

이중 소프트웨어의 통합적 사용에 의한 구조물 제한최적화 방법론

Integration Methodology of Different Software Tools for Constrained Optimization of Structures

Lluís Gil, Antoni Andreu, Elena Blanco

Department of Strength of Materials and Engineering Structures, Universitat Politècnica de Catalunya, Mòdul C1, Campus Nord UPC, c/Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain



이 지 호*



김 경 호**

*동국대학교 토목환경공학과 조교수
**동국대학교 토목환경공학과 대학원

공학 문제 해결에 널리 쓰이는 수치계산 소프트웨어의 합리적 통합으로 구조물의 제한최적화 문제를 해결하는 기법을 제시하였다. 본 번역기사의 원문은 *Computers and Structures*, 2004년 82호 pp. 1639-1647 에 발표된 논문이다.

1. 서 론

1.1 문제 개론

구조 최적화의 목적은 다음과 같은 n개의 설계변수에 대한 최적값을 구하는 것이다.

$$\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \tag{1}$$

여기서 x_i 는 횡단면, 관성, 재료의 탄성계수, 절점의 좌표, 또는 조인트, 플레이트의 두께 그리고 정량화될 수 있는 경제적, 미학적 양 등이다.

최소화하려는 목적함수는 다음과 같다.

$$f(\mathbf{x})=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2}$$

여기서 f 는 무게, 비용, 또는 설계자나 설계기준에 부합하는 함수 등이 될 수 있다. 아울러 다음과 같은 m개의 설계제한조건(design constraints)을 만족시킨다.

$$g(\mathbf{x})=g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \quad i=1, \dots, m \tag{3}$$

보통 제한조건은 재료성질에 따른 최대허용응력 또는 최대허용변위에 의해 결정된다. 제한조건은 부등식으로 표현되는 것은 일반적이나, 식 (3)과 같은 형태로 변형시킬 수 있다.¹⁾

제한조건은 구조물의 경계값 문제를 통하여 제시된다. 구조 문제는 트러스, 판, 셸, 솔리드 등의 매우 다양한 형식을 포함하며, 모두 평형조건과 적합조건을 만족하여야 한다. 가상변위원리는 포텐셜 에너지의 최소화를 보장하고, 모든 종류의 구조물의 해법에 대한 일반식을 제공한다.^{2),3)} 구조물의 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V \delta \epsilon \sigma dV = \int_V \delta u b dV + \int_{\sigma_V} \delta u t dS \tag{4}$$

여기서, $\delta \epsilon$ 는 가상변형률, σ 는 구조물의 응력, δu 가상변위장이며, b 와 t 는 각각 체적과 표면에 가해진 외력이다. 식 (4)로부터 해를 구하는 대표적인 방법으로는 유한요소법이 있다.

1.2 문제점

일반적인 최적화 방법론의 개발에는 많은 문제점이 발생한다. 무엇보다 설계변수를 수학적으로 정의하기가 어

려우며, 특히 복잡한 기하학적 형상을 가진 경우는 더욱 그러하다. 설계변수의 속성이 기하학적 좌표에서 재료의 성질에 이르기까지 광범위하다는 점도 설계변수 정의를 어렵게 하는 요인이다. 직접적인 물리량의 사용보다 적합한 비율을 변수로 사용함으로써 어려움을 일부 완화할 수 있으나 완전히 제거되진 않는다.

설계변수에 관한 목적함수 (2) 또한 외연적이고 직접적으로 정의하는 것이 복잡하고 어려울 수 있다. 그러나 구조최적화 문제의 큰 어려움은 예외 없이 설계제한조건을 함께 다루어야 한다는 점이다. 심지어 가장 간단한 경우에서도 구조최적화 문제는 비선형이 된다. 비선형 문제에서는 제한조건식을 식 (3)과 같은 간단한 외연식 형태로 변환하기 힘들다. 더욱이, 실제적인 경우에서는 제한조건은 상용 유한요소 소프트웨어를 이용하여 평형방정식 (4)의 해를 기반으로 구성된다. 식 (4) 또한 비선형문제가 될 수 있으며 상기한 문제와 아울러 구조최적화 문제의 해법을 매우 복잡하게 만든다. 라그랑지 곱수(Lagrange multipliers), 페널티함수(penalty function) 또는 장벽함수(barrier function) 등을 사용하여 제한조건이 부가된 최적화 문제를 제한조건이 없는 문제로 변환하여 해를 구하며, 이러한 해법의 다양성과 전술된 어려움들에 기인하여 구조최적화 해석의 단일 방법론을 제시하는 것은 불가능하다.

이 논문의 목적은 구조물 최적화를 위한 간단한 방법론을 제안하는 것이다. 제안된 방법은 일반적이고 개방형이다. 즉 어떤 FEM 소프트웨어와 어떤 최소화 전략도 이용할 수 있다. 이 방법론은 개개의 해석 환경에 쉽게 구현될 수 있다고 생각한다. 각각 다른 상용 소프트웨어와 최소화 전략을 사용하는 두 가지 예제를 보여줄 것이다. 제안된 방법론이 유체나 열 문제 등과 같은 다른 공학 문제에 적용될 수 있다고 기대한다.

2. 방법론

본 논문의 방법론에서는 이미 설계변수들은 정의되었고 사용될 FEM 소프트웨어와 제한조건 없는 경우에 대한 최소화 방법을 결정하였다고 가정한다. 제안된 방법론은 두 개의 주요 단계를 가진다. 첫 단계는 최적화 문제를 해석식으로 구성하는 것이고, 두 번째는 최소화하는 단계이다.

2.1 1단계: 문제 구성

많은 경우에 있어 목적함수와 제한조건이 설계변수로 표현되는 것이 어렵기 때문에 본 논문에서는 보간법을 사

용하여 문제를 구성하는 것을 제안한다. 방정식 (2), (3)의 직접적 표현 대신, 목적함수와 제한조건 모두는 보간법을 사용하여 생성된다. 먼저 다음과 같은 n개의 설계변수를 선택한다.

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{5}$$

다음으로 목적함수와 제한조건에 적합한 보간법을 선택한다. 설계변수와 문제에 알맞은 다항함수, 스플라인, 삼각함수 등을 이용한 보간법을 사용해야 한다.⁴⁾ 기본이 되는 두 개의 함수군을 고려한다. 이 두개의 함수군은 다음과 같은 np개의 함수와 nh개의 함수로 구성된다.

$$\langle p_1(\mathbf{x}) \dots p_{np}(\mathbf{x}) \rangle \text{ and } \langle h_1(\mathbf{x}) \dots h_{nh}(\mathbf{x}) \rangle \tag{6}$$

그러면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{np} c_i p_i(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{nh} b_i h_i(x_1, \dots, x_n) \tag{7}$$

이 단계에서 np+nh개의 미지 상수, 즉 첫 번째 보간식에서 np개의 미지상수 ci와 두 번째 보간식에서 nh개의 미지 상수 bi가 존재한다.

두 번째로, 필요한 만큼의 설계를 식 (4)를 이용해서 생성시키고 풀이한다. 설계의 수는 상수 ci와 bi를 찾아내는데 직접적으로 관계된다. k는 np와 nh 중에 큰 값이고, 이는 미지 상수를 구하는 데 필요한 최소한의 설계 수이다.

$$k = \max\{np, nh\} \tag{8}$$

k개의 구조적 문제를 해결하고 제한조건을 평가하는데 상용 소프트웨어를 이용할 수 있다. 설계변수 값과 제한조건 값, 그리고 각 설계에 대한 목적함수 값의 데이터로 구성된 표를 구하는 것이 목표이다. 예를 들면 표 1 및 3과 같다. 표의 데이터 값으로 식 (9)와 같은 시스템을 풀이할 수 있고, 미지 상수 값을 결정한 후에는 보간 과정을 통하여 식 (7)의 함수를 만든다.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}) & \dots & p_{np}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}) & \dots & p_{np}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{np} \end{pmatrix} \text{ and } \\ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{nh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}) & \dots & p_{nh}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}) & \dots & p_{nh}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{nh} \end{pmatrix} \tag{9}$$

2.2 2단계: 최소화 전략

이 과정을 통하여 어떤 종류의 최소화 기법도 사용될 수 있다. 최소화 기법에 따라서는 구한 결과 값의 변화가 무시할 정도로 작아질 때까지 과정을 반복해야 한다. 각 반복 과정의 결과로부터 데이터 표에서 상대적으로 열등한 설계를 가장 최근에 계산된 최적 설계로 치환하여야 한다. 일반적인 수렴 기준은 5% 이내의 결과 값의 변화와 제한 조건의 만족이다.

3. 확인 예제

본 논문에서 제안된 방법론의 타당성을 두 예제를 통하여 살펴보았다(그림 1). 두 예제에서는 서로 다른 문제 정식화와 최소화 기법을 사용한다. 본 예제의 목적은 제안된 방법론이 유연성이 있고 효율적이라는 것을 증명하는 것이다.

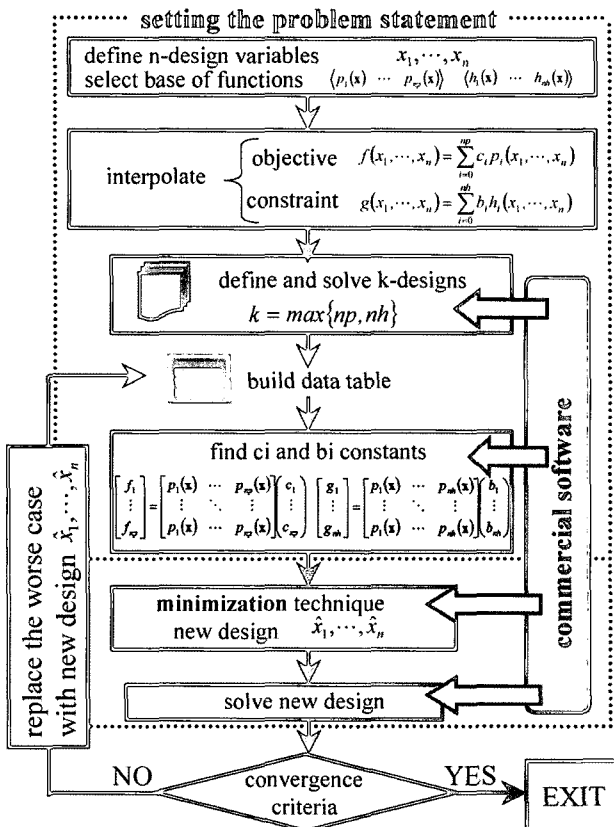


그림 1 Algorithm for the proposed methodology

3.1 예제 1: 내민받침의 최적형상

예제 1은 내민받침의 최적형상을 구하는 것이다. 내민받

침은 콘크리트와 강재로 이루어진 짧은 외팔보이다. 내민받침은 다른 보를 지지하는 기둥에서 공통의 구조이다(그림 2).

내민받침은 재료강도론의 Saint Venant 가설이 적용되지 않는 구조이며, 응력과 변형률을 해석식으로 표현하기 어려운 부분이다. 따라서 내민받침의 최적화에는 탄성 경계값 문제의 해를 필요로 한다. ACI⁽⁵⁾와 Eurocode⁽⁶⁾는 철근과 콘크리트의 응력에 대한 간단한 공식을 제안하지만, 두 공식이 최적화 목적에 사용될 수는 없다.

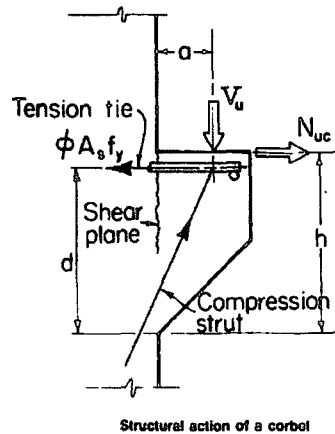


그림 2 Corbel behavior according ACI

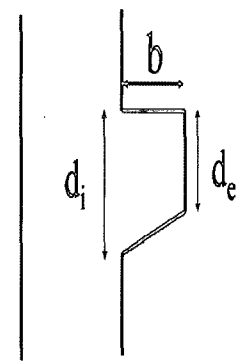


그림 3 Design variables and geometry

3.1.1 1단계: 문제 정립

부착변 높이 d_i 와 자유변 높이 d_e 를 설계변수로 정의한다. 내민받침의 길이 b 는 320mm로 일정하다(그림 3). 따라서, 목적함수는 계산이 용이한 선형 함수인 내민받침 면적 A 가 된다.

$$f(d_i, d_e) = A(d_i, d_e) = b \frac{d_i + d_e}{2} \quad (10)$$

철근에 작용하는 응력은 이 문제에서 중요하지 않고 변위 또한 무시될 수 있으므로, 제한조건은 콘크리트에 작용하는 압축 응력의 최대값 σ_{max} 에 대해서만 고려한다.

$$g(d_i, d_e) = \sigma(d_i, d_e) - \sigma_{max} = 0 \quad (11)$$

여기에서 설계변수와 구체적인 응력 값을 관계시키는 해석식은 존재하지 않으며 제한 값을 계산하기 위하여 수치해석 과정이 필요하다. 본 예제에서는 상용 FEM 소프트웨어 COSMOS/™⁷⁾를 사용하여 내민받침의 거동을 해

석한다(그림 4-6).

제한조건의 해석식은 다항보간법을 사용하여 정의될 수 있으며, 2차 다항식을 이용하면 다음과 같다.

$$\sigma(d_i, d_e) = C_1 d_i^2 + C_2 d_e^2 + C_3 d_i + C_4 d_e + C_5 d_i d_e + C_6 \quad (12)$$

위의 보간법에서 여섯 개의 상수 C_i 를 결정해야 하며, 이를 위해 여섯 개의 서로 다른 설계경우를 정의하고 COSMOS로 해석을 수행한다. 모든 FEM시물레이션에서 100mm두께의 평면응력 상태가 고려되었고, 하중은 100×100mm의 정사각형 평면 위에 작용된다. 하중의 총량은 모든 설계 경우에서 98kN이다. 표 1은 설계변수 값과 콘크리트 응력 값을 보여준다.

표 1의 값들은 연립방정식을 구성하고 식 (12)의 상수 C_i 의 값을 결정하는 데 사용된다. 반복 과정이 필요하다고 하더라도, 모든 새로운 연립방정식 시스템은 식 (13)과 같은 모양을 유지하며, 단지 응력 벡터 항과 새로운 설계변수들로 구성된 열 만 변화한다(예제 2 참조).

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{i1}^2 & d_{e1}^2 & d_{i1} & d_{e1} & d_{i1}d_{e1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{i6}^2 & d_{e6}^2 & \dots & \dots & d_{i6}d_{e6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

연립방정식의 해를 구하고, 콘크리트의 최대응력 σ_{max} 가 16.268 N/mm² 라고 가정하면 제한조건식은 다음과 같이 된다.

$$3.89 \times 10^{-4} d_i^2 + 8.77 \times 10^{-4} d_e^2 + 0.58 d_i - 0.656 d_e + 1.71 \times 10^{-3} d_i d_e + 143.34 - 16.268 = 0 \quad (14)$$

표 1 Design variable and constraint values for each design

Design	d_i (mm)	d_e (mm)	COSMOS σ (N/mm ²)
1	460	80	13.23
2	420	40	17.64
3	400	100	14.89
4	400	200	16.36
5	380	80	17.7
6	380	50	18.22

3.1.2 2단계: 최소화 전략

이 단계에서는 내민받침의 최적화를 수행하며 임의의 최소화 기법을 사용할 수 있다. 본 예제에서는 제한조건이 부가된 최소화 문제를 라그랑지곱수를 사용하여 제한조건이 없는 최적화 문제로 변환하는 기법을 사용한다.^{8),9)}

라그랑지곱수법은 최적화 문제에서 제한조건을 다루는

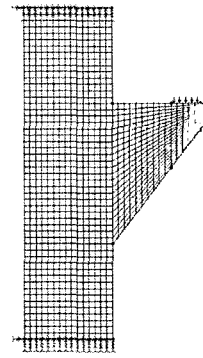


그림 4 Model analysis with COSMOS

일반적이고 효과적인 방법이다. 목적함수는 라그랑지곱수가 곱해진 제한조건을 더하는 것에 의해 수정된다.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_j \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (15)$$

여기서, L 은 라그랑지 값, f 는 목적함수, g_j 는 등식의 제한조건, λ_j 는 라그랑지곱수이다. 주어진 라그랑지 식은 Kuhn-Tucker 필요조건을 따른다. 따라서 최소값은 다음의 연립방정식으로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (16)$$

목적함수 (10)과 제한조건식 (11)로부터 본 예제의 라그랑지안은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$L(d_i, d_e, \lambda) = A(d_i, d_e) + \lambda(\sigma(d_i, d_e) - \sigma_{max}) \quad (17)$$

최소화 문제에 대한 연립방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L(d_i, d_e, \lambda)}{\partial d_i} = \frac{\partial A(d_i, d_e)}{\partial d_i} + \lambda \frac{\partial \sigma(d_i, d_e)}{\partial d_i} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L(d_i, d_e, \lambda)}{\partial d_e} = \frac{\partial A(d_i, d_e)}{\partial d_e} + \lambda \frac{\partial \sigma(d_i, d_e)}{\partial d_e} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L(d_i, d_e, \lambda)}{\partial \lambda} = \sigma(d_i, d_e) - \sigma_{max} = 0 \quad (20)$$

식 (10) 과 (14)를 이용하고, 연립방정식의 시스템의 해를 수계산으로 구하면, $d_i=426.6\text{mm}$, $d_e=53.4\text{mm}$ 의 최적값을 얻는다.

3.1.3 최적값 확인

표 1에 있는 두 설계 경우에 대해서 응력 제한조건과,

두 경우 모두 최적해보다 큰 면적을 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 제한조건의 만족은 구한 값이 신뢰영역 안에 있고 최적설계가 이루어졌다는 것을 확인한다. 구한 최적해가 이론 최소값이라는 것을 검증하기 위해서는 여러 번의 유한요소 시뮬레이션이 필요하다. 시행착오방법을 사용하여 설계변수에 대한 민감도를 분석하고 이를 통하여 이론 최적해에 매우 근접하는 내민받침의 최적 형상을 얻을 수 있다.

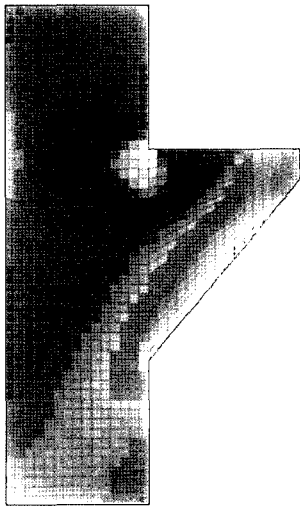


그림 5 Compression stresses (Notice the strut)

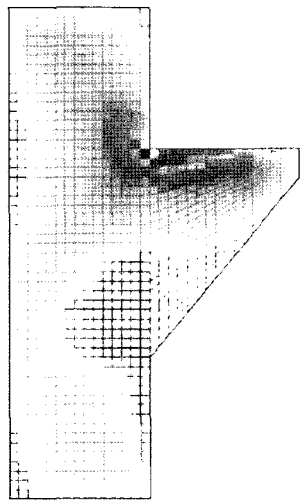


그림 6 Tension stresses (Notice the tie)

3.2 예제 2: 보강터널의 최적 형상

예제 2는 콘크리트와 강재로 구성된 내부 헬에 의해 보강된 터널의 최적화 문제이다. 콘크리트의 체적을 최적화 대상으로 하고, 제한조건은 응력과 기하학적 형상이 된다. 복잡성을 피하기 위해 실제적인 경우에서 발생하는 앵커

문제^{10,11)}와 재료의 비등방성¹²⁾을 무시한다. 이 예제에서는 목적함수와 제한조건 함수 모두 설계변수에 외연적으로 종속되지 않으며 보간법을 사용한 기법이 필요하다.

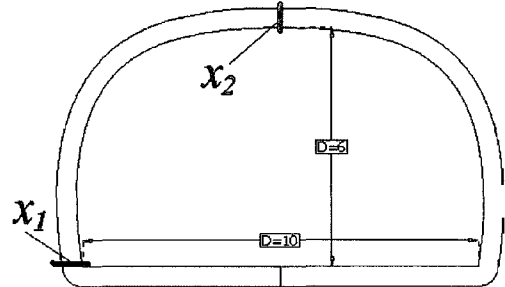


그림 7 Design variables and geometry

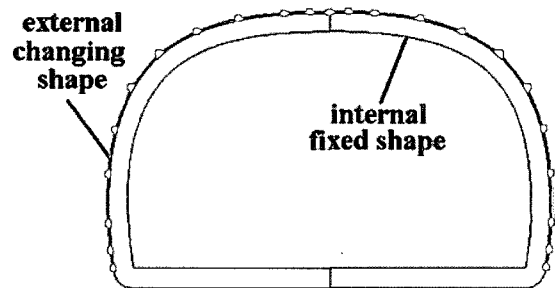


그림 8 Spline interpolation for external contour (Internal one is fixed)

3.2.1 1단계: 문제 정립

설계변수는 기초 두께 x_1 과 크라운 x_2 이다. 목적함수는 콘크리트의 면적 A 가 되며, 이 면적은 최소값이 되어야 한다. 면적 A 는 크라운과 두께에 의해 결정되나, 외부의 경계가 스플라인에 의해 정의되었기 때문에 해석식으로 표현되기 어렵다. 이 정의를 가지고, 이 설계변수가 변화할 때, 새로운 설계는 동조곡선을 만들면서 달성되며(그림 7과 8), 복잡성을 피하기 위해 보간된 목적함수를 사용한다.

$$f(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) \quad (21)$$

이 예제에서는 세 가지 제한조건이 있다: 콘크리트의 최대 압축응력 σ_{max} , 크라운에서 최대변위 δ_{max} 와 두께의 최소값 x_1^{min} 이다. 응력 σ 과 변위 δ 모두 외연적으로 설계변수에 종속되지 않으며, 고로 보간 기법이 사용되어야 한다.

$$g_1(x_1, x_2) = \sigma(x_1, x_2) - \sigma_{max} \leq 0 \quad (22)$$

$$g_2(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2) - \delta_{max} \leq 0 \quad (23)$$

나중의 제한조건은 기초 두께의 최소 요구 값이다.

$$g_3(x_1) = x_1 - x_1^{\min} \geq 0 \quad (24)$$

여기서 $\sigma_{\max} = 1500 \text{ N/cm}^2$, $\delta_{\max} = 1\text{cm}$, $x_1^{\min} = 0.05\text{m}$ 이다.

다항함수로 보간된 목적함수(식 25)와 응력(식 26)과 변위(식 27)의 제한조건은 다음과 같다.

$$A(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1 + a_4x_2 + a_5x_1x_2 + a_6 \quad (25)$$

$$\sigma(x_1, x_2) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_1 + b_4x_2 + b_5x_1x_2 + b_6 \quad (26)$$

$$\delta(x_1, x_2) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1 + c_4x_2 + c_5x_1x_2 + c_6 \quad (27)$$

모든 보간식은 여섯 개의 미지값 a_i , b_i , c_i 을 가지며 최소화 전략에 따라서 여섯 개의 다른 문제들을 정의하고 해를 구한다. 이 예제에서는 상용 전/후처리 소프트웨어 GiD¹³⁾, FEM 해석 프로그램 Calsef¹⁴⁾를 사용한다(그림 10). 유한요소 시뮬레이션에서 평면 변형률 문제로 계산한다. 지반과 콘크리트 물성은 표 2에 있으며 그림 9와 같이 상부지반에 100kN/m의 하중이 가해진다. 해석 결과로부터 표 3이 작성되었다.

다음으로 상용 소프트웨어 Excel을 이용하여 여섯 개 방정식으로 구성된 식 (28)-(30)의 세 시스템으로부터 상수 a_i , b_i , c_i 에 대한 해를 구한다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_6 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_6 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{bmatrix} \quad (30)$$

시스템 매트릭스 \mathbf{M} (식 31)은 각각의 보간함수에 대해 항상 같으며, 이러한 사실은 계산 노력을 상당 부분 감소시킨다. 반면 목적함수와 제한함수에 대해 각기 다른 보간법을 택한다면, 시스템 매트릭스는 각각 다르게 나타날 것이다. 여기서 x_{1i} 와 x_{2i} 는 각 설계 경우의 기초 두께와 크라운 값을 나타낸다.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{11} & x_{21} & x_{11}x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{16}^2 & x_{26}^2 & \cdots & \cdots & x_{16}x_{26} & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

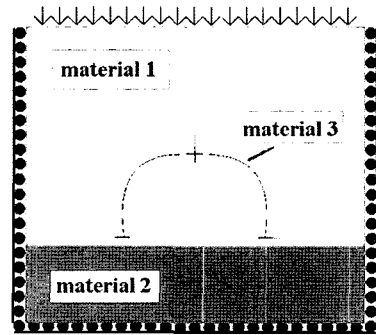


그림 9 Model FEM simulation

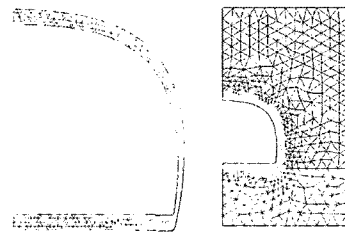


그림 10 Mesh generation

표 2 Material properties for simulation

	Material 1: upper soil	Material 2: bottom soil	Material 3: concrete
Density	21 kN/m ²	23 kN/m ²	25 kN/m ²
Young modulus	3.0 × 10 ⁴ kN/m ²	3.0 × 10 ⁶ kN/m ²	30.0 × 10 ⁶ kN/m ²
Poisson coefficient	0.35	0.35	0.25

표 3 Design variables and constraint values for each design

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6
Thickness x_1 (m)	0.1	0.25	0.25	0.5	0.5	0.7
Crown x_2 (m)	0.7	0.25	0.5	0.5	0.5	0.7
Area A (m ²)	4.018	2.991	3.95	4.184	5.17	4.44
Stress σ (MPa)	13.61	8.86	7.71	8.49	6.71	10.48
Displacement δ (cm)	0.74	1.323	0.851	1.103	0.712	1.408

3.2.2 2단계: 최소화 전략

일단 문제가 정립되면, 최소화를 시작한다. 이 예제에서 선택된 기법은 페널티법이다.^{8),9)} 상용 소프트웨어 Matlab 을 이용하여 본 예제를 위한 간단한 최소화 프로그램을 작성하였다(그림 11-15). 페널티법은 목적함수에 페널티가 주어진 제한조건을 합치시킴으로써 제한조건이 부가된 문제를 제한받지 않는 최적화 문제로 변형시킨다. 식 (21)-(24) 이용하여 다음과 같은 식을 구성한다.

$$f(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) + \alpha_1 g_1(x_1, x_2) + \alpha_2 g_2(x_1, x_2) + \alpha_3 g_3(x_1) \quad (32)$$

페널티 파라미터의 수정이 최소값에 도달하는 것을 도울 수 있기 때문에 페널티 기법은 유연성의 이점을 가진다. 페널티 파라미터의 값 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 각 프로그램 코드에서 곱게 나타내었다.

```
area=-2.486933333*x(1)*x(1)+2.1664*x(2)*x(2)+6.5292*x(1)
+2.1032*x(2)+0.432*x(1)*x(2)+0.825933333;
stress=-6067.322667*x(1)*x(1)+10621.07733*x(2)*x(2)+
4652.892*x(1)-8176.328*x(2)-
1004.48*x(1)*x(2)+1545.399333;
displ=2.744533333*x(1)*x(1)+0.637866667*x(2)*x(2)-
3.2624*x(1)-2.6904*x(2)+1.296*x(1)*x(2)+2.5188;
```

그림 11 Matlab pieces of code: polynomial interpolation

```
if(stress>1500)
    g1=0.01*(stress-1500)*(stress-1500);
end
```

그림 12 Matlab pieces of code: penalty for stresses g_1

```
if(displ>1)
    g2=100*(displ-1)*(displ-1);
end
```

그림 13 Matlab pieces of code: penalty for displacements g_2

```
if(x(1)<0.05)
    g3=10000*(x(1)-0.05)*(x(1)-0.05);
end
```

그림 14 Matlab pieces of code: penalty for minimum thickness g_3

```
obj=area+g1+g2+g3
```

그림 15 Matlab pieces of code: unconstrained objective function

3.2.3 반복 과정

최소화 문제의 풀이를 통하여, 하나의 해가 결정되어 처음의 여섯 설계 중 열등한 것을 대체한다. 그리고 새로운 문제가 정의되며 최소화 해를 구하고 대체하는 과정이 반복된다. 설정된 제한조건을 만족하고 해의 개선이 5%이내

일 때 반복 과정은 끝난다. 본 예에서는 두 번의 시도 후에, 최종 결과에 도달되었고, 결과는 표 4에 정리되었다(그림 16, 17).

표 4 Values of the optimum for each iteration

	Thickness x_1 (m)	Crown x_2 (m)
First iteration	0.05	0.602
Second iteration	0.146	0.47

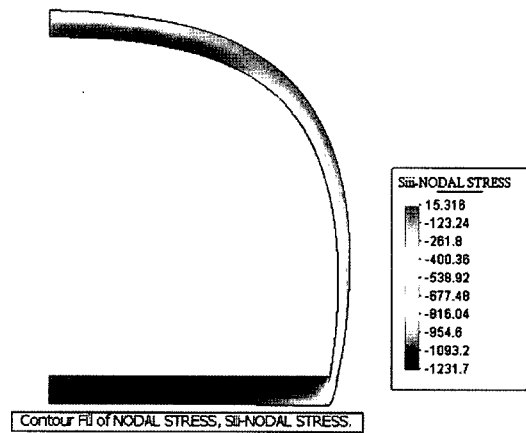


그림 16 Stress results (단위: 10 kN/m²)

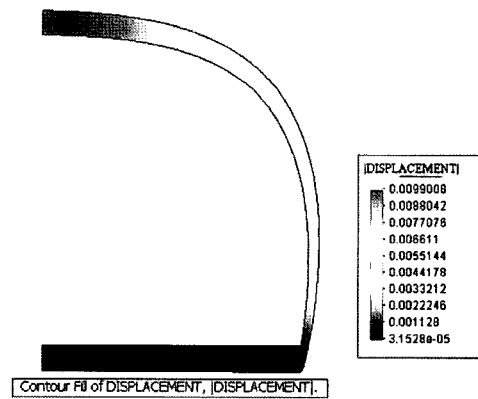


그림 17 Displacement results (단위: m)

4. 결 론

본 논문에서는 구조물 최적화 문제를 위한 확고하며 유연한 접근법을 제안한다. 제안된 방법론은 상용 프로그램을 활용하는 것이며, 본 논문의 예제에서는 각기 다른 FEM 프로그램인 COSMOS와 Aftab, 전/후처리기 Gid, 그리고 Excel과 Matlab과 같은 일반적인 소프트웨어를 사용하였다. 프로그램의 다양한 기능은 필요에 따라 최적화 과정에 활용된다. 두 가지 다른 기법(라그랑지곱수법과 페널티법)이 성공적으로 사용되었으며 제안된 방법론은

설계자의 개인적 기술, 필요와 사용 가능 소프트웨어에 따라 활용될 수 있다.

제안된 방법론은 설계변수들에 관해서는 목적함수 또는 일부 제한조건이 외연적 형식으로 표현되기 어려울 때 사용하여 잘 활용되며, 이는 이들 함수를 적절한 기초 함수들로 보간하여 성취한다. 본 논문의 예제들에서는 이차다항식이 목적함수와 제한조건식을 보간하는데 사용되었다. 삼각함수, 스플라인, 지수함수 등과 같은 다른 보간 기법도 사용될 수 있으며 근본적으로 보간법의 선택은 문제의 본질에 좌우되므로, 일반적인 규칙이 성립될 수는 없다. 사용 보간법에 따라서는 수치적 불안정성이 일어날 수 있으며 보간 기법의 적절한 선택이 정확한 해를 구하기 위해서 요구된다는 점은 명백하다.

제안된 방법론의 또 다른 이점은 최소화 기법의 자유로운 선택이다. 라그랑지곱수와 패널티법이 두 예제에서 매우 잘 수행되었음을 보여주었다. 일반적으로 패널티함수는 라그랑지곱수보다 보다는 유연성이 있고 신뢰할 수 있다. 라그랑지곱수 기법의 중요한 이점은 일단 적용이 가능하면 정확한 해를 구할 수 있다는 것이다. 반면에 패널티법에서는 제한조건의 만족을 직접적으로 강제하지 않으면서 실제 최소값에 근접한 유사해를 쉽게 찾을 수 있다. 패널티계수의 조정 가능성은 특정 제한조건의 중요성을 이완시키거나 강제하는 등의 적절한 조절 기회를 제공한다. 이러한 조작의 편의성은 패널티 파라미터의 민감성에서 기인하는 불편함에도 불구하고 충분한 이점이 된다. 이러한 관점에서 패널티법은 라그랑지곱수 기법보다 유연성이 있다. 마지막으로 라그랑지곱수의 또 다른 문제점은 연립방정식 시스템에서 미지값들이 람다곱수(lambda multiplier)와 설계변수에서 서로 곱해진다는 것이다. 이런 곱들은 최종 연립방정식이 강한 비선형을 갖게 만들며, 특히 대규모 문제에서 명백한 결점이 된다. 요약하면 만약 라그랑지곱수 기법이 적용 가능하다면, 패널티법보다 좋은 결과를 얻을 수 있다. 그러나 패널티법 또한 명확성과 유연성으로 매우 경쟁력 있는 방법이다.

제안된 방법론은 열, 유체, 역학 등의 다른 공학문제에도 적용될 수 있다고 기대된다. 또한 다목적함수문제(multi-object function problems)로도 확장될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Vanderplaats GN. Numerical optimization techniques for engineering design. McGraw-Hill; 1984
2. Segerlind LJ. Applied finite element analysis. John Wiley and Sons; 1984
3. Zienkiewicz OC, Taylor RL. In: The finite element method, vol. 1. McGraw-Hill; 1989
4. Ralston A, Rabinowitz P. A first course in numerical analysis. 2nd ed. Dover; 2001
5. ACI. In: Manual of concrete practice Part 3. American Concrete Institute; 1989
6. Eurocode 2: concrete, reinforced concrete and prestressed concrete structures. AENOR, 1998
7. COSMOS/M. Finite element analysis software. Available from: <http://www.cosmosm.com>
8. Nocedal J, Wright SJ. Numerical optimization. Springer-Verlag; 1999
9. Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. Numerical recipes in C. The art of scientific computing. Cambridge University Press; 1996
10. Yin LZ, Yang W, Guo TF. Tunnel reinforcement via topology optimization. Int J Num Anal Met Geomech 2000;24(2):201.13
11. Yin LH, Yang W. Topology optimization to prevent tunnel heaves under different stress biaxialities. Int J Num Anal Met Geomech 2000;24(9):783.92
12. Yin LZ, Yang W. Topology optimization for tunnel support in layered geological structures. Int J Num Met Eng 2000;47(12):1983.96
13. CIMNE. GiD the personal pre and post-processor. CIMNE. Available from: <http://gid.cimne.upc.es>
14. Onate E, Botello S. Calsef a program for the linear static analysis of structures, 1992. CIMNE. Available from: <http://www.cimne.upc.es>