

# 입출력선형화 상태변환을 이용한 비선형 시스템의 저차 관측기 설계

## Reduced-Order Observer Design for Nonlinear Systems Using Input Output Linearization Transformation

조 남 훈\*  
(Nam-Hoon Jo)

**Abstract :** In this paper, we present a reduced-order observer for a class of nonlinear systems based on the input output linearization. While the most results in the literature presented full-order nonlinear observer, we proposed a procedure for the design of reduced-order observer for nonlinear systems that are not necessarily observable. Assuming that there exists a global observer for internal dynamics and that certain functions are globally Lipschitz, we can design a global reduced-order observer. An illustrative example is included that demonstrate the design procedure of the proposed reduced-order observer.

**Keywords :** nonlinear system, normal form, state observer, reduced-order observer

### I. 서론

Krener와 Isidori가 참고문헌 [1]에서 비선형 관측기 표준형으로의 변환조건을 제시한 이후로 비선형 관측기에 대한 연구는 지난 20여 년간 매우 활발히 진행되어 왔다. 이 연구의 영향을 받아 참고문헌 [2]에서는 다중출력 시스템에 대한 비선형 관측기가 제시되었으며, 참고문헌 [3]에서는 블록 삼각 비선형 관측기 표준형을 이용하여 관측기가 존재하기 위한 조건을 좀 더 완화하기도 하였다. 또한, 참고문헌 [4], [5], [6]에서는 시스템의 비선형성의 영향을 강제적으로 상쇄시키기 위하여 고이득을 이용한 비선형 관측기를 제시하기도 하였다. 또한, Tsiniaris는 참고문헌 [7]에서 관측오차에 대한 유사 리아프노프 함수를 소개하고 이를 이용한 비선형 시스템 관측기를 제시하였다. 참고문헌 [8]에서는 비선형 관측기를 Ball and Beam 시스템에 적용하여 우수한 관측 성능을 입증하기도 하였다. 이러한 대부분의 연구는 비선형 시스템이 관측 가능한 경우에 적용 가능한 경우가 대부분인데, 최근에 참고문헌 [9]에서는 입출력 선형화 상태변환을 이용하여 관측가능하지 않은 비선형 시스템에 대한 관측기를 제시하였다.

본 논문에서는 관측가능하지 않은 비선형 시스템에 대해서 저차관측기(reduced order observer)를 제시하고자 한다. 시스템의 출력은 항상 측정 가능하므로, 측정되지 않는 상태변수만을 추정하는 관측기를 설계할 수 있는데 이를 저차 관측기라고 한다. 저차관측기를 사용하면 관측기의 차수를 줄일 수 있어서 더 간단하고 더 경제적인 관측기를 설계할 수 있으며 결과적으로 더 경제적인 보상기를 설계할 수 있다. 한편, 앞서 언급한 것과 같이 비선형 시스템의 관측기를 설계하는 방법은 여러가지가 존재하는데, 본 논문에서는

참고문헌 [9]에서 사용한 입출력 선형화 상태변환에 기반한 기법을 제시할 것이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 제시할 저차관측기가 존재하기 위한 가정을 소개한다. 3장에서는 제시할 저차관측기를 소개하고, 관측오차의 안정성에 대한 결과를 제공한다. 4장에서는 제안된 관측기의 설계방법을 예제를 통하여 설명하고, 마지막으로 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시한다.

시작하기 전에, 본 논문에서 사용되는 주요 용어를 정의하도록 한다. 어떤 다항식의 모든 근이 음의 실수부(negative real part)를 갖는 경우 이 다항식을 Hurwitz라 하며, 마찬가지로 어떤 행렬의 모든 고유치(eigenvalue)가 음의 실수부를 갖는 경우 이 행렬을 Hurwitz라고 한다. 대칭행렬  $A \in R^{n \times n}$ 가 모든  $x \in R^n$ ,  $x \neq 0$ 에 대해서  $x^T A x > 0$ 을 만족하면 양정치(positive definite) 행렬이라고 한다. 어떤 벡터장(vector field)  $f$ 에 대해서, 미분방정식  $\dot{x} = f(x)$ 의 해가 모든  $t \in R$ 에 대해서 존재하면 벡터장  $f$ 가 완전(complete)하다고 한다. 어떤 벡터장  $f : R^n \rightarrow R^n$ 와 평활한 함수  $h : R^n \rightarrow R$ 에 대해서  $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f$  이고  $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$ ,  $i \geq 2$ 이다.

### II. 기본 가정과 상태 변환

본 논문에서는 다음과 같은 단일입력 단일출력(SISO) 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n$ ,  $u, y \in R^1$ 이고  $f, g$ 는 평활한 벡터장(smooth vectorfields)이며  $h : R^n \rightarrow R^1$ 는 평활한 함수이다. 또한,  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ 를 가정한다.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 4. 6., 채택확정 : 2004. 6. 27.

조남훈 : 숭실대학교 전기제어시스템공학부(nhjo@ssu.ac.kr)

※ 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

본 논문에서 제안하는 관측기는 입출력 선형화에서 사용되는 상태변환을 이용한다. 입출력 선형화를 수행하면, 일반적으로 시스템의 상대차수는  $n$ 보다 작은 값을 갖게 되는데, 본 논문에서는 시스템의 상대차수를  $r \leq n$ 로 표기하도록 한다.

H1 : 시스템 (1)은 상대차수  $r \leq n$ 을 갖으며, 벡터장  $ad_f^{i-1}g(x)$ ,  $1 \leq i \leq r$ 은 완전하다. 여기서

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f - \frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} g \\ \tilde{g} &= \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} g \end{aligned}$$

이다.

가정 H1으로부터 좌표변환

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= [\xi^T, \eta^T]^T \\ &= [h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x), \eta_1(x), \dots, \eta_{n-r}(x)]^T \quad (2) \end{aligned}$$

이 전역적 미분동형사상(global diffeomorphism)이 되고 비선형시스템 (1)을 입출력 선형화 표준형 (3)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \bar{A}\xi + \bar{B}[L_f^r h(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ &\quad + L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\xi, \eta))u] \quad (3) \\ \eta &= q(\xi, \eta) \\ y &= C\xi \end{aligned}$$

으로 변환시키는  $n-r$ 개의 함수  $\eta_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n-r$ 가 존재한다[10]. 여기서 행렬  $\bar{A} \in R^{r \times r}$ ,  $\bar{B} \in R^{r \times 1}$ ,  $\bar{C} \in R^{1 \times r}$ 은

$$\begin{aligned} \bar{A} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4) \\ \bar{C} &\triangleq [1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned}$$

로 정의된다. 또한, 가정 H1으로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h &= 0, \quad 0 \leq i \leq r-2 \\ L_g L_f^{r-1} h &\neq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이제, 새로운 함수  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ 을

$$\begin{aligned} z_1 &= L_f h - \frac{k_1}{\epsilon} h \\ z_2 &= L_f^2 h - \frac{k_2}{\epsilon^2} h \\ &\vdots \\ z_{r-1} &= L_f^{r-1} h - \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} h \end{aligned} \quad (6)$$

로 정의하면 (5)로부터  $i=1, \dots, r-2$ 일 때

$$\begin{aligned} L_g z_i &= L_g L_f^i h - k_i L_g h \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_f z_1 + u L_g z_1 \\ &= L_f^2 h - \frac{k_1}{\epsilon} L_f h \\ &= -\frac{k_1}{\epsilon} \left( L_f h - \frac{k_1}{\epsilon} h \right) - \frac{k_1^2}{\epsilon^2} h + \left( L_f^2 h - \frac{k_2}{\epsilon^2} h \right) + \frac{k_2}{\epsilon^2} h \\ &= -\frac{k_1}{\epsilon} z_1 + z_2 + \left( \frac{k_2}{\epsilon^2} - \frac{k_1^2}{\epsilon^2} \right) h \\ \dot{z}_2 &= L_f z_2 + u L_g z_2 \\ &= L_f^3 h - \frac{k_2}{\epsilon^2} L_f h \\ &= -\frac{k_2}{\epsilon^2} \left( L_f h - \frac{k_1}{\epsilon} h \right) - \frac{k_1}{\epsilon} \frac{k_2}{\epsilon^2} h + \left( L_f^3 h - \frac{k_3}{\epsilon^3} h \right) + \frac{k_3}{\epsilon^3} h \\ &= -\frac{k_2}{\epsilon^2} z_1 + z_3 + \left( \frac{k_3}{\epsilon^3} - \frac{k_1}{\epsilon} \frac{k_2}{\epsilon^2} \right) h \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-2} &= -\frac{k_{r-2}}{\epsilon^{r-2}} z_1 + z_{r-1} + \left( \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} - \frac{k_1}{\epsilon} \frac{k_{r-2}}{\epsilon^{r-2}} \right) h \\ \dot{z}_{r-1} &= L_f z_{r-1} + u L_g z_{r-1} \\ &= L_f^r h - \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} L_f h + u L_g L_f^{r-1} h - \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} u L_g h \\ &= L_f^r h - \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} L_f h + u L_g L_f^{r-1} h \\ &= -\frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} \left( L_f h - \frac{k_1}{\epsilon} h \right) - \frac{k_1}{\epsilon} \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} h + L_f^r h \\ &\quad + u L_g L_f^{r-1} h \\ &= -\frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} z_1 - \frac{k_1}{\epsilon} \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} h + L_f^r h + u L_g L_f^{r-1} h \end{aligned} \quad (7)$$

저차관측기의 상태변수로 사용될 새로운 변수

$$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{r-1}]^T \quad (8)$$

와 관측기 이득  $K(\epsilon) \in R^{(r-1) \times 1}$ 을

$$K(\epsilon) = \left[ \frac{k_1}{\epsilon} \ \dots \ \frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} \right]^T \quad (9)$$

로 정의하면, (2), (6), (8)로부터

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= [h \ L_f h \ \dots \ L_f^{r-1} h]^T \\ &= \begin{bmatrix} h \\ z + K(\epsilon)y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

를 얻을 수 있다. 또한, 행렬  $A \in R^{(r-1) \times (r-1)}$ ,  $B \in R^{(r-1) \times 1}$ ,  $C \in R^{1 \times (r-1)}$ 를 (4)와 같은 형태로 정의하고 함수

$$a(x, u) = L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x) \quad (11)$$

을 정의하면 (7), (8), (9), (11)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - K(\epsilon)C)z + (A - K(\epsilon)C)K(\epsilon)y \\ &\quad + Ba(x, u) \end{aligned} \quad (12)$$

이제 (2), (10)로부터

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi^T & \eta^T \\ y \\ z + K(\epsilon)y \\ \eta \end{bmatrix}^T$$

이므로

$$x = \Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta)$$

로 표현할 수 있다. 따라서, (3)과 (12)로부터 저차관측기 표준형(reduced-order observer canonical form) (13)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - K(\epsilon)C)z + (A - K(\epsilon)C)K(\epsilon)y \\ &\quad + B\alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u) \\ \dot{\eta} &= q(y, z + K(\epsilon)y, \eta) \end{aligned} \quad (13)$$

관측기를 설계하기 위해서는 저차관측기 표준형 (13)의 비선형 함수인 (11)의 영향을 강제적으로 상쇄시킬 수 있는 고이득이 필요하며, 이를 가능하게 하는 조건이 필요하다.

H2 : 단조증가함수  $\beta: R^+ \rightarrow R^+$ 이 존재하여 모든  $x_1, x_2 \in R^n$ 에 대해서

$$\|\alpha(x_1, u) - \alpha(x_2, u)\| \leq \beta(\|u\|) \|x_1 - x_2\|$$

을 만족한다.

저차관측기 표준형 (13)에서 상태변수  $\eta$ 는 시스템 내부의 성질과 관련된 것으로서 시스템 출력  $y$ 를 사용하여 상태  $\eta$ 를 추정하는 것은 매우 어려운 문제이다. 상태변수  $\eta$ 를 추정하기 위해서는  $\eta$  자신의 관측기가 설계가능하기 위한 특정한 성질을 가져야 한다. 선형시스템에서 검출가능(detectable)하기 위해서는  $\eta$ 의 동력학이(필요하다면, Kalman 분해를 한 후)

$$\dot{\eta} = A_{21}\xi + A_{22}\eta$$

로 주어질 때, 행렬  $A_{22}$ 가 안정하다는 조건을 필요로 한다. 다음 가정은 이러한 선형시스템에서의 검출가능성 조건을 비선형 시스템으로 확장한 것이다.

H3 : 양정치 행렬  $P_2 \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ 과 양의 상수  $k_0 > 0$ 가 존재하여 모든  $(y, z, \eta, v) \in R^1 \times R^{r-1} \times R^{n-r} \times R^{n-r}$ 에 대해서

$$v^T P_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} q(\xi, \eta) \right] v \leq -k_0 \|v\|^2$$

을 만족한다.

가정 H3를 이용하면 외부상태  $z$ 를 알고있다는 가정하에서 내부 상태

$$\eta = q(y, z, \eta)$$

의 관측기가 존재하고 이 관측기는

$$\dot{\hat{\eta}} = q(y, z, \hat{\eta}) \quad (14)$$

로 주어진다 것을 보일 수 있다[7]. 따라서 이 가정을 이용하면 전체 시스템의 상태  $z, \eta$ 를 추정할 수 있다고 생각하기 쉽지만 그렇지 않다. 왜냐하면 관측기 (14)가 외부상태의 추정치  $\hat{z}$ 를 사용하는 것이 아니라 외부상태  $z$ 를 직접 사용하고 있기 때문이다. 따라서, 시스템의 전체 상태를 추정하기 위해서는 다음과 같은 추가적인 조건이 필요하다.

H4 : 비선형 함수  $q(\xi, \eta)$ 가  $\xi$ 에 대해서 전역적으로 Lipschitz이며, 이는  $\eta$ 에 대해서 균일하게 성립한다. 즉, 어떤 양의 상수  $l_q > 0$ 가 존재하여 모든  $\xi_1, \xi_2 \in R^r$ 과  $\eta \in R^{n-r}$ 에 대해서

$$\|q(\xi_1, \eta) - q(\xi_2, \eta)\| \leq l_q \|\xi_1 - \xi_2\|$$

을 만족한다.

마지막으로, 좌표변환 (2)와 관련하여 다음과 같은 조건이 필요하다.

H5 :  $\Phi$ 와  $\Phi^{-1}$ 는 전역적으로 Lipschitz이다. 즉 양의 상수  $l_\Phi > 0$ 와  $l_{\Phi^{-1}} > 0$ 가 존재하여 모든  $x_1, x_2 \in R^n, y_1, y_2 \in R^1, z_1, z_2 \in R^{r-1}, \eta_1, \eta_2 \in R^{n-r}$ 에 대해서

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq l_\Phi \|x_1 - x_2\|$$

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1}(y_1, z_1, \eta_1) - \Phi^{-1}(y_2, z_2, \eta_2)\| \\ \leq l_{\Phi^{-1}} (\|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\| + \|\eta_1 - \eta_2\|) \end{aligned}$$

을 만족한다.

### III. 저차 상태 관측기 설계

이제 II장에서 소개한 가정을 만족할 때, 저차관측기 표준형 (13)으로의 좌표변환을 통하여 상태관측기를 설계하도록 하자. 본 논문에서 제안하는 관측기의 형태는 다음과 같이 주어진다.

정의 1 : 다음 시스템 (15)를 시스템 (1)의 저차 관측기(reduced order observer)라 한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= (A - K(\epsilon)C)\hat{z} + (A - K(\epsilon)C)K(\epsilon)y \\ &\quad + B\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ \dot{\hat{\eta}} &= q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) \\ \hat{x} &= \Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) \end{aligned} \quad (15)$$

(15)로부터  $\hat{z} \in R^{r-1}, \hat{\eta} \in R^{n-r}$  이므로 제안된 저차 관측기를 구현하기 위해서는  $n-1$ 개의 적분기가 필요함을 알 수 있다. 대부분의 비선형 관측기 연구결과는  $n$ 개의 적분기가 필요하므로, (15)의 저차관측기를 구현하는 것이 효율적임을 알 수 있다.

정리 1 : 비선형 시스템 (1)에 대해서 가정 H1, H2, H3, H4, H5가 성립하고, 입력  $u$ 가 유한(bounded)한다고 가정하자. 그러면, 적절한 양의상수  $\epsilon^* > 0$ 이 존재하여 임의의  $0 < \epsilon < \epsilon^*$ 과 임의의 초기조건  $x(0)$ 와  $\hat{x}(0)$ 에 대해서 저차관측기 (15)가

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0 \tag{16}$$

을 만족한다. 여기서, 저차관측기 (15)에서 사용되는 상수  $k_1, k_2, \dots, k_{r-1}$ 는 다항식  $s^{r-1} + k_1 s^{r-2} + \dots + k_{r-1} = 0$ 이 Hurwitz가 되도록 선정한다.

증명 : 관측오차를

$$\begin{aligned} e_1 &= \hat{z} - z \\ e_2 &= \hat{\eta} - \eta \end{aligned}$$

로 정의하면 (13)과 (15)로부터

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (A - K(\epsilon)C)e \\ &\quad + B[\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ &\quad \quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)] \tag{17} \\ \dot{e}_2 &= q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 가정으로부터 입력  $u$ 가 유한하므로  $\|u\| \leq M$ 을 만족하는 상수  $M > 0$ 이 존재하고, 다시 함수  $\beta$ 가 단조증가하므로, 또 다른 상수  $M_1 > 0$ 이 존재하여

$$\beta(\|u\|) < \beta(M) = M_1 \tag{18}$$

을 만족한다. 가정 H2와 H5로부터

$$\begin{aligned} &\|\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ &\quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)\| \\ &\leq \beta(\|u\|) \|\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) \\ &\quad \quad - \Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta)\| \tag{19} \\ &\leq \beta(\|u\|) l_{\Phi^{-1}} (\|\hat{z} - z\| + \|\hat{\eta} - \eta\|) \\ &\leq \beta(\|u\|) l_{\Phi^{-1}} (\|e_1\| + \|e_2\|) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, 새로운 상수

$$l_p = M_1 l_{\Phi^{-1}}$$

을 정의하면, (18)과 (19)에 의하여

$$\begin{aligned} &\|\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ &\quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)\| \tag{20} \\ &\leq l_p (\|e_1\| + \|e_2\|) \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 또한, 중간값 정리(mean-value theorem)와 가정 H3를 사용하면, 어떤  $\tilde{\eta} \in \{t\hat{\eta} + (1-t)\eta : 0 \leq t \leq 1\}$ 이 존재하여

$$\begin{aligned} &e_2^T P_2 [q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta)] \\ &= e_2^T P_2 [q(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) - q(\tilde{\zeta}, \eta)] \\ &= e_2^T P_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} q(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) (\hat{\eta} - \eta) \right] \tag{21} \\ &= e_2^T P_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} q(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) e_2 \right] \\ &= -k_0 \|e_2\|^2 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, 가정 H4를 이용하면

$$\begin{aligned} &e_2^T P_2 [q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \eta) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta)] \\ &\leq l_q \|e_2\| \|P_2\| \|\hat{z} - z\| \tag{22} \\ &\leq l_q \|e_2\| \|P_2\| \|e_1\| \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 이제 다음과 같은 행렬을 정의하자

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ A_1(\epsilon) &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{\epsilon} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k_2}{\epsilon^2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{k_{r-1}}{\epsilon^{r-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{23} \\ \Xi(\epsilon) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon^{r-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

정의로부터  $A_1(\epsilon) = A - K(\epsilon)C$  이므로 (17)로부터

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= A_1(\epsilon)e + B[\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ &\quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)] \\ \dot{e}_2 &= q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta) \\ &\quad + q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \eta) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta) \end{aligned} \tag{24}$$

를 얻을 수 있다. 이제, (23)의 행렬  $A_1$ 에 대해서

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I_{r-1}$$

을 만족하는 양정치 행렬  $P_1 \in R^{(r-1) \times (r-1)}$ 을 선정하고

$$P_1(\epsilon) = \Xi(\epsilon)^T P_1 \Xi(\epsilon)$$

을 정의하자. 증명을 계속 진행하기 위하여 다음과 같은 보조정리가 필요한데, 보조정리의 증명은 어렵지 않으므로 생략한다.

보조정리 1 :

- (i)  $A_1(\epsilon) = \epsilon^{-1} \Xi(\epsilon)^{-1} A_1 \Xi(\epsilon)$
- (ii)  $A_1^T(\epsilon) P_1(\epsilon) + P_1(\epsilon) A_1(\epsilon) = -\epsilon^{-1} \Xi(\epsilon)^T \Xi(\epsilon)$
- (iii)  $\|B^T \Xi(\epsilon)\| = \epsilon^{r-2}$
- (iv)  $0 < \epsilon < 1$ 이면

$$\begin{aligned} \|\Xi(\epsilon)\| &= 1 \\ \|\Xi(\epsilon)^{-1}\| &= \epsilon^{2-r} \end{aligned}$$

을 만족한다.

다시, 정리 1의 증명으로 돌아가도록 하자. 이제 가정 H3의  $P_2$ 를 이용하여 전체 관측오차의 리아프노프 함수를

$$V(e_1, e_2) = \epsilon^{(4-2r)} e_1^T P_1(\epsilon) e_1 + e_2^T P_2 e_2 \tag{25}$$

로 선정하고 설계변수  $\epsilon$ 이

$$\epsilon < \min \left( \frac{1}{4l_p \|P_1\|}, \frac{k_0}{4(l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|)^2} \right)$$

을 만족하면 (16)이 성립함을 보이도록 하자. 리아프노프 함수 (25)의 미분을 계산하기 위하여 (21), (22)와 (24)를 이용하여  $e_2^T P_2 e_2$ 을 시간  $t$ 에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [e_2^T P_2 e_2] \\ &= 2e_2^T P_2 [q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}) - q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \eta) \\ & \quad + q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \eta) - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta)] \\ &= -2k_0 \|e_2\|^2 + 2e_2^T P_2 [q(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \eta) \\ & \quad - q(y, z + K(\epsilon)y, \eta)] \\ &= -2k_0 \|e_2\|^2 + 2l_q \|e_2\| \|P_2\| \|e_1\| \end{aligned} \quad (26)$$

임을 알 수 있다. 또한, 보조정리 1의 (ii)를 이용하여  $e_1^T P_1(\epsilon) e_1$ 을 시간  $t$ 에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_1^T P_1(\epsilon) e_1 \\ &= e_1^T (A_1(\epsilon)^T P_1(\epsilon) + P_1(\epsilon) A_1(\epsilon)) e_1 \\ & \quad + 2B^T P_1(\epsilon) e_1 [\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ & \quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)] \\ &= -\epsilon^{-1} e_1^T \Xi(\epsilon)^T \Xi(\epsilon) e_1 + 2B^T \Xi(\epsilon)^T P_1 \Xi(\epsilon) e_1 \\ & \quad \cdot [\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ & \quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)] \end{aligned}$$

이다. 이제 가중오차 (weighted error)

$$e_1^w = \Xi(\epsilon) e_1$$

을 정의하고 보조정리 1의 (iii)과 (20)을 이용하면

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_1^T P_1(\epsilon) e_1 \\ & \leq -\epsilon^{-1} \|e_1^w\|^2 + 2\|B^T \Xi(\epsilon)^T\| \cdot P_1 \cdot \|e_1^w\| \\ & \quad \cdot \|\alpha(\Phi^{-1}(y, \hat{z} + K(\epsilon)y, \hat{\eta}), u) \\ & \quad - \alpha(\Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta), u)\| \\ & \leq -\epsilon^{-1} \|e_1^w\|^2 + 2\epsilon^{r-2} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1\| \cdot \|e_1^w\| \\ & \quad + 2\epsilon^{r-2} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\| \cdot \|e_2\| \end{aligned}$$

이다. 가중오차의 정의로부터  $e_1 = \Xi(\epsilon)^{-1} e_1^w$ 이므로

$$\begin{aligned} \|e_1\| & \leq \|\Xi^{-1}(\epsilon)\| \cdot \|e_1^w\| \\ & \leq \epsilon^{2-r} \|e_1^w\| \end{aligned}$$

이고 따라서

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_1^T P_1(\epsilon) e_1 \\ & \leq -\epsilon^{-1} \|e_1^w\|^2 + 2l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\|^2 \\ & \quad + 2\epsilon^{r-2} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\| \cdot \|e_2\| \end{aligned} \quad (27)$$

이다. 이제, (26)과 (27)를 이용하여 리아프노프 함수 (25)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V & \leq -\epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 + 2\epsilon^{(4-2r)} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\|^2 \\ & \quad + 2\epsilon^{(2-r)} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\| \cdot \|e_2\| \\ & \quad - 2k_0 \|e_2\|^2 + 2\epsilon^{2-r} l_q \|e_2\| \|P_2\| \|e_1^w\| \end{aligned}$$

다시,  $\epsilon \leq \frac{1}{4l_p \|P_1\|}$  를 이용하면

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 + 2\epsilon^{(4-2r)} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\|^2 \\ & \leq -\epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 (1 - 2\epsilon l_p \|P_1\|) \\ & \leq -\frac{1}{2} \epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V & \leq -\frac{1}{2} \epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 \\ & \quad + 2\epsilon^{(2-r)} l_p \|P_1\| \cdot \|e_1^w\| \cdot \|e_2\| \\ & \quad - 2k_0 \|e_2\|^2 + 2\epsilon^{(2-r)} l_q \|e_2\| \|P_2\| \|e_1^w\| \end{aligned}$$

이다. 위식을 변형하면

$$\begin{aligned} V & \leq -\frac{1}{2} \epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2 - 2k_0 \|e_2\|^2 \\ & \quad + 2\epsilon^{(2-r)} (l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|) \|e_1^w\| \cdot \|e_2\| \\ & \leq -k_0 \|e_2\|^2 \\ & \quad - k_0 \left( \|e_2\| - \frac{1}{k_0} \epsilon^{(2-r)} (l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|) \|e_1^w\| \right)^2 \\ & \quad - \left( \frac{1}{2} \epsilon^{(3-2r)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k_0} \epsilon^{(4-2r)} (l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|)^2 \right) \|e_1^w\|^2 \\ & \leq -k_0 \|e_2\|^2 - \left( \frac{1}{2} \epsilon^{(3-2r)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k_0} \epsilon^{(4-2r)} (l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|)^2 \right) \|e_1^w\|^2 \end{aligned}$$

이다. 또한,  $\epsilon < \frac{k_0}{4(l_p \|P_1\| + l_q \|P_2\|)^2}$  을 이용하면

$$V \leq -k_0 \|e_2\|^2 - \frac{1}{4} \epsilon^{(3-2r)} \|e_1^w\|^2$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{z}(t) - z(t)\| = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\eta}(t) - \eta(t)\| = 0$$

을 얻을 수 있고 마지막으로 가정 H5를 이용하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

를 얻는다. ■

참고문헌 [9]의 연구결과와 비교하면, 본 논문에서 제안하는 저차관측기는 관측기의 차수를 줄일 수 있다는 장점이 있다. 반면에, 참고문헌 [9]에서 요구했던 가정들뿐만 아니라 H5의 가정을 추가로 필요로 하기 때문에, 적용 가능한 시스템은 상대적으로 적어지는 단점이 있다.

이제, 국소추정문제(local estimation problem)를 고려해보자. 먼저, 가정 H1의 완전성(completeness) 조건은 국소 좌표 변환에서는 필요하지 않다. 또한, 시스템 (1)의 영동특성(zero dynamics)이 국소지수 안정(locally exponentially)하다면 가정 H3가 성립함을 보일 수 있다[9]. 마지막으로, 가

정 H2, H4, H5는  $x$ 와  $\hat{x}$ 가 유계(bounded)이면, 평활한(smooth) 시스템에 대해서 항상 만족한다. 따라서, 다음과 같은 보조 정리를 얻을 수 있다.

보조정리 2 : 비선형 시스템 (1)의 영동특성이 국소지수 안정하고, 입력  $u$ 가 유한(bounded)하다고 가정하자. 그러면, 양의상수  $\delta > 0$ ,  $\epsilon^* > 0$ 이 존재하여 임의의  $0 < \epsilon < \epsilon^*$ ,  $\|\hat{x}(0) - x(0)\| < \delta$ 을 만족하는 초기조건  $\hat{x}(0)$ , 그리고  $\|x(t) - x(0)\| < \delta$ ,  $t \geq 0$ 에 대해서 저차관측기 (15)는

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

을 만족한다. 여기서, 저차관측기 (15)에서 사용되는 상수  $k_1, k_2, \dots, k_{r-1}$ 는 다항식  $s^{r-1} + k_1 s^{r-2} + \dots + k_{r-1} = 0$ 이 Hurwitz가 되도록 선정한다.

증명 : 정리 1과 거의 유사하므로 생략한다. ■

IV. 예제

제안된 저차관측기의 설계방법을 설명하기 위하여 다음과 같은 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{28}$$

여기서

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} -x_1^2 + x_2 + x_3^2 x_4 \\ x_1 x_2 - x_2^2 + \cos x_4 \\ x_1^2 - x_2 x_4 - 2x_3 - x_3^2 x_4^2 \\ x_1^2 \sin x_1 + x_2 x_3 - x_4 + x_3^3 x_4 \end{bmatrix} \\ g(x) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\ h(x) &= x_1 \end{aligned}$$

이다. 본 절에서는 시스템 (28)의 모든 상태변수가 항상 유한하다(bounded)고 가정한다. 이 경우, 가정 H1의 완전성은 필요하지 않으며[10], 시스템 (28)은 평활한 함수로 구성되어 있으므로, 가정 H2, H4, H5를 자동으로 만족한다. 또한, 시스템 (28)에 대해서

$$\begin{aligned} L_g h &= 0 \\ L_g L_g h &= 1 \end{aligned}$$

이므로, 상대차수가 2임을 알 수 있다. 따라서, 좌표변환

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3^2 x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

을 사용하면 시스템 (28)은 다음과 같은 표준형으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= a(x) + u \\ \dot{\eta}_1 &= \xi_1^2 - (\xi_2 + \xi_1^2)\eta_2 - 2\eta_1 \\ \dot{\eta}_2 &= \xi_1^2 \sin \xi_1 + (\xi_2 + \xi_1^2)\eta_1 - \eta_2 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} a(x) &= -2x_1(-x_1^2 + x_2 + x_3^2 x_4) + x_1 x_2 - x_2^2 \\ &\quad + \cos x_4 + 2x_3 x_4(x_1^2 - 2x_3 - x_2 x_4) \\ &\quad + x_3^2(x_1^2 \sin x_1 + x_2 x_3 - x_4) \end{aligned} \tag{30}$$

이다. 또한,

$$\begin{aligned} v^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} a(\xi, \eta) \right] v &= [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} -2 & -z_1^2 - z_2 \\ z_1^2 + z_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= -2v_1^2 - v_2^2 \\ &\leq -\|v\|^2 \end{aligned}$$

이므로  $P_2 = I_2$ 와  $k_0 = 1$ 로 선정하면 가정 H3를 만족함을 알 수 있다. 좌표변환 (29)에 의하여

$$\Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + \xi_1^2 - \eta_1^2 \eta_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

이고 (10)에 의하여

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} x &= \Phi^{-1}(y, z + K(\epsilon)y, \eta_1, \eta_2) \\ &= \begin{bmatrix} y \\ z_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y + y^2 - \eta_1^2 \eta_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있어서 저차관측기 (15)는

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= -\frac{k_1}{\epsilon} \hat{z}_1 - \frac{k_1^2}{\epsilon^2} y \\ &\quad + a \left[ \Phi^{-1} \left( y, \hat{z}_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 \right) \right] + u \\ \hat{\eta}_1 &= y^2 - \left( \hat{z}_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y + y^2 \right) \hat{\eta}_2 - 2\hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 &= y^2 \sin y + \left( \hat{z}_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y + y^2 \right) \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2 \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_1 + \frac{k_1}{\epsilon} y + y^2 - \hat{\eta}_1^2 \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서,  $a(x)$ 는 (30)에서 정의되었고 관측기 이득  $k_1$ 은 다항식  $s + k_1$ 이 Hurwitz가 되도록 선정한다.

기존의 선형화 관측기와 제안된 관측기의 성능 비교를 위하여 모의실험을 수행하였다. 시스템의 입력은 출력  $y$ 가 기준 궤적  $y_R = A \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ 를 접근적으로 추종하도록 입

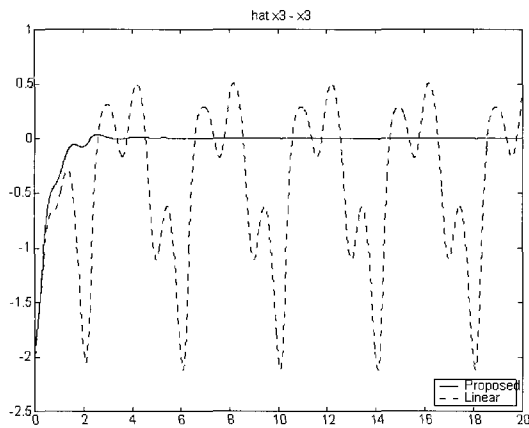


그림 1.  $A=2$  일 때의  $x_3$ 의 관측오차.  
 Fig. 1. Observation error of  $x_3$  with  $A=2$ .

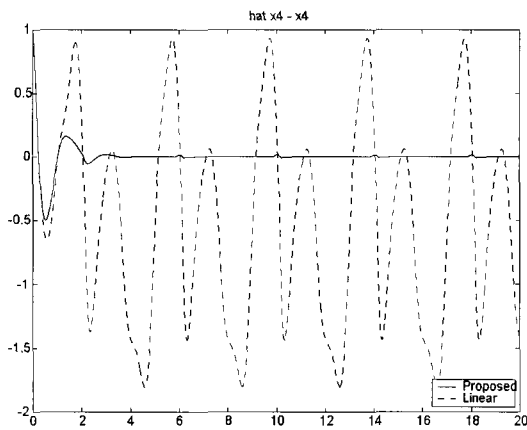


그림 2.  $A=2$  일 때의  $x_4$ 의 관측오차.  
 Fig. 2. Observation error of  $x_4$  with  $A=2$ .

출력 선형화제어기를 사용하여 설계하였다. 시스템의 초기 조건은

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

로 가정하였으며 관측기의 초기조건은 모두 0으로 가정하였다. 또한, 제안된 관측기의 관측이득은  $k_1=2$ 과  $\epsilon=0.01$ 로 설계하였으며, 기존의 선형화 관측기의 극점은 200이 되도록 설계하였다.

모의 실험 결과  $A < 0.5$ 인 경우에는 제안된 관측기와 선형관측기 모두 실제 상태변수를 잘 추정하지만,  $A$ 가 점점 증가하면 선형관측기의 추정성능은 현저히 저하됨을 알 수 있었다. 그림 1과 그림2는  $A=2$ 인 경우의 모의실험 결과로서 제안된 관측기는 실제 상태변수를 잘 추정하지만 선형관측기는 제대로 동작하지 않음을 확인할 수 있다. 또한, 기존의 관측기는 모든 상태변수를 추정하므로 적분기가 4개 필요하지만, 제안된 저차관측기는  $x_2, x_3, x_4$ 만을 추정

하므로 적분기가 3개 필요하여 구현하는데 보다 간단하고 경제적임을 알 수 있다.

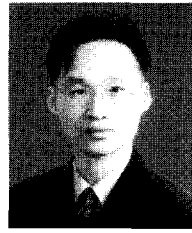
**V. 결론**

본 논문에서는 비선형 시스템의 상태변수를 추정하기 위한 저차관측기를 제시하였다. 유사 리아프노프 함수의 존재성과 적절한 함수의 Lipschitz 조건이 만족될 경우, 제시한 저차관측기의 안정성을 보장할 수 있음을 증명하였다. 참고 문헌 [9]의 완전차수(full-order) 관측기 결과와 비교할 때, 제안된 관측기는 그 차수를 출력의 개수만큼 줄일 수 있어서 좀 더 간단하고 경제적으로 구현할 수 있다는 장점이 있다. 반면에, 출력에 센서잡음이 많이 섞이는 경우에는 이러한 잡음이 직접 관측기에 전달되기 때문에 [9]의 완전차수(full-order) 관측기보다 성능이 떨어질 수 있다는 단점도 존재한다. 향후의 연구방향으로는 불확실성이 존재하는 시스템의 상태관측을 위한 적응 저차 관측기에 대한 연구가 필요할 것으로 보인다.

**참고문헌**

- [1] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems and Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [2] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.
- [3] J. Rudolph and M. Zeitz, "A block triangular nonlinear observer normal form," *Systems and Control Letters*, vol. 23, pp. 1-8, 1994.
- [4] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems : Application to bioreactors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [5] G. Ciccarella, M. Dallamora, and A. Germani, "A luenberger-like observer for nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 57, no. 3, pp. 537-556, 1993.
- [6] R. A. Garcia, and C.E. Dattellis, "Trajectory tracking in nonlinear systems via nonlinear reduced-order observers," *Int. J. Contr.*, vol. 62, no. 3, pp. 685-715, 1995.
- [7] J. Tsiniias, "Observer design for nonlinear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 13, pp. 135-142, 1989.
- [8] N. H. Jo, and J. H. Seo, "A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 5, pp. 968-973, 2000.
- [9] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 12, pp. 2388-2393, 2000.

- [10] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.



**조 남 훈**

1970년 3월 18일생. 1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1994). 서울대 대학원 전기공학부 박사(2000). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~2004년 숭실대학교 전기제어시스템공학부 전임강사. 2004년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수. 관심분야는 비선형 제어, 적응제어, 신호처리. Homepage : <http://ee.ssu.ac.kr/~nhjo>