

변형률 보간 9절점 쉘 요소를 이용한 적층복합판과 쉘의 선형 정적 해석 및 자유진동 해석

Linear Static and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates and Shells using a 9-node Shell Element with Strain Interpolation

한 성 천† 최 삼 열*

Han, Sung-Cheon Choi, samuel

(논문접수일 : 2004년 2월 2일 ; 심사종료일 : 2004년 8월 3일)

요 지

등방성 혹은 비등방성 적층복합판 및 쉘의 선형 정적 문제와 자유진동 해석이 새로운 변형률 변위 관계가 도입된 개선된 9절점 쉘 요소에 의하여 수행되었다. 그 관계에서 새롭게 추가된 휨 변형률과 변위사이의 관계 항들에 의한 효과는 비틀어진 보 문제에서 검토되었다. 정식화의 전 과정을 통해, 식들의 모든 항들은 자연 좌표계에 기초하고 있다. 가정 자연 변형률 방법이 막 잠김과 전단 잠김 거동을 제거하기 위하여 사용하였다. 적층 복합판 및 쉘의 고유치의 계산을 위해 Lanczos방법을 사용하였고 질량행렬을 구성하기 위하여 Gauss적분법을 사용하였다. 정식화의 유효성을 평가하기 위해 수치 예제를 해석적 해와 비교하였으며, 제시된 결과는 자유진동 조건하에서 적층체의 거동을 이해하는데 유용할 것이다.

핵심용어 : 자유진동해석, 9절점 쉘요소, 적층복합판 및 쉘, 가정변형률법, 고유치

Abstract

The analysis of linear static and free vibration problems of isotropic and laminated composite plates and shells is performed by the improved 9-node shell element with the new strain displacement relationship. In that relationship, the effect of new additional terms between the bending strain and displacement has been investigated in the warping problem. Natural coordinate based strains, stresses and constitutive equations are used. The assumed natural strain method is used to alleviate both membrane and shear locking behavior from the element. The Lanczos method is employed in the calculation of the eigenvalues of laminated composite structures and the Gauss integration rule is adopted to evaluate the mass matrix. The numerical examples are compared with the analytical solutions to validate the current formulation and the results presented could be useful for the understanding of the behaviour of laminates under free vibration conditions.

keywords : free vibration, 9-node shell element, laminated composite plates and shells, assumed natural strain method, eigenvalue

1. 서 론

급속한 산업의 발전으로 여러 분야에서 이전과는 다른 새로운 구조적 기능 들이 필요로 되고 있으며, 이러한 필요성에 부응하는 새로운 기능을 제공할 수 있는 보다 진보된 재료가 요구되고 있다. 복합 적층 구조는 발전하는 최근의 산

업에 크게 기여할 수 있는 매우 중요한 요소들 중의 하나로 인식되고 있다. 이는 그 동안의 재래식 재료를 뛰어넘는, 높은 자중-강성비와 내 부식성과 같은 이점 들을 제공하기 때문이다. 이러한 요소들은 적층 구조체의 거동을 규명하기 위한 보다 충실한 판 및 쉘 이론의 개발에 동기를 부여하고 있으며, 따라서, 복합체의 정적 및 동적 반응은 최근 들어 큰

† 책임저자, 정회원 · 대원과학기술대학 토목과 부교수 공학박사
전화 : 043-649-3267 ; Fax : 043-649-3555
E-mail: techy11@mail.daewon.ac.kr

* 정회원, ㈜이오엔지니어즈 구조부 차장 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

주목을 받고 있다.

복합재료는 적층판 및 적층셸의 형태로 주로 사용되며 적층판의 경우에는 요소 반경을 무한대로 가정하여 동일 평면상에 모든 절점이 위치하는 쉘 요소로 해석이 가능하다. 본 논문에서는 변형률 보간 9절점 쉘 요소를 이용하여 복합 적층체의 선형 정적 및 자유진동 해석을 하고자 한다.

축퇴이론에 근거한 쉘 구조물의 유한요소모델은 Ahmad 등¹⁾에 의해 소개되었다. 전단 잠김 문제를 극복하기 위하여 Huang과 Hinton²⁾은 자연 좌표계에서 수직 전단 변형률의 개선된 보간을 사용하여 9절점 가정 변형률 쉘 요소를 개발하였다. Belytscho 등³⁾에 의해 모래시계 모드를 조절하기 위한 안정화 행렬과 함께 9절점 가정 변형률 쉘 요소가 발표되었다. 이 쉘 요소의 모든 항들은 감차적분을 사용하였다.

Kanok-Nukulchai와 Wong⁴⁾은 새로운 Lagrangian 정식을 소개하였는데, 이 정식을 요소기저 Lagrangian (Element-based Lagrangian Formulation)정식 이라고 한다. 이는 요소의 변형이나 균형 방정식들이 자연 좌표계의 항으로 구성된 요소의 가상 영역에서 직접적으로 표현되는 방법이다. Lee와 Kanok-Nukulchai⁵⁾는 쉘 구조의 대변형 해석을 위하여 요소기저 Lagrangian정식 개념을 사용하여 9절점 쉘 요소를 발표하였다. 요소기저 Lagrangian정식은 전통적인 Lagrangian정식에 비해 가정 자연 변형률 방법과 함께 사용될 때 보다 간단하게 적용할 수 있다. 가정 변형률 방법을 사용해 쉘 요소의 막 잠김이나 전단 잠김 문제를 해결하였다.

계산상의 효율을 위하여 쉘 요소의 응력은 일반화된 합응력 이론의 형태로 개발되어 왔으며 면내력, 전단력과 모멘트로 각각 구현된다. 그러나 지금까지의 축퇴 쉘 이론으로부터 유도된 변형률 변위 행렬을 적용하는 경우 합응력 쉘 요소는 비틀린 쉘과 같은 문제에서 해석에 실패하게 된다. 휨 변형률과 변위사이의 관계를 새롭게 수정한 쉘 요소의 변형률 변위 관계는 임의로 비틀린 구조물을 해석하기 위하여, 기존의 변형률 변위 관계식의 단순한 수정을 통하여 개선됨을 나타내었다. 수정의 효과는 비틀린 보의 수치 예제를 통하여 검증하였다.

얇은 쉘의 진동은 Love⁶⁾에 의해 최초로 연구되었다. 그 후로 많은 연구자들이 쉘의 진동을 고전적인 얇은 쉘 이론을 사용하여 다루어왔다. 특히, Donnel⁷⁾은 자유진동 거동을 이해하기 위하여 얇은 막 쉘 이론을 사용하였으며, 결과적인 연구가 Leissa⁸⁾, Qatu⁹⁾ 그리고 Liew 등¹⁰⁾에 의해 재검토되었다. 최근의 가정 변형률을 이용한 쉘 요소의 자유진동 해석에 관한 연구는 Lee와 Han¹¹⁾에 의해 수행되었다. 한성천 등¹²⁾은 적층복합판이 온도하중을 받는

경우 두께 방향 응력 분포에 관한 연구를 수행하였고 한성천 등^{13),14)}은 개선된 고차전단변형이론을 이용하여 단순지진된 적층복합판의 자유진동 해석을 수행하였다. Ma와 Kanok-Nukulchai¹⁵⁾는 요소기저 9절점 쉘요소를 이용한 등방성 구조물의 해석을 수행하였고 Han, Kim과 Kanok-Nukulchai¹⁶⁾는 개선된 요소기저 9절점 쉘요소를 이용한 복합재료 및 등방성 구조물의 비선형 해석을 수행하였다.

그러나 쉘의 자유 진동 해석에서 가정 자연 변형률 쉘 요소의 연구성과는 극히 제한된 연구자들에 국한하고 있다. 본 연구에서 강성행렬과 질량 행렬이 요소기저 Lagrangian 정식화에 의해 표현되었다. 정확해가 쉘 공식화의 적용을 보여주기 위해 자유진동 조건 하에서 직사각형의 등방성 판과 복합적층체에 대해 나타내었다. Lanczos방법이 쉘의 고유치 계산을 위해 사용되었으며, 질량 행렬을 구성하기 위해 Gauss 적분법이 채용되었다.

2. 쉘 요소의 기하 형상

9절점 쉘 요소의 기하형상은 그림 1에 6개의 자유도와 함께 나타내었다. ξ_3 은 두께 방향 좌표로, ξ_1 및 ξ_2 는 면내 좌표로 요소의 자연 좌표계를 구성하며, 본 연구에서는 유도된 변형이나 방정식들의 항들을 이 좌표계로 이루어진 요소의 가상 영역에서 직접적으로 표현한다.

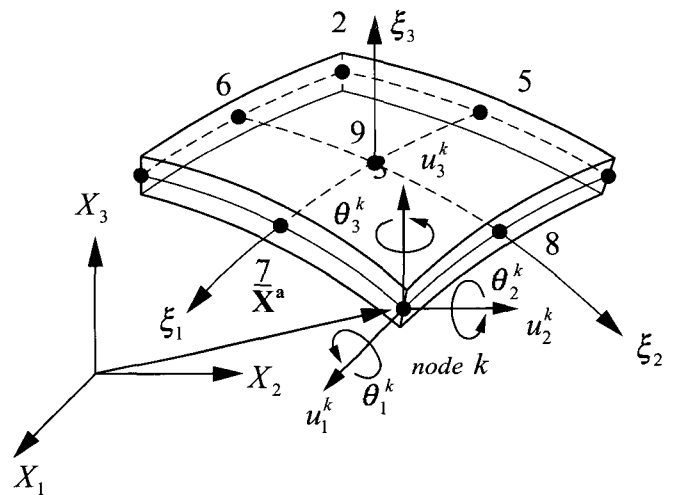


그림 1 6개의 자유도를 가지는 9절점 쉘 요소의 기하형상

쉘 요소의 기하 형상은 식(1)과 식(2)와 같이 정의 된다.

$$\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{X}}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathbf{X}}^a \\ \mathbb{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \mathbb{D}^a \\ \mathbb{D}^a(\xi_3) &= \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{D}}^a \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{\mathbf{X}}^a$ 는 세계의 직교성분을 갖는 절점 a 에서의 위치벡터이고, \mathbb{D}^a 는 9개의 단위 수직 벡터를 의미하며, $\hat{\mathbf{D}}^a$ 는 절점 a 에서의 단위 수직 벡터를 의미하고 중립면에 수직이다. 그리고 h^a 는 절점 a 에서의 두께이며, N_a 는 절점 a 에서의 2차 Lagrangian보간 함수이다.

식(1)에서 중립면에 수직인 면은 변형 후에도 수직으로 남는다는 쉘의 가정을 이용하여 정리하면 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\bar{\mathbf{X}}^a + \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{D}}^a \right] \\ &= \bar{\mathbf{X}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbb{D}(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (3)$$

본 연구에서는 6개의 자유도를 사용하기 때문에 Lagrangian 정식에서 두 개의 독립적인 회전을 사용하는 Euler 각 대신 세 개의 연속적인 회전을 표현하기 위해 θ_1, θ_2 및 θ_3 를 도입하였다. 회전에 대한 변형 행렬은 식(4)와 같다.

$$\begin{aligned} T_{R1}(\theta_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}; \quad T_{R2}(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}; \\ T_{R3}(\theta_3) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

본 연구에서 세 개의 연속적인 회전변위는 회전이 미소할 때 그 벡터특성을 잃는다는 것이 중요하다. 세 개의 회전이 연속적으로 일어난 후에, 초기 쉘과 변형 후 쉘 사이의 변환 행렬은 유한 회전 θ_1, θ_2 및 θ_3 를 적용하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= T_{R1}(\theta_1) T_{R2}(\theta_2) T_{R3}(\theta_3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 θ_1, θ_2 와 θ_3 가 매우 작으면 식(5)의 \mathbf{T}_R 은 식(6)과 같다.

$$\mathbf{T}_{R0} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

쉘 요소에서 변위장 \mathbf{u} 는 식(7)과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\bar{\mathbf{u}}^a + \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{e}}^a \right] \\ &= \bar{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \bar{\mathbf{e}}(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\hat{\mathbf{e}}^a$ 는 절점 a 에서의 절점 회전변위 벡터이고 식(8)과 같다.

$$\hat{\mathbf{e}}^a = \mathbf{T}_{R0}^a \hat{\mathbf{D}}^a - \hat{\mathbf{D}}^a \quad (8)$$

식(8)을 식(7)에 대입하면 식(7)의 변위 장은 식(9)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\bar{\mathbf{u}}^a + \xi_3 \frac{h^a}{2} (\mathbf{T}_{R0}^a - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{D}}^a \right] \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 는 항등행렬이다.

식(9)에 식(6)을 대입하여 정리하면 식(10)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\xi_3 h^a}{2} \Phi^a \right] \mathbf{u}^a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \sum_{a=1}^9 N_a \mathbf{u}^a \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$\Phi^a = \begin{bmatrix} 0 & \hat{D}_3^a & -\hat{D}_2^a \\ -\hat{D}_3^a & 0 & \hat{D}_1^a \\ \hat{D}_2^a & -\hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^a = \{\bar{u}_1^a, \bar{u}_2^a, \bar{u}_3^a, \theta_1^a, \theta_2^a, \theta_3^a\}^T$$

$$\mathbf{N}_a = N_a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_3^a & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_2^a & -\frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{D}_1^a & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3. 자연 변형을 텐서

Kanok-Nukulchai와 Wong⁴⁾의 요소기저 Lagrangian

정식에 따른 자연 변형률 텐서는 Green변형률과 텐서 변환 관계를 이용하여 나타내면 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} E_{IJ} \\ &= \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_I}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_J}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_K}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_K}{\partial \xi_\beta} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 비선형 항은 무시하고 식(3)과 식(7)을 대입하여 정리하면 식(13)과 같다.

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\bar{X}_I + \xi_3 \bar{D}_I)}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial(\bar{u}_I + \xi_3 \bar{e}_I)}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial(\bar{u}_J + \xi_3 \bar{e}_J)}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial(\bar{X}_J + \xi_3 \bar{D}_J)}{\partial \xi_\beta} \right] \quad (13)$$

식(13)에서 고차항을 생략하고 면내 변형률, 휨 변형률, 수직전단 변형률로 구분하여 정리하면 식(14)와 같다.

$$\tilde{E}_{\alpha\beta}^m = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{X}_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_I}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial \bar{X}_J}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_J}{\partial \xi_\beta} \right], \quad (\alpha, \beta=1,2) \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha\beta}^b &= \frac{\xi_3}{2} \left[\frac{\partial \bar{D}_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_I}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial \bar{X}_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{e}_I}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_J}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{D}_J}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial \bar{e}_J}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \bar{X}_J}{\partial \xi_\beta} \right], \\ &(\alpha, \beta=1,2) \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\tilde{E}_{\alpha 3}^s = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{X}_I}{\partial \xi_\alpha} \bar{e}_I + \frac{\partial \bar{u}_I}{\partial \xi_\alpha} \bar{D}_I \right], \quad (\alpha=1,2) \quad (14c)$$

여기서 $\tilde{E}_{\alpha\beta}^m$, $\tilde{E}_{\alpha\beta}^b$ 및 $\tilde{E}_{\alpha 3}^s$ 는 면내 변형률, 휨 변형률 및 수직전단 변형률 성분이다.

식(7)과 식(10)의 관계를 이용하면 식(14)는 식(15)와

같이 정리할 수 있다.

$$\tilde{E}^m = \tilde{\mathbf{B}}_m \bar{\mathbf{u}}, \quad \tilde{E}^b = \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_b \mathbf{u}, \quad \tilde{E}^s = \tilde{\mathbf{B}}_s \mathbf{u} \quad (15)$$

식(15)에서, $\tilde{\mathbf{B}}_b$ 는 개선된 휨 변형률 변위 관계 행렬로서 휨 변형률과 변위벡터 사이의 관계가 추가되어 식(16)의 $\tilde{\mathbf{B}}_{b1}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{b2}$ 로 나누어 표현할 수 있다.

본 연구에서는 가정 자연 변형률을 이용하여 식(16)에서와 같이 $\tilde{\mathbf{B}}_{AS}$ 행렬을 표준 $\tilde{\mathbf{B}}$ 행렬 대신에 사용한다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}^m \\ \tilde{E}^b \\ \tilde{\mathbf{e}}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} & 0 \\ \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b1} & \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{AS} & (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{AS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

4. 가정 자연 변형률

잠김 문제를 해결하기 위하여, Kim등¹⁷⁾이 8절점 쉘 요소에서 사용한 가정 자연 변형률 방법을 9절점 쉘 요소에 사용하였다. 따라서, 수직전단 및 면내 변형률장은 그림 2의 가정점에서 보간되었다. 가정 자연 변형률을 위한 보간 함수는 표 1에 나타내었다.

가정 면내 변형률 $\tilde{\mathbf{e}}_{11}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{22}$ 와 가정 수직전단 변형률 $\tilde{\mathbf{e}}_{13}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{23}$ 에 대해 식(17)과 같은 가정점을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_{13}, \tilde{\mathbf{e}}_{11} &\gg (1/\sqrt{3}, 1)_1 : (1/\sqrt{3}, 0)_2 : (1/\sqrt{3}, -1)_3 : (-1/\sqrt{3}, 1)_4 : \\ &(-1/\sqrt{3}, 0)_5 : (-1/\sqrt{3}, -1)_6 \\ \tilde{\mathbf{e}}_{23}, \tilde{\mathbf{e}}_{22} &\gg (1, 1/\sqrt{3})_1 : (0, 1/\sqrt{3})_2 : (-1, 1/\sqrt{3})_3 : (1, -1/\sqrt{3})_4 : \\ &(0, -1/\sqrt{3})_5 : (-1, -1/\sqrt{3})_6 \end{aligned} \quad (17)$$

가정 면내전단 변형률 $\tilde{\mathbf{e}}_{12}$ 의 가정점은 표준 2x2 가우스 수치 적분점을 사용하였다. 이들 세가지 종류의 가정점으로 식(18)과 같은 가정 변형률을 관계지을 수 있다.

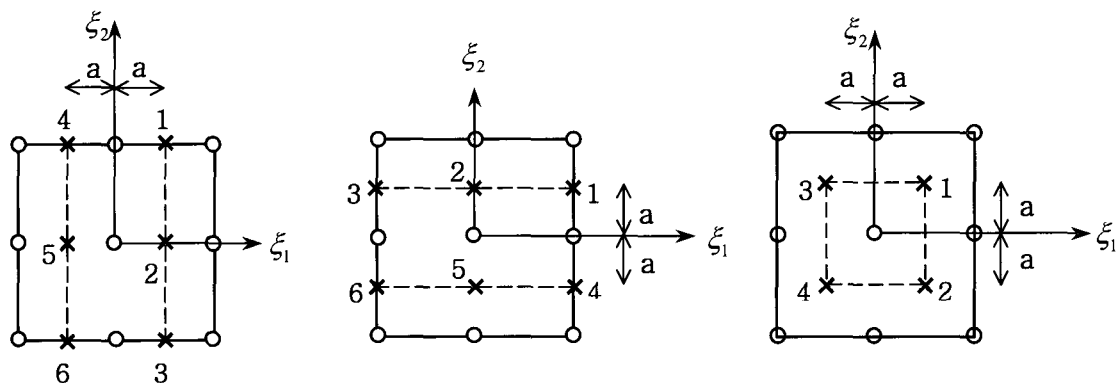


그림 2 가정 변형률 $\tilde{\mathbf{e}}_{11}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{13}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{22}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{23}$ 와 $\tilde{\mathbf{e}}_{12}$ 의 가정점

$$\tilde{\mathbf{e}}_{13} = \tilde{\mathbf{H}}^1 \tilde{\mathbf{E}}_{13}^{\delta 1}, \tilde{\mathbf{e}}_{23} = \tilde{\mathbf{H}}^2 \tilde{\mathbf{E}}_{23}^{\delta 1}, \tilde{\mathbf{e}}_{12} = \tilde{\mathbf{H}}^3 \tilde{\mathbf{E}}_{12}^{\delta 2} \quad (18)$$

여기서, $\delta 1=3(i-1)+j$ 와 $\delta 2=2(i-1)+j$ 그림 2에 나타낸 가정점의 위치를 나타낸다.

식(18)의 나머지 항목들은 표 1에 나타내었다. 가정 변형률 $\tilde{\mathbf{e}}_{11}, \tilde{\mathbf{e}}_{22}$ 은 각각 $\tilde{\mathbf{e}}_{13}, \tilde{\mathbf{e}}_{23}$ 와 같은 보간 방법을 갖는다.

표 1 가정변형률의 보간함수

i	$\tilde{\mathbf{H}}^i$	* $P_i(\xi_1)$	* $Q_i(\xi_2)$
1	$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 P_l(\xi_1) Q_l(\xi_2)$	$P_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi_1)$	$Q_1(\xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 + 1)$
2	$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_l(\xi_2) Q_l(\xi_1)$	$P_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi_1)$	$Q_2(\xi_2) = 1 - \xi_2^2$
3	$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_l(\xi_1) P_l(\xi_2)$		$Q_3(\xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 - 1)$

* $P(\xi_2)$ 와 $Q(\xi_1)$ 는 변수를 바꾸어 구할 수 있다.

5. 구성 방정식 및 합응력

본 논문에서의 정식화는 자연좌표계 틀에 기초하기 때문에, 자연좌표계에 기초한 구성방정식을 얻기 위해서 자연좌표계와 전체 좌표계간의 명확한 좌표변환 방법이 필요하다. 자연좌표계에서의 응력-변형률 관계식은 식(19)와 같다.

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{J}}_0 \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{E}} \quad (19)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{J}}_0$ 자코비안의 행렬식이고, \mathbf{D} 는 재료 각도 θ 를 갖고 있는 직교이방성 재료에 대한 구성방정식이며 식(20)과 같다

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_1 \mathbf{C} \mathbf{T}_1^T \quad (20)$$

여기서 \mathbf{C} 는 직교이방성 재료의 구성행렬이고 \mathbf{T}_1 는 국부 좌표계와 재료 축의 좌표변환 행렬¹⁸⁾이다.

식(19)의 좌표변환 행렬 \mathbf{T} 는 식(21)과 같다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \chi_{11}\chi_{11} & \chi_{21}\chi_{21} & \chi_{31}\chi_{31} & 2\chi_{11}\chi_{21} & 2\chi_{21}\chi_{31} & 2\chi_{11}\chi_{31} \\ \chi_{12}\chi_{12} & \chi_{22}\chi_{22} & \chi_{32}\chi_{32} & 2\chi_{12}\chi_{22} & 2\chi_{22}\chi_{32} & 2\chi_{12}\chi_{32} \\ \chi_{13}\chi_{13} & \chi_{23}\chi_{23} & \chi_{33}\chi_{33} & 2\chi_{13}\chi_{23} & 2\chi_{23}\chi_{33} & 2\chi_{13}\chi_{33} \\ \chi_{11}\chi_{12} & \chi_{21}\chi_{22} & \chi_{31}\chi_{32} & \chi_{11}\chi_{22} + \chi_{12}\chi_{21} & \chi_{21}\chi_{32} + \chi_{22}\chi_{31} & \chi_{11}\chi_{32} + \chi_{12}\chi_{31} \\ \chi_{12}\chi_{13} & \chi_{22}\chi_{23} & \chi_{32}\chi_{33} & \chi_{12}\chi_{23} + \chi_{13}\chi_{22} & \chi_{22}\chi_{33} + \chi_{23}\chi_{32} & \chi_{12}\chi_{33} + \chi_{13}\chi_{32} \\ \chi_{11}\chi_{13} & \chi_{21}\chi_{23} & \chi_{31}\chi_{33} & \chi_{11}\chi_{23} + \chi_{13}\chi_{21} & \chi_{21}\chi_{33} + \chi_{23}\chi_{31} & \chi_{11}\chi_{33} + \chi_{13}\chi_{31} \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \quad (22)$$

등가 단층이론과 일치전단변형이론에 근거한 적층 쉘 요소는 적층두께 방향으로의 적분을 통해 적층구조에 작용하는 면내력(\mathbf{N}), 모멘트(\mathbf{M})와 수직전단력(\mathbf{Q})등의 합 응력을 구할 수 있다. 복합적층구조의 구성관계식은 식(23)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}] & [\mathbf{B}] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{B}] & [\mathbf{D}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{G}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}^m \\ \tilde{\mathbf{E}}^b \\ \tilde{\mathbf{E}}^s \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_{3 \times 3} &= \int \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_3^{k-1}}^{\xi_3^k} \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{C}}_{mb}^k (\xi_3^k - \xi_3^{k-1}), \\ [\mathbf{B}]_{3 \times 3} &= \int \xi_3 \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_3^{k-1}}^{\xi_3^k} \xi_3 \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{C}}_{mb}^k ((\xi_3^k)^2 - (\xi_3^{k-1})^2), \\ [\mathbf{D}]_{3 \times 3} &= \int \xi_3^2 \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_3^{k-1}}^{\xi_3^k} \xi_3^2 \tilde{\mathbf{C}}_{mb} d\xi_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{C}}_{mb}^k ((\xi_3^k)^3 - (\xi_3^{k-1})^3), \\ [\mathbf{G}]_{2 \times 2} &= \int k_s \tilde{\mathbf{C}}_s d\xi_3 = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_3^{k-1}}^{\xi_3^k} k_s \tilde{\mathbf{C}}_s d\xi_3 = \sum_{k=1}^N k_s \tilde{\mathbf{C}}_s^k (\xi_3^k - \xi_3^{k-1}) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{C}}_{mb}^k$ 와 $\tilde{\mathbf{C}}_s^k$ 는 각각, k 번째 층에서의 면내-휨 구성행렬, 수직전단 구성행렬이고 k_s 는 전단보정계수이고 5/6 이다.

6. 동적 평형방정식

감쇠 효과가 무시되고, 가상 일의 원리를 이용하여 면내, 휨 및 수직전단 합 응력의 형태로 평형방정식을 나타낼 수 있다.

$$\int (\delta(\tilde{\mathbf{E}}^m)^T \mathbf{N} + \delta(\tilde{\mathbf{E}}^b)^T \mathbf{M} + \delta(\tilde{\mathbf{E}}^s)^T \mathbf{Q}) dA = \int \rho (\delta \mathbf{u})^T \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (25)$$

여기서 ρ 는 비중이다.

6.1 선형 강성행렬

식(25)로부터 동적 평형 방정식의 강성 행렬 부분은 식(26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int (\delta(\tilde{\mathbf{E}}^m)^T \mathbf{N} + \delta(\tilde{\mathbf{E}}^b)^T \mathbf{M} + \delta(\tilde{\mathbf{E}}^s)^T \mathbf{Q}) dA = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_L \mathbf{u} \quad (26)$$

변형률 변위 관계식, 식(16)을 식(26)에 대입하면, 쉘의 중립면에서의 선형 강성 행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}_L = \int \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L^{11} & \mathbf{K}_L^{12} \\ \mathbf{K}_L^{21} & \mathbf{K}_L^{22} \end{bmatrix} dA \quad (27)$$

표준 $\tilde{\mathbf{B}}$ 행렬은 가정 변위 장으로부터 4절의 가정 변형률 정의에 의하여 직접적으로 유도된다. $\tilde{\mathbf{B}}$ 를 가정 자연 변형률에서 유도된 $\tilde{\mathbf{B}}_{AS}$ 로 대체하여 정리하면, 식(27)은 식(28)로 정리된다.

$$\mathbf{K}_L = \int \left[\begin{array}{l} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} [\mathbf{A}] (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + \tilde{\mathbf{B}}_{b1} [\mathbf{B}] (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} [\mathbf{B}] \tilde{\mathbf{B}}_{b1} \\ + \tilde{\mathbf{B}}_{b1} [\mathbf{D}] \tilde{\mathbf{B}}_{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} [\mathbf{G}] (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{b2} [\mathbf{B}] (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + \tilde{\mathbf{B}}_{b2} [\mathbf{D}] \tilde{\mathbf{B}}_{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} [\mathbf{G}] (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} [\mathbf{B}] \tilde{\mathbf{B}}_{b2} + \tilde{\mathbf{B}}_{b1} [\mathbf{D}] \tilde{\mathbf{B}}_{b2} + (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} [\mathbf{G}] (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{b2} [\mathbf{D}] \tilde{\mathbf{B}}_{b2} + (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} [\mathbf{G}] (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} \end{array} \right] dA \quad (28)$$

비틀림 강성은 Kanok-Nukulchai¹⁹⁾에 의해 제안된 방법으로 구성하여 식(28)의 강성행렬에 추가하였다.

6.2 질량행렬

식(25)에서 질량 행렬을 유도하기 위해서 식(10)으로부터 식(29)를 구한다.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \sum_{a=1}^9 N_a \ddot{\mathbf{u}}^a, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{a=1}^9 N_a \delta \mathbf{u}^a \quad (29)$$

식(26)과 식(29)를 식(25)에 대입하여 정리하면 식(30)을 얻을 수 있다.

$$\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_L \mathbf{u} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (30)$$

여기서,

$$\mathbf{M} = \int \rho \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b dV \quad (31)$$

식(11)을 식(31)에 대입하여 정리하면 식(32)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M} = \int \rho \left[\begin{array}{cc} (\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b)_{3 \times 3}^{11} & 0 \\ 0 & (\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b)_{3 \times 3, 6 \times 6}^{22} \end{array} \right] dV \quad (32)$$

여기서,

$$(\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b)^{11} = \begin{bmatrix} N_a N_b & 0 & 0 \\ 0 & N_a N_b & 0 \\ 0 & 0 & N_a N_b \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b)^{22} = N_a N_b \left[\begin{array}{cc} \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_3^a \hat{D}_3^b + \hat{D}_2^a \hat{D}_2^b) & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_2^a \hat{D}_1^b \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_1^a \hat{D}_2^b & \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_3^a \hat{D}_3^b + \hat{D}_1^a \hat{D}_1^b) \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_1^a \hat{D}_3^b & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_2^a \hat{D}_3^b \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_1^b & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_1^b \\ -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_2^b & -\xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} \hat{D}_3^a \hat{D}_2^b \\ \xi_3^2 \frac{h^a h^b}{4} (\hat{D}_2^a \hat{D}_2^b + \hat{D}_1^a \hat{D}_1^b) & \end{array} \right] \quad (33)$$

식(31)의 질량행렬은 회전관성을 무시한 집중 질량행렬의 형태로 표현하면 식(34)를 이용하여 더욱 간단하게 표시할 수 있다.

$$m = \frac{1}{n} \int \rho dV = \frac{1}{9} M^e \quad (34)$$

여기서 m 은 각각의 변위 자유도에 해당하는 집중 질량이고 n 은 요소당 절점의 수이며 M^e 는 요소당 총 질량이다.

가상변위 $\delta \mathbf{u}$ 는 0이 아닌 임의 값을 가지므로 식(30)은 식(35)로 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (35)$$

식(35)의 일반 해는 식(36)과 같다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}_k e^{j\omega_k t} \quad (36)$$

식(36)을 식(35)에 대입하면 식(37)을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K}_L - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{Z}_k = 0 \quad (37)$$

여기서 ω_k 는 고유진동수이고 \mathbf{Z}_k 는 모드 벡터이다.

7. 수치 예제

본 연구의 9절점 쉘 요소의 정확도를 검증하기 위하여 등방성 비틀린 보와 적층복합판의 선형 처짐해석, 그리고 등방성판과 비등방성 적층복합판 및 쉘 예제에 대한 자유진동해석을 수행하였다.

a. 등방성 비틀린 보의 선형 처짐 해석

개선된 9절점 요소의 효과를 검사하기 위해 MacNeal과

Harder²⁰⁾가 제안한 그림 3의 비틀린 보를 해석하였다. 요소의 뒹 효과를 검사하기 위하여 제안되었으며, Belytschko 등³⁾에 의하면 많은 요소가 이 검사에 실패하였다. 이 문제는 일반 쉘 요소 성능평가의 좋은 방법이 될 수 있다. 두께를 0.32부터 0.05, 0.0032의 얇은 두께에 대하여도 요소 성능을 조사하였으며, 자유단 하중 작용점의 처짐 결과를 MacNeal과 Harder²⁰⁾(두께 0.32), Simo 등²¹⁾(두께 0.05)과 Belytschko 등³⁾(두께 0.0032)에서 제시된 정확해에 대한 비로 표현하여 표 2에 나타내었다.

표 2 비틀린 보의 해석결과 비교 (해석결과/정확해)

자유단 하중 방향	해석방법(요소 분할수 6×1)	두께(m)		
		t=0.32	t=0.05	t=0.0032
면내 전단	정확해(단위 : m)	0.005424	1.390	0.5256×10 ⁴
	Liu et al. ²²⁾	1.413	-	1.392
	Belytschko et al. ³⁾	0.997	-	0.903
	Lee and Kanok-Nukulchai ⁵⁾	1.4047	1.3691	1.3792
	본 연구	1.0000	1.0000	1.0080
면외 전단	정확해(단위 : m)	0.001754	0.3431	0.1294×10 ⁴
	Liu et al. ²⁾	1.358	-	1.719
	Belytschko et al. ³⁾	0.980	-	0.958
	Lee and Kanok-Nukulchai ⁵⁾	1.3592	1.7027	1.7187
	본 연구	1.0028	1.0029	1.0054

¹⁷⁾9절점 URI 쉘 요소, ³⁾9절점 γ - ψ 쉘 요소,

⁵⁾Lee 와 Kanok-Nukulchai의 이론을 이용하여 계산한 결과

Liu 등²²⁾, Belytschko 등³⁾의 해석결과와 Lee와 Kanok-Nukulchai⁵⁾ 이론에 의한 결과를 비교하였고 Lee와 Kanok-Nukulchai⁵⁾의 이론에 힘 변형률과 변위벡터 사이의 관계를 추가하여 개선된 힘 변형률 변위 관계 행렬을 이용한 본 연구의 결과는 두께의 종류에 관계없이 매우 정확하게 정확

해에 수렴됨을 알 수 있다. 비틀린 보의 경우에 힘 변형률과 변위벡터 사이의 관계가 정확한 해석을 위한 필수조건이라고 판단된다.

b. 적층복합판의 선형 처짐 해석

정사각형 적층복합판이 (0/90/0)과 (45/-45)화이버 보강방향을 가지는 경우에 폭-두께 비의 변화에 따른 무차원 처짐을 구하여 해석적인 연구결과와 표 3에서 비교하였다. 해석예제의 물성치는 식(39)에 나타내었으며 적층복합판의 경계조건은 4번 단순지지이다.

$$E_1 = 25E_2, E_2 = E_3, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \\ \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.25, E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/mm}^2 \quad (38)$$

표 3에서 (0/90/0)과 (45/-45)로 적층된 적층판의 1/4 모델을 사용하고, 요소 분할 수 4×4를 사용한 경우의 무차원 처짐을 나타내었다. 두 가지 보강방향을 경우에 모두 해석적인 일차전단 변형 이론의 연구결과와 매우 잘 일치하였다. 폭-두께비가 작은 경우에는 대칭 직교이방성으로 적층된 경우의 처짐이 역대칭 앵글-플라이로 적층된 경우보다 큰 처짐을 나타내었으나, 폭-두께비가 큰 경우에는 대칭 직교이방성으로 적층된 경우의 처짐이 작게 나타났다. 앵글-플라이의 영향은 폭-두께비의 변화에 따라 비례적으로 증가되는 것으로 판단된다.

c. 등방성 판의 자유 진동 해석

등방성 정사각형 판에 대한 자유진동에 대해 해석하였으며 결과를 표 4에 나타내었다. 등방성 판의 재료 특성치는 식(39)에 나타내었다. 경계조건은 단순지지이다. 요소 분

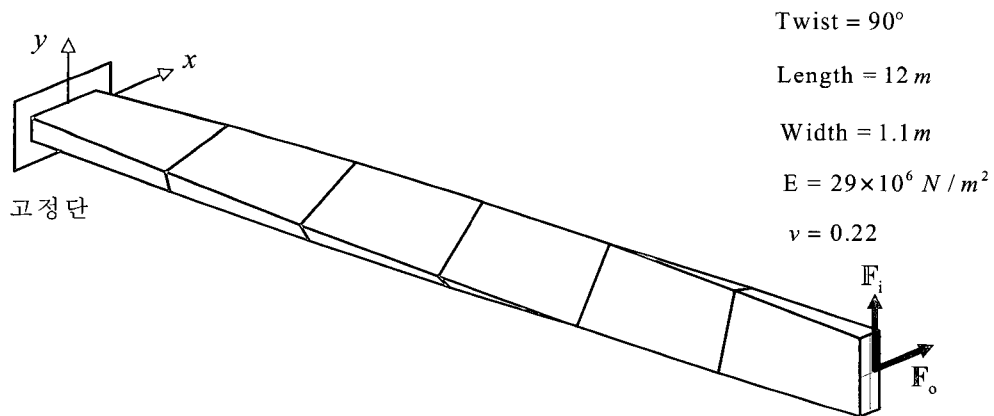


그림 3 9절점 쉘 요소로 6×1 메쉬 분할된 비틀린 보

할 수 4×4 를 이용한 해석 결과를 3차원 탄성이론의 해와 Reissner Mindlin 두꺼운 판의 일차전단변형 이론(FSDT) 와 비교하였다. 본 연구의 해석결과가 참고문헌의 결과들과 잘 일치함을 보여준다.

$$E = 2.6 \times 10^6 \text{ kN/mm}^2, G = 1.0 \times 10^6 \text{ kN/mm}^2, \nu = 0.3 \quad (39)$$

처짐해석과는 달리 해석적인 방법을 구한 해석결과와 약간의 오차가 발생하였는데, 이것은 회전관성의 무시로 인해 발생한 오차로 판단된다. 폭-두께비가 100인 경우에는 전단변형에 의한 효과가 작기 때문에 상대적으로 작은 오차가 발생하였으나 폭-두께비가 10인 경우에는 정확해에 수렴되기 위해서는 전단변형이론의 개선도 필요한 부분이라 판단된다.

표 3 등분포 하중을 받는 대칭 직교이방성 적층복합판과 역대칭 앵글 플라이 복합적층판의 중앙점 무차원 처짐 ($\bar{w} = (wh^3 E_z / q_0 a^4) 10^2$)

a/h	(0/90/0)		(45/ 45)	
	FSDT ^a	본 연구	FSDT ^a	본 연구
4	2.6596	2.6596	-	2.6035
10	1.0219	1.0220	1.2792	1.2793
20	0.7573	0.7573	1.0907	1.0908
100	0.6697	0.6697	1.0305	1.0306

^a일차전단변형 이론을 이용한 해석적 결과 (Reddy¹⁸⁾)

표 4 단순지지된 등방성 판의 무차원 고유진동수 ($a = 10 \text{ mm}$),

$$\left(\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \right)$$

m	n	a/h = 10			a/h = 100		
		정확해 ^a	FSDT ^b	본 연구	FSDT ^b	본 연구	
1	1	0.932	0.9300	0.9368	0.0963	0.0963	
2	1	2.226	2.2190	2.2250	0.2406	0.2406	
2	2	3.421	3.4060	3.4656	0.3848	0.3847	
3	1	4.171	4.1490	4.2282	0.4809	0.4808	
3	2	5.239	5.2060	5.3033	0.6249	0.6244	

^a 3차원 탄성이론 (Srinivas, Joga Rao, and Rao²³)

^b Reissner Mindlin 일차전단변형 이론 (Reddy¹⁸⁾)

d. 적층복합판의 자유 진동 모드해석

정사각형 적층복합판에 대한 자유진동 모드해석을 수행하였다. 재료의 물성치는 식(40)과 같다. 경계조건은 4변 단순지지이고 여러 가지 보강방향에 따른 고유진동수를 표 5에 나타내었다. 본 연구의 해석결과는 일차전단변형이론을 고려한 해석적인 연구결과와 잘 일치되었다. 직교이방성 적층판과 역대칭 앵글-플라이 적층판의 경우에 모두 적층수가 증가하면 고유진동수가 증가됨을 알 수 있었다. 다양한 경계를 가지는 적층복합판의 고유진동수를 검증하기 위하여 캔틸레버 적층복합판의 고유진동수를 참고문헌의 결과와 비교하여 표 7에 나타내었다. 단순지지인 경우에 본 연구의 고유진동수가 크게 나타났으나, 캔틸레버의 경우에는 반대로 작게 나타난 것은 참고문헌의 해석방법 차이에 기인하는 것으로 판단된다. 본 연구의 해석결과는 폭-두께비와 경계의 종류에 상관없이 참고문헌의 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

$$\text{재료1} : E_1 = 25E_2, E_2 = E_3, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2,$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.25, E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/mm}^2$$

$$\text{재료2} : E_1 = 40E_2, E_2 = E_3, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2,$$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.25, E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/mm}^2$$

(40)

표 6 (0/90)으로 적층된 캔틸레버 적층복합판의 무차원 고유

$$\text{진동수} \left(\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \left(\sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right) \right)$$

재료2	Reddy ¹⁸⁾	본 연구
a/h = 10	2.5334	2.5284
a/h = 100	2.6103	2.6002

4변 고정된 재료 1 ($E_2 = 1.0 \text{ kN/mm}^2$)의 물성치와 (0/90/0) 그리고 (-45/45)로 적층된 정사각형 적층복합판의 자유진동수와 캔틸레버 적층복합판의 고유진동수는 표 7에

표 5 단순지지된 적층복합판의 무차원 고유 진동수(a/h=10) $\left(\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \left(\sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right) \right)$

대칭 직교이방성 ^b (재료1)			역대칭 앵글-플라이 ^c (재료1)			역대칭 직교이방성 ^d (재료2)			역대칭 앵글-플라이 ^e (재료2)		
층수	FSDT ^a	본연구	층수	FSDT	본연구	층수	FSDT	본연구	층수	FSDT	본연구
n=4	12.227	12.267	n=2	10.895	10.939	n=2	10.473	10.534	n=2	13.044	13.100
n=6	12.703	12.738	n=4	14.772	14.787	n=4	14.921	14.971	n=4	18.463	18.484
n=8	12.665	12.700	n=8	15.388	15.397	n=10	15.779	15.823	n=10	19.380	19.391

^aReissner Mindlin 일차전단변형 이론 (Reddy¹⁸⁾)

^b0/90/90/0, 0/90/0/0/90/0, 0/90/0/90/90/0/90/0; ^c-45/45, (-45/45)₂, (-45/45)₄;

^d0/90, (0/90)₂, (0/90)₅; ^e45/-45, (45/-45)₂, (45/-45)₅

표 7 4번 고정된 적층복합판과 캔틸레버 적층복합판의 고유진동수

Mode No.	4번 고정 정사각형 적층복합판(a/h=10)		캔틸레버 정사각형 적층복합판(a/h=10)	
	Symmetric Cross ply (0/90/0)	Antisymmetric Angle ply (-45/45)	Symmetric Cross ply (0/90/0)	Antisymmetric Angle ply (45/-45)
1	17.7005	14.8995	1.3729	1.5548
2	24.7657	26.3481	2.8523	4.9068
3	33.0400	26.3481	7.9097	8.3025
4	36.0985	36.5645	9.9978	12.4730
5	37.5438	40.3637	10.2232	12.7333

나타내었고 4번 고정 적층복합판의 자유 진동 모드 형상은 그림 4 및 그림 5에 표시하였다. 15개의 진동 모드 형상은 화이버의 보강방향에 따라 매우 상이하게 나타났다. 4번 고정 정사각형 적층판의 경우 역대칭 앵글 플라이의 경우에

1번 고유진동수는 작게 나타났으나, 2번부터는 크게 나타났다. 진동 모드의 경우에는 첫 번째 진동 모드는 유사한 모양을 나타내었으나 두 번째 진동 모드부터 상이한 모습을 나타내었다. 여러 가지 경계에 따른 결과들은 향후 연구

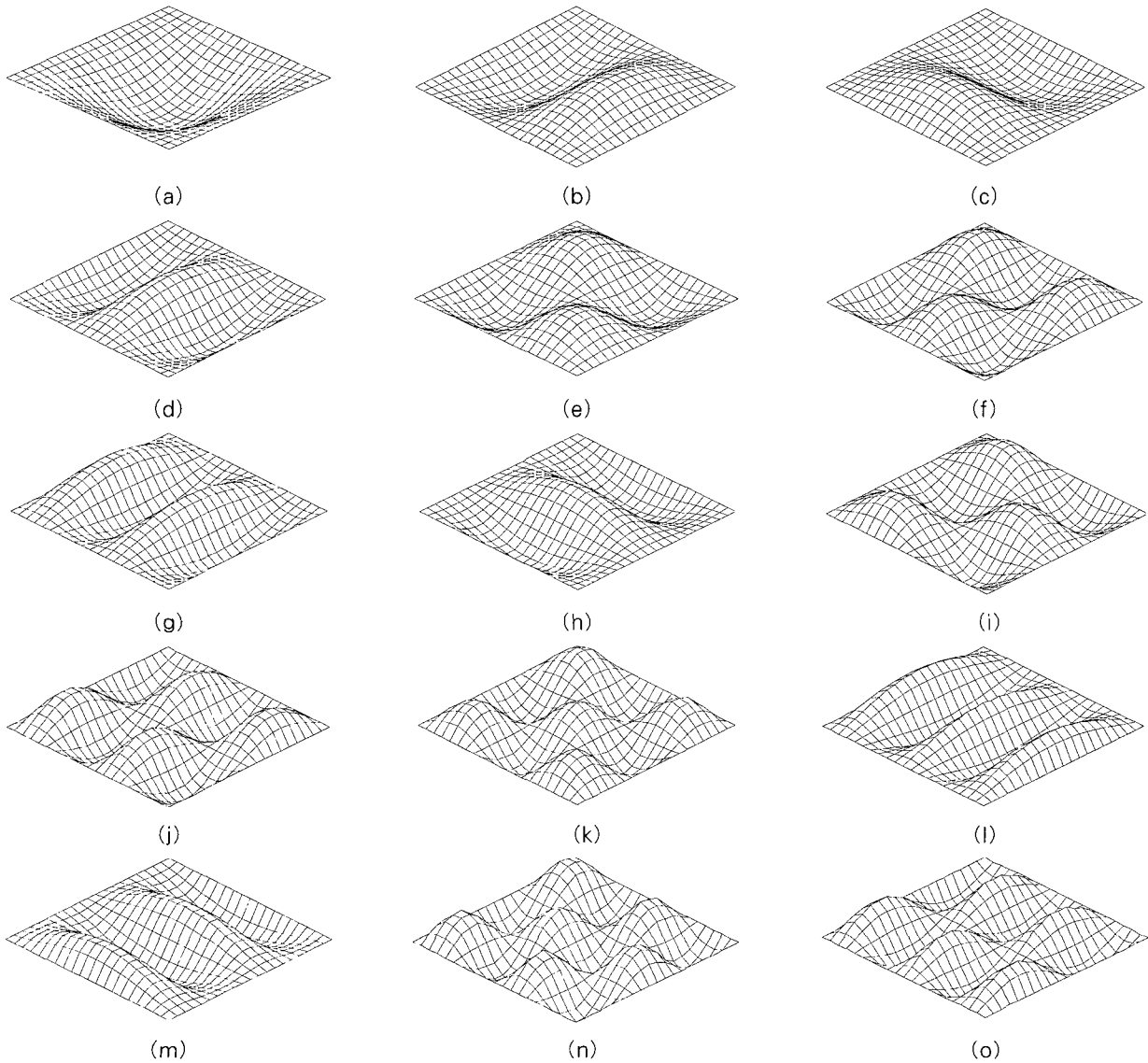


그림 4 (0/90/0)으로 적층된 4번고정 적층복합판의 자유 진동 모드

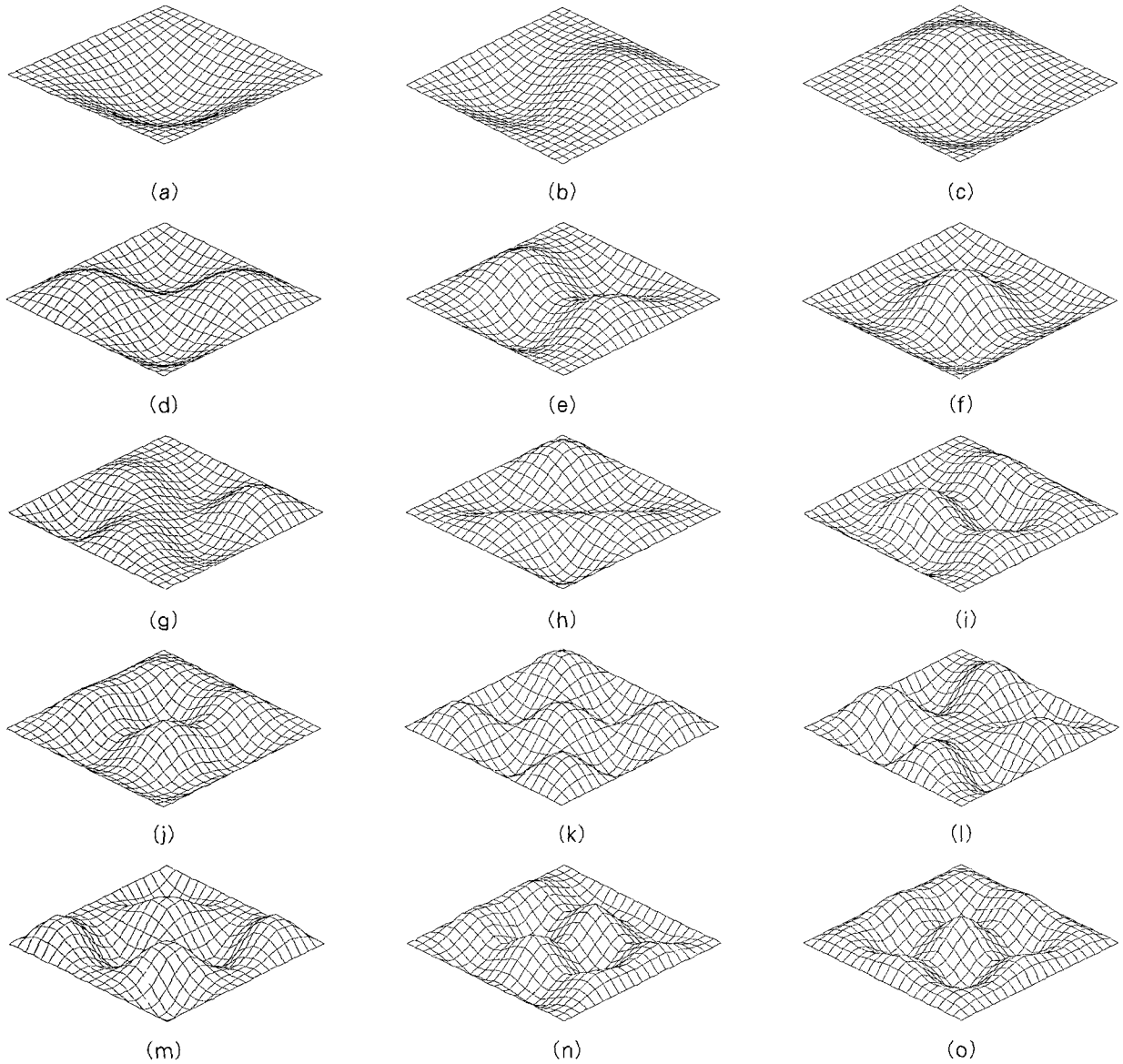


그림 5 (-45/45)으로 적층된 4변고정 적층복합판의 자유 진동 모드

자들을 위한 비교자료로 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

e. 적층복합쉘의 자유 진동 모드해석

고정된 원통형 복합적층 쉘에 대한 자유 진동수 해석 및 자유 진동 모드해석을 수행하였다. 쉘의 기하학적 형상은 그림 6과 같으며 재료의 물성치는 식(41)과 같다.

$$E_1 = 25E_2, E_2 = E_3, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.25, E_2 = 1.0 \text{ kN/mm}^2 \quad (41)$$

쉘의 자유진동 문제는 두께 12.6mm인 쉘에 대하여 해석하였고 결과는 표 8에 나타내었다. 적층은 3층의 대칭

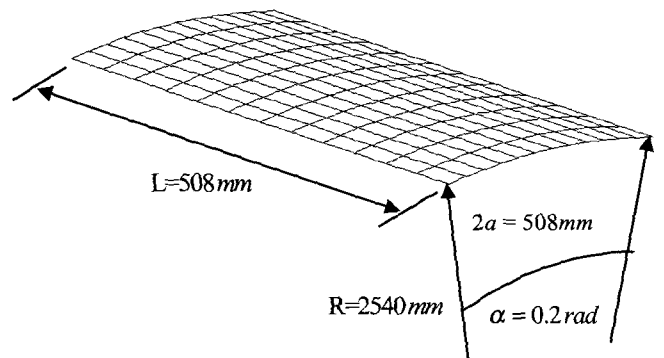


그림 6 4변 고정된 단순지지 원통형 쉘의 기하학적 형상

적층(0°/90°/0°)이고, 각 층의 두께는 4.2mm이다. 다른 적층 예는 2층의 역대칭 적층(45°/-45°)이고, 각 층의 두

께는 6.3mm이다. 고정된 복합적층 쉘의 모드 형상은 그림 7 및 8에 나타내었다. 4변고정 정사각형 적층판의 경우에 역대칭 앵글-플라이의 경우에 1번 고유진동수는 작게 나타났으나 2번부터는 크게 나타났으나, 원통형 적층셸의 경우에는 역대칭 앵글 플라이의 경우에 5개의 진동수가 모두 작게 나타났다. 진동 모드의 경우에는 첫 번째 진동 모드는 유사한 모양을 나타내었으나, 두 번째 진동 모드 부터는 상이한 모습을 나타내었다.

표 8 4변 고정된 적층복합셸의 고유진동수

Mode No.	4변고정 원통형 적층복합셸(L/h=40.3175)	
	Symmetric Cross ply (0/90/0)	Antisymmetric Angle ply (45/-45)
1	10.4959	6.5146
2	12.0949	10.0499
3	15.8620	10.3286
4	19.8096	15.4010
5	21.0098	16.5087

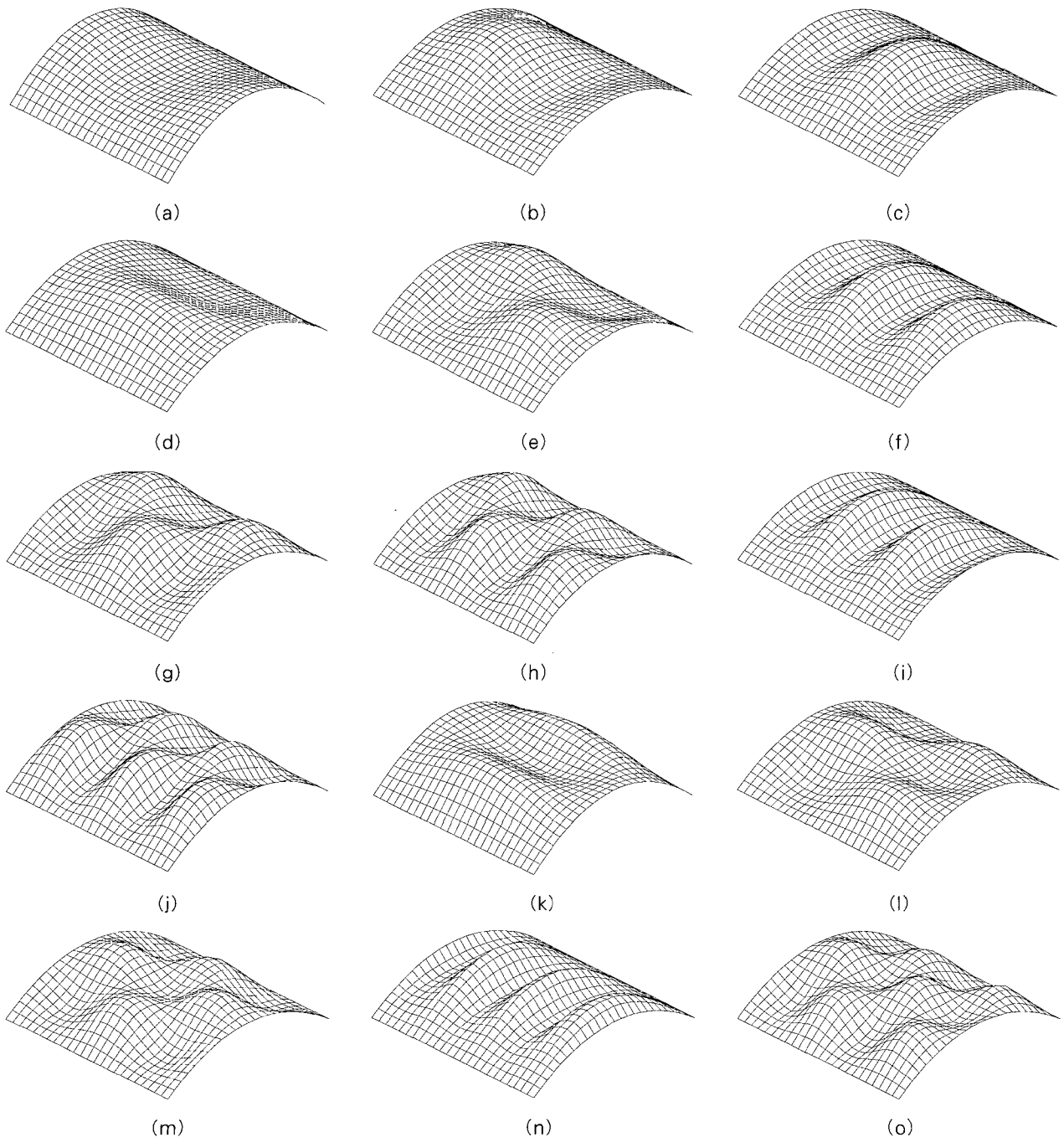


그림 7 (0/90/0)으로 적층된 4변고정 적층복합셸의 자유 진동 모드

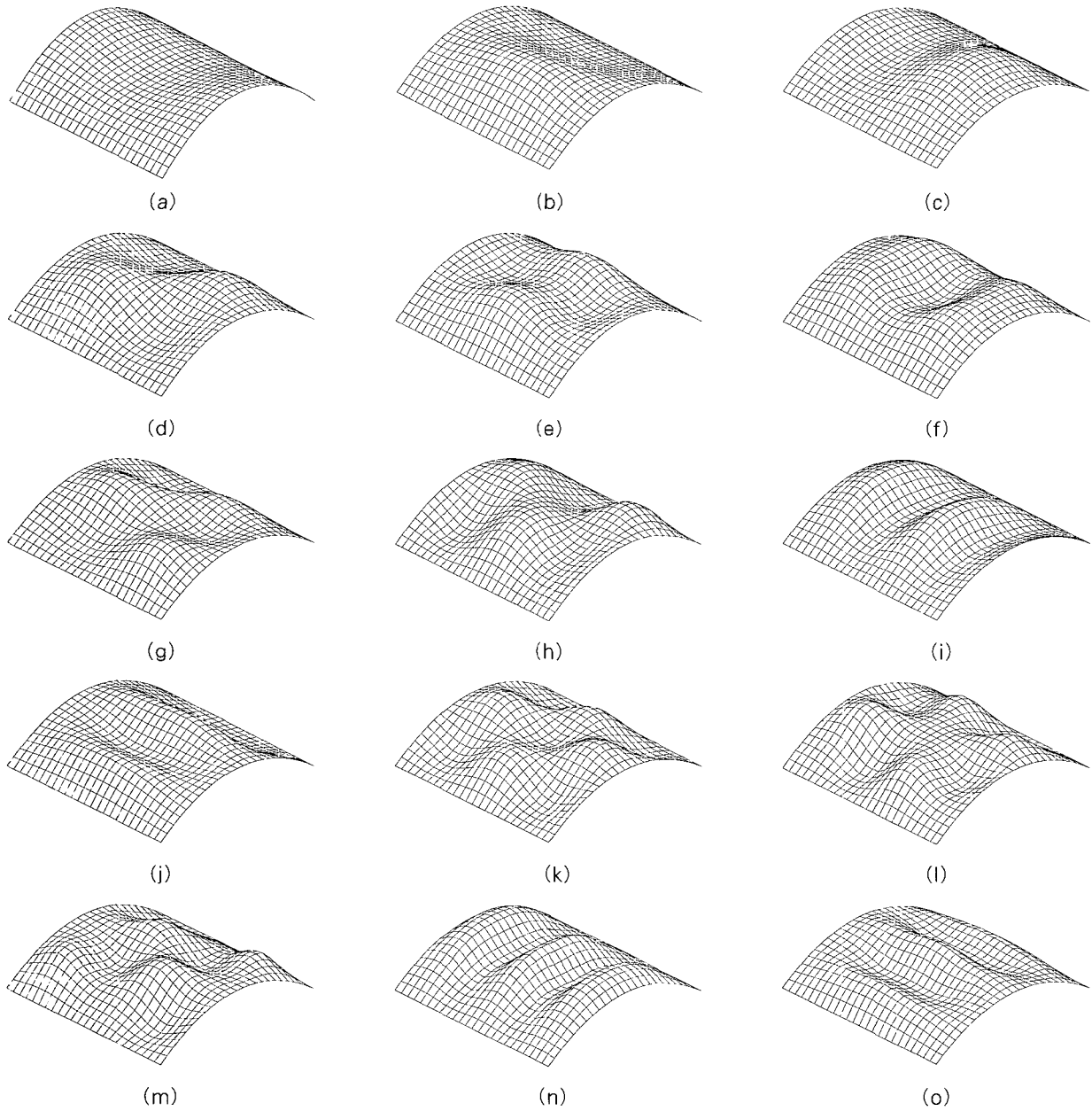


그림 8 (45/-45)으로 적층된 4변고정 적층복합셸의 자유 진동 모드

9. 결 론

본 연구에서는 요소기저 Lagrangian정식화에 기초하고 힘 변형률 변위-관계 행렬을 개선한 변형률 보간 9절점 쉘 요소를 제시하였다. 막 잠김 현상과 전단 잠김 현상을 극복하기 위하여 변형률 보간 방법을 사용하였으며, 요소기저 Lagrangian정식은 전통적인 Lagrangian정식에 비해, 자연좌표계에서 변형률, 응력, 구성방정식을 구성하기 때문에 특히 변형률 보간 방법을 적용할 때, 보다 간단하게 적용할 수 있다.

본 연구에서 제안된 적층복합 9절점 쉘 요소의 성능을

검증하기 위하여 정적 선형 문제, 자유 진동 문제를 해석하였다. 정적 선형 문제와 자유 진동 문제의 모든 경우에 참고문헌의 결과와 매우 잘 일치하였다.

특히, 개선된 9절점 쉘 요소는 비틀린 보의 해석에서 두께의 변화에 상관없이 매우 정확한 결과를 나타내었다.

기존의 적층복합판 및 쉘의 진동수와 진동 모드에 대한 연구에서 변형률 보간 방법의 사용은 매우 미미하였다. 향후 연구자들의 쉘 요소의 해석결과를 비교할 수 있는 참고 자료로 본 연구의 적층복합판 및 쉘의 고유진동수 결과와 진동 모드 형상이 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, 1970, pp. 419~451
2. Huang, H.C. and Hinton, E., "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22, 1986, pp. 73~92
3. Belytschko, T., Wong, B. L. and Stolarski, H., "Assumed strain stabilization procedure for the 9 node lagrange shell element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 1989, pp. 385~414
4. Kanok-Nukulchai, W. and Wong, W.K., "Element based Lagrangian formulation for large deformation analysis", *Comput. Struct.*, Vol. 30, 1988, pp. 967~974
5. Lee, S.J. and Kanok-Nukulchai, W., "A Nine-Node Assumed Strain Finite Element for Large Deformation Analysis of Laminated Shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 42, 1998, pp. 777~798
6. Love, A.E.H., "The small vibrations and deformations of thin elastic shell", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 179, 1888, pp. 527~546
7. Donell, L.H., "Stability of thin walled tubes under torsion", NASA Report 479, 1933.
8. Leissa, A.W., "Vibrations of shells", NASA PA 288, 1973
9. Qatu, M.S., "Review of shallow shell vibration research", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 24, 1992, pp. 3~15
10. Liew, K.M., Lim, C.W. and Kitipornchai, "S., Vibration of shallow shells: a review with bibliography", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, 1997, pp. 431~444
11. Lee, S.J. and Han, S.E., "Free Vibration Analysis of Plates and Shells with a Nine Node Assumed Natural Degenerated Shell Element", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 241, No. 4, 2001, pp. 601~633
12. 한성천, 윤석호, "고차전단변형을 고려한 적층복합판 및 쉘의 열 습윤 휨해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 제1호, 1999, pp. 37~46
13. 한성천, 유용민, 박대용, 장석윤, "개선된 고차이론을 이용한 복합재료 적층구조물의 탄성 및 점탄성적 휨, 진동해석", 한국강구조학회 논문집, 제14권 제1호, 2002, pp. 1~12
14. 한성천, 천경식, 최희권, 장석윤, "3차원 고차이론을 이용한 역대칭 앵글 플라이 복합재료 적층판의 동적거동", 대한토목학회 논문집, 제23권 제4A호, 2003, pp. 647~655
15. Ma, H. and Kanok-Nukulchai, W., "On the application of assumed strained methods", *Structural Engineering and Construction, Achievements, Trends and Challenges*, Kanok Nukulchai et al. (eds.), 1989, AIT, Bangkok, Thailand
16. Han, S.C., Kim, K.D. and Kanok-Nukulchai, W., "An Element-Based 9-node Resultant Shell Element for Large Deformation Analysis of Laminated Composite Plate and Shell", Accepted for Publication in the *Structural Engineering and Mechanics*
17. Kim, K.D., Lomboy, G.R. and Han, S.C., "A corotational 8 node assumed strain shell element for postbuckling analysis of laminated composite plates and shells", *Comput. Mech.*, Vol. 30, No. 4, 2003, pp. 330~342
18. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates*, CRC Press, Florida, 1997
19. Kanok-Nukulchai, W., "A simple and efficient finite element for general shell analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 179~200
20. MacNeal, R.H. and Harder, R.L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, 1985, pp. 3~20
21. Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S., "On stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory, computational aspects", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 73, 1989, pp. 53~92
22. Liu, W.K., Lam, D., Law, S.E., Belytschko, T., "Resultant stress degenerated shell element", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, 1986, pp. 259~300
23. Srinivas, C.V., Rao, J. and Rao, A.K., "An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated, thick rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, 1970, pp. 187~199
24. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Butterworth Heinemann, London, 2000

기 호

\mathbf{X}	쉘 요소내의 임의 점의 위치벡터
$\bar{\mathbf{X}}$	쉘 요소의 중립면에서 임의점의 위치벡터
$\bar{\mathbf{X}}^a$	쉘 요소의 중립면에서 노드 a 의 위치벡터
$\bar{\mathbf{D}}$	한점을 통과하고 섬유방향을 정의하는 중립면에서의 위치벡터
$\hat{\mathbf{D}}^a$	중립면에 법선을 이루는 노드 a 에서의 단위벡터
h^a	노드 a 에서의 쉘의 두께
$N_a(\xi_1, \xi_2)$	노드 a 와 관련된 2차식의 Lagrange형상 함수
\mathbf{x}	변형후 쉘 요소내의 임의 점에서의 위치 벡터
$\bar{\mathbf{x}}$	변형후 쉘요소의 중립면에서 임의점의 위치 벡터
$\bar{\mathbf{d}}$	변형후 중립면에서의 섬유방향을 정의하는 위치벡터
$\bar{\mathbf{x}}^a$	중립면에서 노드 a 에서의 위치벡터
$\hat{\mathbf{d}}^a$	변형후의 노드 a 에서의 법선단위 벡터
\mathbf{u}	임의점에서의 변위 벡터
$\bar{\mathbf{u}}$	중립면에서 임의점에서의 변위벡터
$\bar{\mathbf{e}}$	법선방향의 회전에 의한 변위 벡터
$\hat{\mathbf{e}}^a$	노드 a 에서의 섬유변위벡터
$\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	대류 곡면 좌표계(일반 좌표계)
$\tilde{E}_{\alpha\beta}$	Green 변형을 텐서에 해당되는 자연 변형을 텐서
$\tilde{E}_{\alpha\beta}^m, \tilde{E}_{\alpha\beta}^b, \tilde{E}_{\alpha 3}^s$	막, 휨 및 횡전단 변형을 성분
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	유한 회전 처짐을 표현하는 세 연속 회전각
\mathbf{T}_R	연속회전에 대한 변환행렬
$T_{Ri}(\theta_i)$	각 회전에 대한 변환행렬
$\mathbf{I}_{3 \times 3}$	3×3 항등행렬
$\tilde{\mathbf{B}}_m$	막 선형 연산자 행렬
$\tilde{\mathbf{B}}_b$	휨 선형 연산자 행렬
$\tilde{\mathbf{B}}_s$	횡전단 선형 연산자 행렬
$\tilde{\mathbf{e}}_{12}$	면내전단 변형을
$\tilde{\mathbf{e}}_{11}, \tilde{\mathbf{e}}_{22}$	막 가정변형을
$\tilde{\mathbf{e}}_{13}, \tilde{\mathbf{e}}_{23}$	횡전단 가정 변형을
$Q_j(\xi_i), P_i(\xi_i)$	가정 자연 변형률장에 대한 보간 함수
\tilde{J}_0	자코비안 행렬의 행렬식
\mathbf{D}	재료각 θ 를 갖는 직교이방성 재료의 구성 행렬
\mathbf{S}	2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서
$\tilde{\mathbf{C}}$	일반구성행렬
$\tilde{\mathbf{E}}$	Green-Lagrangean 변형을 텐서
\mathbf{C}	직교 이방성계의 구성행렬

T	변환행렬
$[A]$	면내력 강성행렬
$[B]$	휨-면내력 복합 강성 행렬
$[D]$	휨 강성 행렬
$[G]$	횡 전단 강성 행렬
N	면내력
M	모멘트
Q	수직전단력
K_L	선형 탄성 접선 행렬
\tilde{B}	가정 변형률에 대한 선형 연산자 행렬
ρ	요소 재료 밀도
ω_k	k 번째 모드와 관련된 고유 진동수
Z_k	모드벡터
m	변위 자유도에 해당하는 집중 질량
M^e	요소당 총 질량
M	n -절점 쉘 요소의 분포 질량 행렬
E_1, E_2, E_3	1,2,3 방향으로의 Young계수
ν_{ij}	Poisson 비
G_{12}, G_{23}, G_{13}	1-2, 2-3, 1-3 면에서의 전단계수