of observability)에 근거한 고유벡터 설정

앞 절에서의 원하는 고유벡터를 설정할 때 복잡한 수식 과정이 필요하였다. 그래서 쉽게 고유벡터를 설정하는 방법을 이 절에서 제안한다. 이러한 방법은 well-conditioning 측면에서는 좀더 연구가 필요하지만 관측기에서 크기가 작은 계인이 되도록 고유벡터를 선정할 수 있다. Hamdan 등⁽¹⁵⁾이 제시한 기본 개념인 관측도란 우 고유벡터가 출력 행렬 C의 행벡터와 수직에 가까울수록 관측성이 낮고 같은 방향일수록 관측성이 커진다는 개념이다. 그래서 만약 수직이면 관측 불가능하게 된다. 또한 페루프 시스템의 고유값들을 원하는 곳에 위치시킬 때 출력 행렬 C의 행벡터와 우 고유벡터가 이루는 각도에 따라 계인의 크기가 변함을 보였는데, 그 방향이 같을수록 크기가 작은 계인이 소요됨을 보였다. 즉, 같은 방향일수록 작은 크기의 계인으로도 원하는 고유값에 위치시킬 수 있음을 의미한다. 따라서 본 논문은 이러한 점에 착안하여 관측기의 원하는 고유벡터를 시스템의 출력 행렬 C의 행벡터에 근접하도록 선정하는 방법을 제안하여 관측기 행렬의 원하는 고유값들을 위치시키는 데 필요한 계인의 크기를 최소화하도록 하였다.

r번째 출력에서 i번째 모드의 관측도는 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁵⁾

$$\rho_{ri} = \cos \theta_{ri} = \frac{|c_r \phi_i|}{\|c_r^T\|_2 \|\phi_i\|_2} \quad (26)$$

또한 모든 출력에서 i번째 모드의 전체 관측도(gross measure of observability)가 다음과 같이 정의된다.

$$g_i = \left\| \frac{C \phi_i}{\|\phi_i\|_2} \right\|_2 \quad (27)$$

이와 같은 개념을 이용하여 다음과 같이 전체 관측도를 크게 할 수 있도록 원하는 고유벡터 행렬을 설정하는 방법을 제안한다.

$$\Phi^d = [\phi_p^d, \phi_q^d] \quad (28)$$

$$\begin{cases} \phi_p^d = c_p^T \\ \phi_q^d = \sum_{p=1}^r \alpha_{qp} (c_p^T) + \beta_q \left[\underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_n \right]^T \end{cases}$$

여기서 $p=1,2,\dots,r$, $q=r+1,r+2,\dots,n$, $0 \leq \alpha_p \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, α_p 는 정규화되고 전치시킨 출력 행렬 C^T의 p번째 열들에 가중치를 주는 관측성 가중 인자(observability weighting factor)이고, β 는 원하는 고유벡터 행렬의 특이성(singularity)를 막기 위한 보상

인자(compensating factor), 그리고 $\sum_{k=1}^r \alpha_k + \beta = 1$ 이다. 식 (28)에서 r개의 고유벡터들은 출력 행렬 C의 행벡터를 그대로 사용하여 최대한 출력 벡터 방향으로 하여 전체 관측도가 크도록 하였다. 그리고 나머지 고유벡터들은 가중 인자 α 를 이용하여 출력행렬 방향으로 고유벡터를 선정하도록 하였다. 이와 같이 원하는 고유벡터 행렬을 관측도 관점에서 설정할 수 있다.

4. 예 제

2 장과 3 장에서 설계된 관측기의 성능을 검증하고자 다음의 4th-order spindle drive system⁽⁴⁾에 대해 적용해 보기로 한다. 이 시스템은 관측가능하며 개루프 고유값들은 $\{-28.006 \pm j2026, -142.11, -384.38\}$ 이다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -22.5 & 250 & 0 & -2000 \\ -187.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 6000 \\ 250 & 0 & -600 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

관측기 설계에 있어서 상태변수 추정을 위해 요구되는 시간 상수는 0.25로 가정하였다. 그리고 사용된 원하는 고유값들은 $\{-50, -200, -350, -500\}$ 으로 정하였는데 대표극점은 시간 상수를 만족하도록 하였고, 나머지 극점들은 조밀하지 않도록 임의로 배치시켰다.

4.1 강인한 고유벡터 설정 기법에 의한 관측기

먼저, 3장의 열공간을 이용하여 얻어진 원하는 고유벡터와 매개변수를 2장에서 언급되었던 세가지 지정 기법을 통해 관측기를 설계한 결과가 관측기 1과 같이 설계되어 모두 같은 결과를 보였다. 그리고 강인성을 위한 관측기 행렬의 고유벡터 행렬의 작은 condition number를 만족하였다. 이는 원하는 고유벡터를 임의로 선택하지 않고 고유구조를 통해 획득 가능한 고유벡터가 존재하는 공간을 이용하여 구해진 특이 벡터를 원하는 고유벡터로 설정했기 때문이다.

다음으로는 설계된 강인한 관측기와 임의의 고유벡터 지정에 의해 설계될 수 있는 ill-conditioned 관측기의 추정 성능을 비교해 보기로 한다. 앞서 설계된 condition number가 작게 설계된 강인한 관측기가 관측기 1이고, 임의의 고유벡터 지정에 의

해 condition number가 커진 ill-conditioned 관측기를 관측기 2로 분류하였다.

관측기 1: 강인한 관측기

$$L = \begin{bmatrix} 27.5 & 0 & -2000.0 \\ -187.5 & 0 & 0 \\ 0 & 165.5 & 5943.7 \\ 250.0 & -656.3 & 324.5 \end{bmatrix} \kappa_2(\Psi) = 1.7$$

$$\Psi_{nor}^{ach} = \begin{bmatrix} -0.8742 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4856 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0.9112 & -0.4121 & 0 \\ 0 & 0.4121 & 0.9112 & 0 \end{bmatrix}$$

관측기 2: 임의의 고유벡터 지정에 의한 ill-conditioned 관측기

$$L = \begin{bmatrix} -2274.6 & -848.8 & -3358.9 \\ -1270.0 & -331.4 & -640.5 \\ 9330.0 & 3271.1 & 11290.0 \\ -683.0 & -928.1 & -479.0 \end{bmatrix} \kappa_2(\Psi) = 324.8$$

$$\Psi_{nor}^{ach} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7388 & -0.4950 & 0 \\ 0 & 0.6157 & -0.8250 & -0.9923 \\ 0.0995 & 0.2701 & -0.2456 & -0.1092 \\ 0.9950 & 0.0453 & -0.1187 & 0.0590 \end{bmatrix}$$

과도상태에서의 성능

모델링 오차도 없고 측정 편차도 없는 완전한 모델일 때의 추정 성능을 Fig. 1에서 보여 주고 있는데 본 논문에서 제안된 방법에 의해 설계된 관측기 1이 과도상태에서의 오차가 상당히 작음을 알 수 있다. 그리고 과도상태에서의 최대 오차와 적분 오차의 크기를 Table 1에서 보여주고 있는데 관측기 1의 성능이 더 우수함을 알 수 있다.

Table 1 Transient estimation error of x_2

	관측기 1	관측기 2
$\max x_2 - \hat{x}_2 $	0.1123	0.6131
$\int_0^{\infty} x_2 - \hat{x}_2 dt$	2.64e-4	0.0072

정상상태에서의 성능

설계된 두 관측기의 정상상태에서의 그 성능을 살펴보기 위해 아래의 세가지 경우(Case (a)-(c))에 대한 추정 성능을 비교해 보도록 한다.

Case (a): 모델링 오차가 있는 경우

즉, 시스템이 작동하는 동안 로드측 베어링의 댐핑 계수가 20% 줄어들고 부하 관성이 1/600에서 1/580 Kg·m²으로 변했다고 가정

Case (b): 시스템 행렬 A는 정확하지만, 입력 센싱에 +2%의 바이어스 편차가 있는 경우

Case (c): 시스템 행렬 A는 정확하지만, 출력 센싱에 +2%의 바이어스 편차가 있는 경우

상태 변수 추정 오차를 발생시킬 수 있는 위의 세가지 경우에 대해 Table 2에서 정상상태에서의 상대 추정 오차의 크기를 보여주고 있고, Fig. 2~4를 통해 그 형상을 볼 수 있다. 이것을 통해 condition number를 고려하여 설계된 관측기 1이 위와 같은 ill-conditioning 요소들에 대해 강인함을 확인할 수 있다.

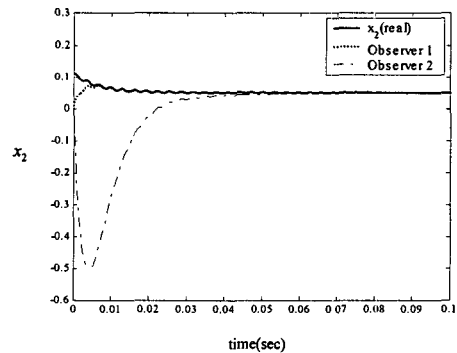


Fig. 1 Estimation of state x_2 for the perfect model

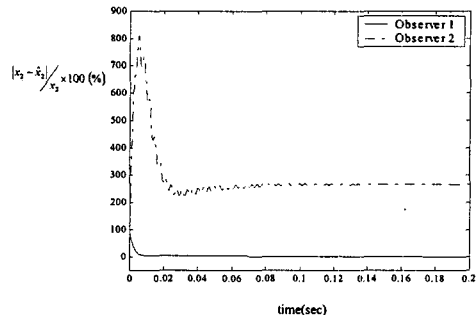


Fig. 2 Relative estimation error of state x_2 for the case (a)

Table 2 Steady state relative estimation error of x_2

$ x_2 - \hat{x}_2 /x_2 \times 100(\%)$	관측기 1	관측기 2
Case (a)	0	265.43
Case (b)	7.92	38.55
Case (c)	6.08	37.32

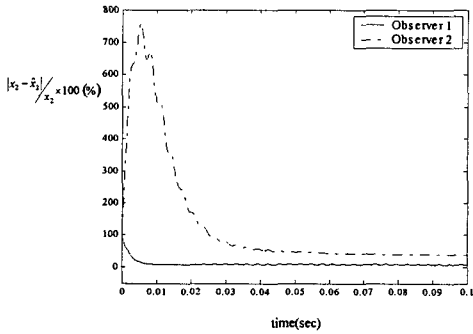


Fig. 3 Relative estimation error of state x_2 for the case (b)

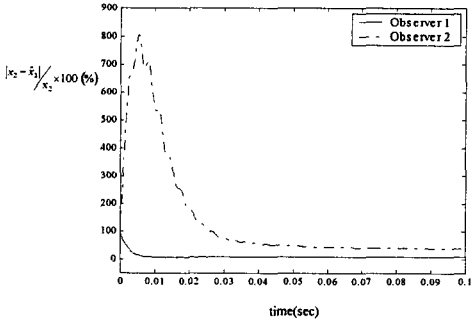


Fig. 4 Relative estimation error of state x_2 for the case (c)

4.2 관측도(measure of observability)에 근거한 고유벡터 설정 기법에 의한 관측기 관측도에 근거하여 원하는 고유벡터 행렬을 설정하여 관측기를 설계하도록 한다. 식 (28)에서 다음의 가중 인자를 사용하여 원하는 고유벡터 행렬을 선정할 수 있다.

$$\alpha_1 = 0.7 \quad \alpha_2 = 0.1 \quad \alpha_3 = 0.1 \quad \beta = 0.1$$

$$\phi_4^d = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Table 3 Gains of observer 3&4

	관측기 3	관측기 4
L	$\begin{bmatrix} 27.5 & 0 & -2000 \\ -187.5 & 0 & 0 \\ -147.5 & 140 & 6000 \\ -14.7 & -600 & 350 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -977.4 & -2208.1 & -5814 \\ 1621.4 & 3974.6 & 6865.2 \\ 11.6 & 313.9 & 6054.9 \\ 429.7 & -189.9 & 1181 \end{bmatrix}$
$\ L\ _2$	6336.8	11711.5
$\kappa_2(\Psi)$	4.5	97.1

Table 4 Measure of observability for observer 3&4

		ρ_i			g_i	
		output (r=1)	output (r=2)	output (r=3)		
관측기 3	λ_i	i=1	0.6035	0.5936	0.5325	1
		i=2	0	1	0	1
		i=3	0	0	1	1
		i=4	0.3628	0.1784	0.6403	0.7573
관측기 4	λ_i	i=1	0.5367	0.0050	0.0835	0.5432
		i=2	0.4838	0.0049	0.0866	0.4915
		i=3	0.4835	0.0446	0.0826	0.4925
		i=4	0.4820	0.0088	0.1219	0.4973

$$\Phi_{nor}^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.9363 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1170 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2341 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2341 \end{bmatrix} \quad \Phi_{nor}^{ach} = \begin{bmatrix} -0.3799 & 0 & 0 & -0.0650 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1170 \\ -0.3737 & 1 & 0 & 0.0320 \\ -0.3352 & 0 & 1 & 0.1148 \end{bmatrix}$$

고유구조 지정기법 중에서 우 고유벡터 행렬을 원하는 고유벡터 행렬로 사용하는 영공간 접근법을 이용하여 위와 같이 고유벡터 행렬을 얻을 수 있었고, 설계된 관측기는 Table 3에서의 관측기 3과 같다. 그리고 임의의 고유벡터 행렬을 지정하여 관측도가 작게 설계된 관측기 4와 비교하면 다음과 같다. Table 3과 4에서 알 수 있듯이 관측기 3이 계인이 작게 설계되었고, 관측도가 관측기 4에 비해 크게 설계되었음을 알 수 있다. 그리고 이러한 두 관측기의 추정 성능을 Fig. 5에서 보여주었는데 관측기 3이 더 우수한 추정성능을 보이고 있다.

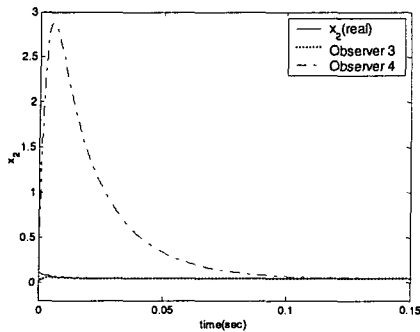


Fig. 5 Estimation of state x_2 for observer 3&4

5. 결론

다중 출력 시스템에 대해 좌 고유구조를 이용한 강인한 관측기를 제안하였다. 관측기의 강인성을 위한 주요 지표인 관측기 행렬의 고유벡터 행렬의 condition number를 작게 만들기 위한 방법으로 고유구조 지정기법에서 원하는 고유벡터의 설정을 통해 강인성을 보장하도록 하였다. 그래서 원하는 고유벡터는 관측기의 고유구조를 통해 얻을 수 있는 열공간이나 영공간을 통해 유니터리 행렬들을 구한 후 이들 집합의 좌 특이 벡터를 원하는 고유벡터로 정하여 최소자승 관점에서 최소가 되는 획득 가능한 고유벡터를 구하는 이러한 방식의 강인한 고유벡터 지정 기법을 제안하였다. 그리고 관측도에 근거하여 원하는 고유벡터를 설정하는 방법을 제안하였다. 이러한 방식으로 원하는 고유벡터를 설정하여 계인의 크기가 작은 관측기 쉽게 설계할 수 있도록 하였다.

설계된 강인한 관측기는 스펀들 드라이브 시스템의 예제를 통해 과도상태에서의 오차, 정상상태에서의 모델링 오차, 입력 센싱 편차, 그리고 출력 센싱 편차와 같은 ill-conditioning 요소들에 강인함을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 한국과학재단 목적기초연구 지원으로 수행되었음 (과제번호: R01-2003-000-10109-0)

참고문헌

(1) Bhattacharyya, S. P., 1976, "The Structure of Robust Observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 581-588.

- (2) Shen, L. C. and Hsu, P. L., 1998, "Robust Design of Fault Isolation Observers," *Automatica*, Vol. 34, No. 11, pp. 1421-1429.
- (3) Shafai, B. and Carrol, R. L., 1985, "Design of Proportional-Integral Observer for Linear Time-Varying Multivariable Systems," *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 597-599.
- (4) Huh, K. and Stein, J. L., 1994, "A Quantitative Performance Index for Observer-Based Monitoring Systems," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp. 487-497.
- (5) Huh, K. and Stein, J. L., 1995, "Well-Conditioned Observer Design for Observer-Based Monitoring Systems," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 117, pp. 592-599.
- (6) Liu, G. P. and Patton, R. J., 1998, Eigenstructure Assignment for Control System Design, *John Wiley & Sons*.
- (7) Choi, J. W. and Seo, Y. B., 2000, "A Survey on Eigenstructure Assignment," *J. of Control, Automation and Systems Engineering*, Vol. 6, No. 10, pp. 854-870.
- (8) Andry, A. N. Jr., Shapiro, E. Y. and Chung, J. C., 1983, "Eigenstructure Assignment for Linear Systems," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 19, No. 5, pp. 711-729.
- (9) Kautsky, J., Nichols, N. K. and Van Dooren, P., 1985, "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback," *Int. J. of Control*, Vol. 41, No. 5, pp. 1129-1155.
- (10) Mudge, S. K. and Patton, R. J., 1988, "An Analysis of the Technique of Robust Eigenstructure Assignment with Application to Aircraft Control," *IEE Proc. D*, Vol. 135, pp. 275-281.
- (11) Wilson, R. F., Cloutier, J. R. and Yedavalli, R. K., 1992, "Control Design for Robust Eigenstructure Assignment in Linear Uncertain Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 12, No. 5, pp. 29-34.
- (12) Choi, J. W., Lee, J. G., Kim, Y. and Kang, T., 1995, "Design for an Effective Controller via Disturbance Accommodating Left Eigenstructure Assignment," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 2, pp. 347-354.
- (13) Rew, D. W., Junkins, J. L. and Juang, J. N., 1989, "Robust Eigenstructure Assignment by a Projection Method: Applications Using Multiple Optimization Criteria," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 3, pp. 396-403.
- (14) Junkins, J. L. and Kim, Y., 1993, Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, *AIAA Education Series*.
- (15) Hamdan, A.M.A. and Nayfeh, A.H., 1989, "Measures of Modal Controllability and Observability for First- and Second-Order Linear Systems," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 12, No. 3, pp. 421-428.
- (16) Golub, G. H. and Van Loan, C. F., 1996, Matrix Computation, *The Johns Hopkins University Press*.