논문 2004-41SC-5-3

시간지연 퍼지 시스템의 지연 종속 퍼지 H_2/H_∞ 제어기 설계

(Delay-dependent Fuzzy H_2/H_∞ Controller Design for Delayed Fuzzy Dynamic Systems)

이 갑 래*, 김 종 해**, 정 은 태***

(Kap Rai Lee, Jong Hae Kim, and Eun Tae Jeung)

요 약

시간지연을 갖는 퍼지 시스템에 대한 지연 종속 퍼지 H_2/H_∞ 제어기 설계 방법을 제안한다. 지연 종속 Lyapunov 함수를 이용하여 폐루프 시스템의 점근적 안정화뿐만 아니라 H_2 성능과 H_∞ 성능을 동시에 만족하는 혼합 H_2/H_∞ 성능 문제를 고려한다. 제어기의 존재성에 대한 충분조건을 유도하고 선형행렬부등식(LMI: linear matrix inequality)으로 나타낸다. 제어기 설계는 병렬 분산 보상의 개념을 이용하고, 퍼지 제어기는 LMI 해를 구함으로써 바로 구할 수 있다. 지연 종속 퍼지 제어기는 존재 조건을 나타내는 선형 행렬 부등식에 시간지연항의 크기를 포함하고 있으므로 시간지연항의 크기를 고려할 수 있다. 따라서 시간지연의 크기에 상관없이 시스템을 안정화 시키는 지연 독립적인 제어기 보다 더 효과적인 설계방법이다. 제안한 방법의 설계과정 및 타당성을 시뮬레이션 예제를 통하여 나타내고 기존의 시간 지연 독립적인 퍼지 H_2/H_∞ 제어기 설계 방법보다 효과적인 방법임을 확인한다.

Abstract

A delay dependent fuzzy H_2/H_∞ controller design method for delayed fuzzy dynamic systems is considered. Using delay-dependent Lyapunov function, the asymptotical stability and H_2/H_∞ performance problem are discussed. A sufficient condition for the existence of fuzzy controller is presented in terms of linear matrix inequalities(LMIs). A simulation example is given to illustrate the design procedures and performances of the proposed methods

Keywords : 시간지연 퍼지시스템, 퍼지 H_2/H_∞ 제어기, 지연종속 제어기, 선형행렬 부등식

I. 서 론

비선형 시스템에 대한 체계적인 퍼지 제어기 설계방법으로 안정성과 성능을 수학적으로 보장하는 연구가 최근에 많이 이루어져 왔다. 이의 설계 방법들은 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델로 나타내고 제어기도 병렬 분산 보상(PDC: parall distributed compensation) 개념을 이용하여 퍼지 제어기로 나타낸 후, 이에 대한 안정성과 성능을 보장하는 제어기 이득값을 찾는 방법들이다[1]-[10]. 퍼지 제어 시스템에 대한 안정성뿐만 아니라 외부외란 감쇠 성능을 갖는 H_∞제어로서 Han[3] 및 Lee[4] 등은 상태궤환 퍼지 H_∞제어기를 설계하였으며, Chen 등[5]은 관측기 구조의 퍼지 H_∞ 제어기를 설계하였다. Jadbabaie[6] 등은 안정성과 LQ성능을 만족하는 상태궤환 퍼지 제어기를 설계하였으며 Chen 등[7]은 혼합 H_2/H_∞성능을 만족시키는 출력궤환 제어기를 설계하였다.

시간지연을 갖는 퍼지 시스템에 대한 연구결과로 Cao 등[8]은 안정성을 만족하는 관측기 구조의 퍼지 제

* 정회원, 평택대학교 정보과학부(책임저자)
(Dept. of Information Science, Pyongtaek University)
** 정회원, 선문대학교
(Divisi. of Electronics, Information and Communication, Sunmoon University)
*** 정회원, 창원대학교.
(Dept.of Control and Instrumentation Engineering Changwon National University)
접수일자: 2004년4월29일, 수정완료일: 2004년9월9일

어기를 설계하였으며 Lee[9] 등은 안정성과 H_∞ 성능을 만족하는 출력궤환 제어기를 설계하였다. 또한 조[10] 등은 시간지연 퍼지 시스템에 대해 혼합 H_2/H_∞ 성능을 갖는 제어기를 설계하였다.

이의 모든 결과 들은 시간지연의 크기에 상관없이 시스템을 안정화 시키는 지연 독립적인 안정화 방법이다. 시간 지연의 크기가 크지 않는 경우 지연 독립적 안정화 방법보다 지연 종속적인 안정화 방법이 더 적당한 방법으로 선형 시스템에서는 잘 알려져 있으며, 특히 시간지연 상한치를 고려한 지연 종속적인 방법이 효과적이다 [11, 12]. 시간지연을 갖는 퍼지 시스템에 대해 지연 종속적인 설계 방법으로서 Lee[13]은 지연 종속 H_∞ 필터를 설계하였다. 본 논문에서는 시간지연을 갖는 퍼지 시스템에 대해서 안정성뿐만 아니라 H_2/H_∞ 성능을 보장하는 지연 종속적인 퍼지 H_2/H_∞ 제어기를 설계한다. 지연 종속적 Lyapunov 함수를 이용하여 폐-루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건과 H_2 성능 조건을 동시에 만족하는 충분조건을 유도한다. 또한 이러한 충분조건식으로부터 퍼지 제어기 존재할 조건을 선형행렬부등식으로 나타낸다. 퍼지 제어기는 선형행렬 부등식의 해로부터 구하며. 선형행렬 부등식에는 시간지연의 크기가 포함된다.

Ⅱ. 문제설정

T-S 퍼지 모델은 비선형 시스템을 모델링하는데 효과적인 방법으로 알려져 있다. 시간지연 T-S 퍼지 모델

Plant Rule i:

$$\begin{aligned} &\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig} \\ &\text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_{ui} u(t) + B_i w(t) \\ &\qquad e(t) = C_i x(t) + D_i u(t), \quad i = 1, 2, \cdots, r \\ &\qquad x(t) = \phi(t), \quad t \le 0 \end{aligned} \tag{1}$$

을 고려한다. 여기서 M_{ij} 는 퍼지 집합이고, $x(t) \in \mathrm{R}^n$ 는 상태변수, $\phi(t) \in \mathrm{R}^n$ 는 초기값 함수, $u(t) \in R^m$ 은 입력, $w(t) \in \mathrm{R}^p \in L_2(0, T)$ 는 제한된 에너지를 갖는 외부외란, $e(t) \in R^q$ 는 제어할 변수, r은 IF-THEN 규칙의 수, $z_1 \sim z_g$ 는 측정 가능한 시스템 변수, 즉 전건부 변수이며, $A_i, A_{di}, B_i, B_{ui}, C_i, D_i$ 는 공칭시스템을 나나내는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. τ 는

$$0 \le \tau \le \bar{\tau} \tag{2}$$

을 만족하는 모르는 상수 시간지연이라고 가정한다. 퍼지 시스템의 추론된 최종 출력은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \{ A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i w(t) + B_{ui} u(t) \} \\ e(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \{ C_i x(t) + D_i u(t) \} \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \le 0 \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} w_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(z_j(t)) \\ h_i(z(t)) &= w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) \\ z(t) &= [z_1(t) \; z_2(t) \; \cdots \; z_n(t)]^T \end{aligned} \tag{4}$$

이며, $M_{ij}(z_j(t))$는 멤버쉽 함수 M_{ij}에서 $z_j(t)$의 멤버쉽 등급이다. 모든 시간 t 에 대하여

$$\begin{aligned} w_i(z(t)) &\ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r \\ \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) &> 0 \end{aligned} \tag{5}$$

을 가정하면

$$\begin{aligned} h_i(z(t)) &\ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r \\ \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

이다. 퍼지 시스템 (1)에 대한 퍼지 H_∞ 제어기로

Control Rule i:

$$\begin{aligned} &\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig} \\ &\text{THEN } u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \cdots, r \end{aligned} \tag{7}$$

을 고려한다. 여기서 K_i 는 설계되어질 제어기의 i 번째 이득행렬이다. 이러한 퍼지 제어기의 최종 출력은

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) K_i x(t) \tag{8}$$

이다. 퍼지 제어기 (8) 및 퍼지 시스템 (3)으로부터 폐-루프 시스템은

$$\dot{x}(t) = \hat{A}(z)x(t) + \hat{A}_d(z)x(t-\tau) + \hat{B}(z)w(t)$$
$$x(t) = \psi(t), \ t \le 0$$
$$\tilde{e}(t) = \hat{C}x(t) \tag{9}$$

이다. 여기서

$$\hat{A}(z) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\hat{A}_{ij},$$
$$\hat{A}_d(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\hat{A}_{di}, \tag{10}$$
$$\hat{B}(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\hat{B}_i,$$
$$\hat{C}(z) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t))h_j(x(t))\hat{C}_{ij}$$
$$\hat{A}_{ij} = A_i + B_{ui}K_j, \hat{A}_{di} = A_{di} \tag{11}$$
$$\hat{B}_i = B_i, \ \hat{C}_{ij} = C_i + D_iK_j$$

이다. 주어진 γ 에 대해서 H_∞ 제어 성능

$$\begin{aligned} J_\infty := \int_0^T \|\tilde{e}(t)\|^2 dt \le \gamma^2 [\int_0^T \|w(t)\|^2 dt \\ + x^T(0)Q_0x(0) + \int_{-\tau}^0 x^T(\tau)Q_1x(\tau)d\tau \quad (12) \\ + \int_{-\tau}^0\int_\theta^0 \dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)dsd\theta] \end{aligned}$$

을 고려한다. 여기서 $T>0$, $w \in L_2[0 \ \ T]$이며 $\|\cdot\|$는 Euclidean norm 이다. 식 (12)에 있는 하중행렬 $Q_i > 0, i = 0,1,2$는 초기상태 불확실성의 정도를 나타내는 행렬이다.

일반적으로 원하는 제어 성능을 달성하기 위해서는 H_2제어가 더 효과적이다. 즉, 외란 $w(f)$를 고려하지 않은 시스템에서 H_2 필터링 성능의 비용함수

$$J_2 := \int_0^T [\tilde{e}(t)Q_L\tilde{e}(t)]dt < \delta \tag{13}$$

을 고려한다.

본 논문에서는 시간지연을 갖는 퍼지 시스템 (3)에서 퍼지 제어기 (8)를 결합할 때 폐-루프 시스템 (9)이 안정화 될 뿐만 아니라 비용함수 (12)를 만족하면서 (13)의 상한값 δ을 최소화 시키는 지연 종속적인 제어기 (8)의 K_i, 를 설계하고자 한다.

III. 퍼지 H_2/H_∞ 제어기 설계

정리 1 [12] : 구간 Ω에서 정의되어진 $a(\cdot) \in R^{n_a}$, $b(\cdot) \in R^{n_b}$및 $N(\cdot) \in R^{n_a \times n_b}$ 을 고려하면, 어떤 행렬 $X \in R^{n_a \times n_a}$, $Y \in R^{n_a \times n_b}$ 및 $Z \in R^{n_b \times n_b}$에 대해

$$\begin{aligned} &-2\int_\Omega a^T(\alpha)Nb(\alpha)d\alpha \\ &\le \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \end{aligned} \tag{14}$$

을 만족한다. 여기서

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge 0 \tag{15}$$

이다.

정리 2 :시간지연을 갖는 퍼지 시스템 (3)을 고려한다. 주어진 상수 $\gamma > 0$ 에 대해서

$$\Omega_{ii} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{16}$$
$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad i<j<r, \ i = 1,2,\cdots,r, \tag{17}$$
$$\begin{bmatrix} R & R' \\ * & S \end{bmatrix} \ge 0 \tag{18}$$
$$\begin{aligned} P - \gamma^2 Q_0 < 0 \\ \mathcal{R} - \gamma^2 Q_1 < 0 \\ S - \gamma^2 Q_2 < 0 \end{aligned} \tag{19}$$

을 만족하는 $P>0$, $S>0$, $\mathcal{R}>0$, $R>0$, R' 가 존재하면, 폐-루프 시스템 (9)은 점근적으로 안정할 뿐만 아니라 H_∞ 성능 (12)을 만족한다. 여기서

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} (1,1) & P\mathcal{A}_{1i} - R' & P\mathcal{B}_{ij} & \mathcal{A}_{ij}^T \\ * & -\mathcal{R} & 0 & \mathcal{A}_{1i}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \mathcal{B}_{ij}^T \\ * & * & * & (-\bar{\tau}S)^{-1} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

이며 $*$는 대칭행렬의 주 대각 아래 성분을 나타내며

$$(1,1) = \mathcal{A}^T_{ij}P + P\mathcal{A}_{ij} + \bar{\tau}R + 2R' + \mathcal{R} + \mathcal{C}_{ij}^T\mathcal{C}_{ij} \tag{21}$$

이다.

(증명): $P>0,\ S>0$ 및 $\mathcal{R}>0$ 을 만족하는 Lyapunov 함수

$$V(x,t)=V_1(x,t)+V_2(x,t)+V_3(x,t) \tag{22}$$

을 고려한다. 여기서

$$V_1(x,t)=x^T(t)Px(t) \tag{23}$$

$$V_2(x,t)=\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)dsd\theta \tag{24}$$

$$V_3(x,t)=\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)\,\mathcal{R}x(s)ds \tag{25}$$

이다. Lyapunov 함수로부터

$$\delta_1\|x(t)\|^2\le V(x,t)\le\delta_2\sup_\theta\|x(t+\theta)\|^2 \tag{26}$$

을 만족하는 양수 δ_1 및 δ_2 는 항상 존재한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $w(t)=0$ 인 시스템 (9)의 모든 궤적에 대해 $\dot{V}(x,t)\le 0$을 만족하면 Lyapunov-Krasovskii 정리[14] 로부터 시스템 (9)은 점근적으로 안정하다. H_∞ 성능 (12)을 고려하기 위하여

$$J_a(t)=\dot{V}(x,t)+\tilde{e}^T(t)\tilde{e}(t)-\gamma^2w^T(t)w(t)\le 0 \tag{27}$$

을 고려한다. 시간지연 항

$$x(t-\tau)=x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)ds \tag{28}$$

및

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}h_ih_jh_kh_lX_{ij}^TSX_{kl}^T\\ &\le\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jX_{ij}^TSX_{ij}\end{aligned} \tag{29}$$

을 고려하여 [13]의 Lemma 2와 유사하게 전개하면 (16)-(18)이 얻어진다. (16)-(18)이 만족되어지면 시스템 (9)은 점근적으로 안정하며 (27)가 만족되어진다. (27)로부터 $V(\zeta,T)>0$이기 때문에

$$\begin{aligned}&\int_0^T\|\tilde{e}(t)\|^2dt-\gamma^2\int_0^T\|w(t)\|^2dt\\ &\le x^T(0)Px(0)+\int_{-\tau}^{0}x^T(\tau)\,\mathcal{R}x(\tau)d\tau\\ &+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned} \tag{30}$$

이다. 초기조건 (9)으로부터

$$\begin{aligned}&\int_0^T\|\tilde{e}(t)\|^2dt-\gamma^2[\int_0^T\|w(t)\|^2dt+x^T(0)Q_0x(0)\\ &+\int_{-\tau}^{0}x^T(\tau)Q_1x(\tau)d\tau+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)dsd\theta]\\ &\le x(0)^T\{P-\gamma^2Q_0\}x(0)+\int_{-\tau}^{0}x^T(\tau)\{\mathcal{R}-\gamma^2Q_1\}x(\tau)d\tau\\ &+\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^T(s)\{S-\gamma^2Q_2\}\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned} \tag{31}$$

이다. 따라서 (16)-(19)가 만족되어지면 H_∞ 성능 (12)가 만족되어짐을 알 수 있다. □

정리 3. 시간지연을 갖는 퍼지 시스템 (3)을 고려한다.

$$\Psi_{ii}<0,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{32}$$

$$\Psi_{ij}+\Psi_{ji}<0,\quad i<j<r, \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix}R & R'\\ * & S\end{bmatrix}\ge 0 \tag{34}$$

을 만족하는 상수행렬 $P>0,\ S>0,\ \mathcal{R}>0\ ,R>0,\ R'$ 이 존재하면 추정 오차시스템은 H_2 성능지수 (13)를 만족하며 H_2 성능지수의 상한값은

$$\begin{aligned}\delta=&\,x^T(0)Px(0)+\int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)dsd\theta\\ &+\int_{-\bar{\tau}}^{0}x^T(s)\,\mathcal{R}x(s)ds\end{aligned} \tag{35}$$

이다. 여기서

$$\Psi_{ij}=\begin{bmatrix}(1,1)+\mathcal{C}_i^TQ_L\mathcal{C}_i & P\mathcal{A}_{1i}-R' & \mathcal{A}^T_{ij}\\ * & -\mathcal{R} & \mathcal{A}_{1i}^T\\ * & * & -(\bar{\tau}S)^{-1}\end{bmatrix} \tag{36}$$

이고 *는 대칭행렬의 주 대각 아래 성분을 나타내며

$$(1,1)=\mathcal{A}_{ij}^TP+P\mathcal{A}_{ij}+\bar{\tau}R+2R'+\mathcal{R}$$

이다.

(증명) : H_2 성능의 비용함수

$$\begin{aligned}J_2&=\int_0^{t_f}\{\tilde{e}^T(t)Q_L\tilde{e}(t)\}dt\\ &=V(0)-V(t_f)+\int_0^{t_f}[e^T(t)Q_Le(t)+\dot{V}(t)]dt\\ &\le V(0)+\int_0^{t_f}[e^T(t)Q_Le(t))+\dot{V}(t)]dt.\end{aligned} \tag{37}$$

이다. 만일

$$J_L := V(t) + e^T(t)e(t) < 0 \tag{38}$$

을 만족한다면, H_2 성능의 상한치는

$$J_2 \le V(0) = x^T(0)Px(0) + \int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)dsd\theta$$
$$+ \int_{-\bar{\tau}}^{0} x^T(s)\,\mathcal{R}x(s)ds \tag{39}$$

이다. 정리1과 유사한 방법으로, 리아프노프 함수 (22) 로부터

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j(\ \mathcal{C}_i x(t))^T Q_L\, \mathcal{C}_j x(t)\\ &\le \sum_{i=1}^{r} h_i x^T(t)\ \ \mathcal{C}_i^{\,T} Q_L\ \mathcal{C}_i x(t)\end{aligned} \tag{41}$$

을 고려하여 (38)를 전개하면

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\,h_i(z(t))\,\Psi_{ii}\\ &+\sum_{i<r} h_i(z(t))\,h_j(z(t))\,\{\Psi_{ij}+\Psi_{ji}\}\le 0.\end{aligned} \tag{42}$$

이다. 따라서 (32)-(34)가 만족되어지면 (38)이 만족되어진다. □

따름정리 1은 정리1과 정리2의 결과로부터 H_∞ 성능 (12)와 H_2 성능 (13)의 상한값을 최소화하는 제어기 설계방법을 선형 행렬 부등식으로 나타낸다.

따름정리 1. 시간지연을 갖는 시스템 (3)을 고려한다. 주어진 γ 및 Q_0, Q_1, Q_2 에 대해서 선형행렬 부등식

$$\min[\rho + tr(R_1) + tr(N_2^T R_2 N_2)] \tag{43}$$

Subject to

$$\Phi_{ii} < 0,\quad \Lambda_{ii} < 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\Phi_{ij} + \Phi_{ji} < 0,$$

$$\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji} < 0 \qquad i < j < r,\ \ i = 1, 2, \cdots, r \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ * & X^T + X - S^{-1} \end{bmatrix} \ge 0 \tag{45}$$

$$\begin{bmatrix} -\rho & \phi^T(0) \\ * & -X \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} -R_1 & N_1^T \\ * & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{47}$$

$$H - R_2 < 0 \tag{48}$$

$$X - I > 0 \tag{49}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 Q_0 & I \\ * & -X \end{bmatrix} < 0 \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} H & X \\ * & \gamma^{-2} Q_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 Q_2 & I \\ * & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{52}$$

을 만족하는 행렬 $X > 0$, $S > 0$, H, L_1, L_2, Y_i, $i = 1, 2, \cdots, r$, $R_1 > 0, R_2 > 0$ 및 상수 $\rho > 0$ 가 존재하면, 퍼지 제어기 (8)은 H_∞ 제어성능 (12)와 H_2 성능 (13)의 상한값을 최소화하는 제어기이다. 여기서

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} (1,1) & A_{di}X - L_2 & B_i & (1,4) & (1,5) \\ * & -H & 0 & \bar{\tau}XA_{di}^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}B_i^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{\tau}S^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} (1,1) & A_{di}X - L_2 & (1,4) & (1,5) \\ * & -H & \bar{\tau}XA_{di}^T & 0 \\ * & * & -\bar{\tau}S^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{\psi}(s)\ \dot{\psi}^T(s)dsd\theta = N_1 N_1^T \tag{55}$$

$$\int_{-\bar{\tau}}^{0} \psi(\tau)\psi(\tau)^T d\tau = N_2 N_2^T \tag{56}$$

이며 (,1), (1,4) 및 (1,5)는

$$\begin{aligned}(1,1) &= A_i X + X A_i^T + B_{ui} Y_j\\ &\quad + Y_j^T B_{ui}^T + \bar{\tau} L_1 + 2L_2 + H\\ (1,4) &= \bar{\tau}[XA_i^T + Y_j^T B_{ui}^T]\\ (1,5) &= [C_i X + D_i Y_j]\end{aligned} \tag{57}$$

이다. 또한 제어기 이득 값은

$$K_i = Y_i Q^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{58}$$

로 구해진다..

(증명) : 정리 2로부터 $P^{-1}=X$ 로 두고 (16), (17)의 앞뒤에 $\mathrm{Diag}\{X\ X\ I\ \ I\}$ 을 각각 곱하고

$$\begin{aligned} K_iX &= Y_i, \quad i=1,2,\cdots r \\ XRX &= L_1 \\ XR'X &= L_2 \\ X\mathcal{R}X &= H \end{aligned} \tag{59}$$

로 두면 (44)이 얻어진다. 또한 정리2의 (18) 앞뒤에 $\mathrm{Diag}\{X, X\}$을 곱하면

$$\begin{bmatrix} XRX & XR'X \\ * & XSX \end{bmatrix} \geq 0 \tag{60}$$

이다. $X^TSX \geq X^T+X-S^{-1}$ 를 이용한 후 (59)을 이용하면 (45)이 얻어진다. (46)-(48)는 H_2 성능 (35)의 상한값의 최소화를 위한 식이다. (35) 오른쪽항의 첫 번째 부분은 상한값을 ρ 로 두고 (35) 두 번째 부분은 상한값을 $tr\{R_1\}$ 로 두면 (46) 및 (47)이 쉽게 구해진다. (35) 오른쪽항의 세 번째 부분을 유도하기 위하여 상한값을 $tr\{N_2^TX^{-1}R_2X^{-1}N_2\}$ 로 두면

$$\begin{aligned} &\int_{-\bar{\tau}}^{0} x^T(s)\,\mathcal{R}\,x(s)ds = \int_{-\bar{\tau}}^{0} \psi^T(s)\,\mathcal{R}\,\psi(s)ds \\ &= tr\{N_2N_2^T\mathcal{R}\} \\ &= tr\{N_2^T\mathcal{R}N_2\} < tr\{N_2^TX^{-1}R_2X^{-1}N_2\} \end{aligned} \tag{61}$$

관계식을 만족해야한다. (61)은 $\mathcal{R}-X^{-1}R_2X^{-1}<0$ 을 만족하면 되며 $H-R_2<0$ 와 등가이다. (49)로부터 성능 지수의 상한값은

$$\begin{aligned} &\rho+tr[R_1]+tr[N_2^TX^{-1}R_2X^{-1}N_2] \\ &\quad < \rho+tr[R_1]+tr[N_2^TR_2N_2] \end{aligned} \tag{62}$$

의 관계식을 가진다. 왜냐하면 $X^{-1}R_2X^{-1}<R_2$을 만족하기 위한 필요충분조건은 $R_2<XR_2X$이며, 이 식은 다시 $(X-I)R_2(X+I)>0$와 등가이기 때문이다. 따라서 (49)이 만족되면 (61)이 만족되며 $\rho+tr(R_1)+tr(N_2^TR_2N_2)$는 H_2성능의 상한값이다. (50)-(52)은 정리2의 (19)로부터 (59)을 이용하면 쉽게 얻어진다. □

따름정리 1의 모든 부등식은 변수에 대해서 선형 행렬 부등식(LMI)으로 나타나 있으므로 LMI Toolbox를 이용하면 모든 변수의 해는 바로 구할 수 있다[16, 17]. 구해진 해로부터 제어기 이득값은 (58)로 나타난다. 따름정리 1의 부등식에는 시간지연항의 크기를 포함하고 있다. 따라서 시간지연항의 크기에 상관없이 시스템을 안정화 시키는 기존의 결과들 보다 더 효과적인 설계방법임을 알 수 있다.

Ⅳ. 설계 예제

다음과 같은 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5.125x_1(t)-0.5x_1(t-\tau)-2x_2(t) \\ &\quad -6.7x_2^3(t)-0.2x_2(t-\tau) \\ &\quad -0.67x_2^3(t-\tau)+2u(t)+w(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\ e(t) &= x_1(t)+0.1u(t) \end{aligned} \tag{63}$$

여기서, 시간지연 τ 의 상한치 $\bar{\tau}=1.0$ 이며 초기 상태 값은

$$\psi(t)=[e^t \quad -e^t]^T, \quad t\leq 0\ ] \tag{64}$$

이다. 상태변수 값은

$$\begin{aligned} x_1(t) &\in[-1.5 \quad 1.5], \\ x_2(t) &\in[-1.5 \quad 1.5] \end{aligned} \tag{65}$$

이다. (72)의 비선형 항은

$$-6.7x_2^3(t)=M_{11}\cdot 0\cdot x_{2(t)}-(1-M_{11})\cdot 15.075\,x_2(t). \tag{66}$$

로 표현할 수 있다. (75)로부터 퍼지 집합의 멤버쉽 함수는

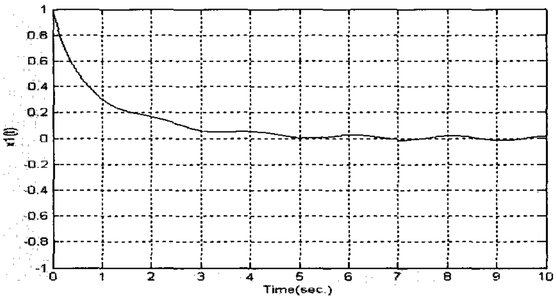
$$\begin{aligned} M_{11}(x_2(t)) &= 1-\frac{x_{2(t)}^2}{2.25} \\ M_{12}(x_2(t)) &= \frac{x_{2(t)}^2}{2.25}. \end{aligned} \tag{67}$$

이다. (76)의 퍼지 집합을 이용하여 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 나타내면

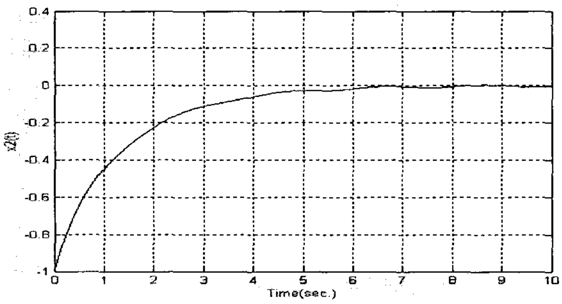
Plant Rule 1:

IF $x_2(t)$ is M_{11} THEN

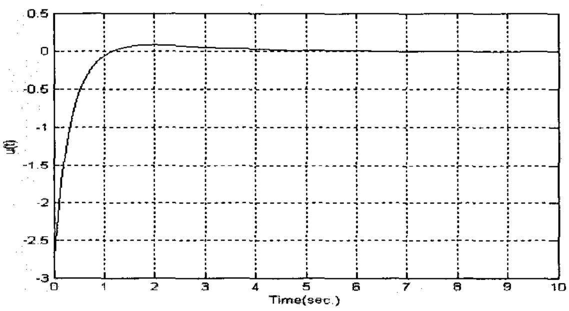
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t)+A_{d1}x(t-\tau)+B_{u1}(t)u(t)+B_1w(t) \\ e(t) &= C_1x(t)+D_1u(t), \end{aligned} \tag{68}$$



(a) 상태변수 $x_1(t)$ 시간응답



(b) 상태변수 $x_2(t)$ 시간응답



(c) 제어입력 $u(t)$ 시간응답

그림 1. 시간지연 비선형 시스템의 시뮬레이션 결과
Fig. 1. The simulation results of delayed nonlinear system

Plant Rule 2: IF $x_2(t)$ is M_{12} THEN

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + A_{d2} x(t-\tau) + B_{u2} u(t) + B_2 w(t)$$
$$e(t) = C_2 x(t) + D_2 u(t) \qquad (69)$$

이다. 여기서 $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$ 이며

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5.125 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -5.125 & -17.075 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.71 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = C_2 = [1 \; 0], \; D_1 = D_2 = 0.1 \qquad (70)$$
$$B_{u1} = B_{u2} = [2 \quad 0]^T, \quad B_1 = B_2 = [1 \quad 0]^T$$

이다.

설계 인자 $Q_0 = Q_1 = Q_2 = \mathrm{diag}(3,3), Q_2 = I, \gamma = 3$, $\bar{\tau} = 1.0$로 두고 따름정리 1을 이용하여 제어기를 설계하면 제어기 이득 값은

$$\begin{aligned} K_1 &= [\,0.2042 \quad -0.4278] \\ K_2 &= [\,0.3043 \quad 7.5052] \end{aligned} \qquad (71)$$

이며 H_2 성능의 최대 상한치는 2.5779이다. 시간지연을 갖는 비선형 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 그림 1에 나타나 있다. 컴퓨터 시뮬레이션에 사용된 외부 외란 신호는

$$w(t) = 0.1 \cdot \cos(\pi t) \qquad (72)$$

이며, 상태의 초기값은

$$[x_1^t(t) \quad x_2^T(t)]^T = [1 \quad -1]^T, \quad t = 0 \qquad (73)$$

이다. 설계되어진 퍼지 제어기는 폐루프 시스템을 안정화 할뿐만 아니라 외란 감쇠 효과를 가짐을 알 수 있다. 시간 지연에 독립적인 퍼지 H_2/H_∞ 설계 방법인 [10]에서는 $\gamma = 6$ 으로 설정되어 있어 본 연구에서의 방법이 덜 보수(less conservative)적인 방법임을 예제에서도 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 시간지연을 갖는 비선형 시스템에 대한 지연 종속 퍼지 H_2/H_∞ 제어기를 설계하였다. 지연종속 리아프노프 함수를 이용하여 폐-루프 시스템의 안정성과 H_2/H_∞ 성능을 만족하는 제어기 존재 조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내었다. 이 선형형렬 부등식의 해로부터 폐-루프 시스템의 안정성과 H_2/H_∞ 성능을 만족하는 퍼지 제어기를 바로 구할 수 있다. 지연 종속 제어기는 존재 조건을 나타내는 선형 행렬 부등식에 시간지연항의 크기를 포함하고 있으므로 시간지연항의 크기를 고려할 수 있어 시간지연의 크기에 상관없이 시스템을 안정화 시키는 지연 독립적인 제어기 보다 더 효과적인 설계방법이다. 제안한 방법의 설계과정 및 타당성을 시뮬레이션 예제를 통하여 나타내었으며, 기존의 시간 지연 독립적인 퍼지 H_2/H_∞ 설계 방법보다 효과적인 방법임을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, co "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 4, no. 1, pp. 1-13, Feb. 1996.

[2] X. J. Ma, Z. Q. Sun, and Y. Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy obser -ver," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 6, pp. 41 -51, Feb. 1998.

[3] Z. Han and G. Feng, "State feedback H_∞ con -troller design of fuzzy dynamic systems using LMI techniques," in Proc. FUZZ-IEEE, Anchora -ge, AK, May 1988, pp. 538-544.

[4] K. R. Lee, E. T. Jeung and H. B. Park, "Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear syste -ms via state feedback : an LMIapproach," Fuzzy Sets and System., vol. 120, no. 1, pp. 3-134, 2001.

[5]B. S. Chen, C. S. Tseng, and H. J. Uang, "Robustness design of nonlinear dynamic syste -ms via fuzzy linear control," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 7, pp. 571-585, Oct. 1999.

[6] A. Jadbabie, M. Jamshidi, and A. Titli, "Guarantwd cost design of continuos-time Takagi-Sugeno fuzzy controllers via linear matrix inequalities," in Proc. FUZZ-IEEE, Anchorage, AK, May 1988, pp. 268-273.

[7] B. S. Chen, C. S. Tseng, and H. J. Uang, "Mixed H_2/H_∞ fuzzy outout feedback control design for nonlinear dynamic systems : an LMI approach," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 8, no. 3, pp. 249-265, June. 2000.

[8] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 8, no. 2, pp. 200-211, April. 2000.

[9] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung and H. B. Park, "Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time -varying delay," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 8, no. 6, pp. 657-664, Decem. 2000.

[10] 조희수, 이갑래, 박홍배, "시간지연을 갖는 비선형 시스템의 퍼지 H_2/H_∞ 제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템 공학 논문지, 제 8권, pp. 578-583, 2002.

[11] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent ro -bust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : a linear matrix inequality approach," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148, August. 1997.

[12] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," Int. J. Control., vol. 74, no. 14, pp. 1447-1455, 2001.

[13] K. R. Lee, "Delay-dependent H_∞ filter design for delayed fuzzy dynamic systems,"Journal of control, automation, and systems engineering of korea, vol. 10, no. 7, pp. 618-624, July. 2004.

[14] J. Hale. Theory of Functional Differential Equations. NewYork: Springer-Verlag, 1997.

[15] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakri -shnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, 1994.

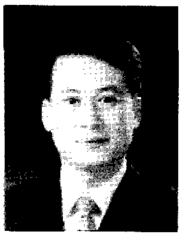
[16] Y. Nesterov and A. Nemirovski, Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications, SIAM, Philadelphia, 1994.

[17] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

이 갑 래(정회원)
1987년 경북대학교 전자공학과(공학사)
1990년 경북대학교 대학원 전자공학과(공학석사)
1999년 경북대학교 대학원 전자공학과(공학박사)
1990년~1995년 국방과학연구소 연구원
1997년~2001년 두원공과대학 조교수
2001년~현재 평택대학교 정보통신학과 조교수
<주관심분야: 퍼지 및 H_∞ 제어, 필드버스 네트워크, 임베디드 시스템, 디지털신호처리 등>

정 은 태(정회원)
1991년 경북대학교 전자공학과(공학사)
1993년 경북대학교 대학원 전자공학과(공학석사)
1996년 경북대학교 대학원 전자공학과(공학박사)
1997년~현재 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 부교수
<주관심분야: 견실제어, H_∞ 제어, 시간지연, 퍼지 제어 등>



김 종 해(정회원)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.
1995년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학석사
1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사
1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원
2000년~2001년 일본 오사카대학 컴퓨터기계공학과 객원연구원
2002년~현재 선문대학교 전자정보통신공학부 조교수
<주관심분야: 강인제어, 시간지연 시스템 해석 및 제어기 설계, 특이시스템 해석 및 설계, 산업응용 제어, 비약성(non-fragile) 및 신뢰(reliable)제등.>