

강소성 유한요소해석에 의한 비정상상태 금속성형 해석에서 형상 갱신을 위한 혼합법

최영[#], 여흥태^{*}, 허관도^{*}

Hybrid Method for Updating Geometry in Non-steady State Metal Forming Analysis by Rigid Plastic FEM

Young Choi[#], Hongtae Yeo^{*}, Kwando Hur^{*}

ABSTRACT

The volume of the metal is not changed for the plastic deformation. For metal forming simulation, rigid-plastic FEM codes are widely used. Updating geometry using Euler method in the simulation, the volume loss is occurred. In this paper, hybrid method is introduced to perform a more accurate simulation reducing computation time. In the proposed hybrid method, RK2 method is used for geometry updating at first time step and after the boundary condition of the node is changed. At the others, Adams-Bashforth or theta method is applied to update geometry. The results show that the simulations of upsetting and side-pressing can be performed within 0.02%.

Key Words : Geometry update(형상갱신), Rigid plastic FEM(강소성 유한요소법), RK2 method(2차 런지쿠타법), Taylor method of order two(2차 테일러법), Multi-step method(다단계방법), Theta method (씨타법), Hybrid method(혼합법)

기호설명

$\bar{\sigma}$: flow stress
 $\dot{\bar{\epsilon}}$: effective strain-rate
 K : penalty constant
 \bar{t}_i : surface tractions
 Δt : time-increment
 Δt^* : temporary time-increment
 u : global velocity component
 \dot{u} : acceleration component
 v : local velocity component
 x_i : coordinate of node at time t

1. 서론

현재 금속성형 공정에 대한 해석법으로 강소성 유한요소법¹이 널리 이용되고 있다. 강소성 유한요소법에서는 주어진 시간에 대해 속도장을 얻고 가공물 형상을 시간증분만큼 갱신하는 과정을 반복하여 비정상상태 금속성형 공정을 해석한다.

일반적인 강소성 유한요소법은 형상갱신(geometry update) 과정에서 오일러법(Euler method)을 이용한다. 오일러법에서는 시간증분의 크기가 해의 정밀도에 중요한 인자이다. 충분히 정밀한 해를 얻기 위해, 작은 시간증분을 이용하여 비정상상태 금속성형공정을 해석함으로써 해석시간이 많

* 접수일: 2004년 5월 12일; 게재승인일: 2004년 9월 9일

교신저자: 인제대학교 기계자동차공학부

Email: ychoi@inje.ac.kr, Tel: (055) 320-3755

* 동의대학교 기계공학부

이 걸리는 단점이 있으며 형상갱신에 따른 가공물 체적손실(volume loss)이 발생한다.

Chenot² 등은 내연적 오일러법(implicit Euler method)을 개발하여 3차원 단조공정을 유한요소해석하였다. 시간증분 이후의 형상과 속도장을 반복 해석 기법을 통해 결정하는 내연적 오일러법은 일반적인 오일러법인 외연적 오일러법(explicit Euler method)에 비해 과다한 해석시간이 필요하다. 또한 Chenot³ 등은 관성효과를 고려한 금속성형공정의 유한요소해석을 위해 가속도항을 고려하고 준-내연적 방법을 통해 시간증분 이후의 형상과 속도장을 반복해석을 통해 결정하였다. 준-내연적 방법에서 가속도성분은 씨타법(θ method)을 이용하여 결정하였는데, 변형 초기의 가속도는 무시하였다.

Oh⁴ 등은 형상갱신 과정에서 RK2 방법(2nd order Runge-Kutta method)를 이용하여 체적손실을 최소화하고 시간증분을 증가시키는 방법을 제안하였다. 비정상상태 금속성형 공정의 해석에서 RK2 방법을 이용함으로써 체적손실을 작아져 해석 정밀도를 향상시켰다. 그러나 RK2법을 이용한 형상갱신 과정에서 내부적인 해석단계가 필요하므로 비정상상태 금속성형 공정의 강소성 유한요소해석에서 시간증분을 2배 증가시켜도 오일러법과 동일한 해석시간이 필요하다.

최근, Toyoshima⁵ 등은 체적손실을 없애기 위해, 구성방정식에 체적손실 회복(volume loss recovery) 기법을 도입한 강소성 유한요소법을 제안하였다. 체적손실 회복 기법에서는 해석단계에서 얻어지는 속도장이 체적일정조건을 만족하지 못하는 문제점이 있다.

본 연구에서는 강소성 유한요소법의 형상갱신 과정에서 체적손실의 최소화 및 해석시간의 단축을 위해 RK2법과 다단계방법의 장점을 적용한 혼합법(hybrid method)을 이용하는 방법을 제안하고자 한다.

2. 강소성 유한요소법과 형상갱신

2.1 강소성 유한요소법

강소성 유한요소법에서 비압축성 조건을 포함하는 범함수의 변분은 아래와 같다¹

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v dV - \int_{S_p} \bar{t}_i \delta v_i dS = 0 \quad (1)$$

여기서, $\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$, $\bar{\epsilon} = \sqrt{(2/3)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}$ 이며, $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii}$ 이다.

식(1)은 유한요소 이산화 절차를 통해 비선형 연립방정식으로 변환된다. Newton법을 이용하여 아래와 같은 선형화된 연립방정식을 얻고 해를 반복적으로 갱신하여 해를 구한다.

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial v_i} \right]_{v=v_0} + \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial v_i \partial v_j} \right]_{v=v_0} \Delta v_j = 0 \quad (2)$$

해석단계의 초기에 식(2)의 초기해는 직접반복법(direct iteration method)으로 구한다¹.

2.2 형상갱신 기법

비정상상태 금속성형 공정의 강소성 유한요소 해석에서 현재의 시간(t)에서 결정된 절점속도를 이용하여, 식(4)과 같이 시간증분(Δt) 후의 형상을 결정한다. 식(4)는 2차 테일러 방법⁶(Taylor method of order two)으로 3계 이상의 도함수를 포함한 항은 무시하였다.

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x) \quad (3)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + u_t \Delta t + \frac{1}{2} \dot{u}_t \Delta t^2 \quad (4)$$

2.2.1 오일러법

일반적인 강소성 유한요소법¹에서는 오일러법을 이용하여 형상갱신과정을 수행한다. 즉, 식(4)에서 2계 도함수인 가속도항을 무시하고 식(5)와 같이 시간증분(Δt) 후의 형상을 결정한다.

$$x_{t+\Delta t} = x_t + u_t \Delta t \quad (5)$$

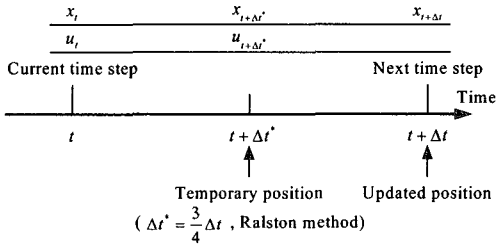
2.2.2 RK2법

RK2법⁴에서는 현재의 시간(t)에서 임시적인 시간증분(Δt^*)으로 형상갱신을 식(5)로 수행한 후, 절점속도를 결정하여 식(4)에서의 2계 도함수인 가속도항을 식(6)과 같이 결정한다.

본 연구에서는 RK2법에서 필요한 임시적 시간증분(Δt^*)은 Ralston법⁶으로 결정하였다. 같은 시간증분(Δt)으로 해석할 경우, RK2법에서는 내부적인

해석단계가 필요함으로 오일러법에 비해 해석시간이 증가한다. RK2법의 해석과정을 Fig. 1에 나타내었다.

$$\dot{u}_i = \frac{u_i - u_{t+\Delta t^*}}{\Delta t^*} \quad (6)$$



- 1) Calculation of u_i at the current time step, time t
- 2) Geometry update to the temporary position, $x_{t+\Delta t^*} = x_i + u_i \Delta t^*$
- 3) Calculation of $u_{t+\Delta t^*}$ at the time, $t + \Delta t^*$
- 4) Calculate of acceleration $\dot{u}_i = \frac{u_i - u_{t+\Delta t^*}}{\Delta t^*}$
- 5) Geometry update for next time step, $t + \Delta t$

Fig. 1 RK2 method for geometry updating

2.2.3 다단계 방법

다단계 방법⁶(multi-step method)은 이전단계의 속도성분을 수치 미분하여 식(4)에서 가속도 성분을 계산하는 방법이다. 2단계 Adams-Bashforth 방법(AB2)은 이전단계의 속도 성분만을 이용하는 방법으로 식(7)에 나타낸다. 3단계 Adams-Bashforth 방법은 이전단계와 그 이전단계의 속도성분을 이용하는 방법으로 식(8)에 나타낸다. 다단계 방법은 해석 초기단계에서 이전단계의 속도가 없으므로 적용할 수 없는 단점이 있으며, 비정상상태 변형의 해석에서, 자유절점(free node)이 금형에 접촉하는 경우와 같이 절점의 경계조건이 변경된 후 다단계 방법을 적용하면, 절점이 금형을 침투하게 되며, 절점 위치를 보정해야 하는 문제점이 있다. 이전속도 성분을 이용하여 가속도 성분을 평가하기 때문에 RK2법에 비해 계산시간이 절감된다. 반면, RK2법에서는 다단계 방법이 갖는 문제점이 없다. 다단계 방법을 Fig. 2에 나타낸다.

$$\dot{u}_i = \frac{u_i - u_{t-\Delta t_1}}{\Delta t_1} \quad (7)$$

$$\dot{u}_i = \frac{\Delta t_1^2 (u_{t-\Delta t_2} - u_i) - \Delta t_2^2 (u_{t-\Delta t_1} - u_i)}{\Delta t_1 \cdot \Delta t_2 (\Delta t_2 - \Delta t_1)} \quad (8)$$

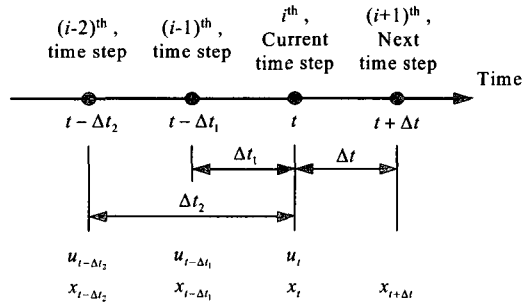


Fig. 2 Multi-step method for geometry updating

2.2.4 씨타법(θ method)

씨타법⁷은 이전단계의 가속도 성분과 속도성분을 이용하여 현재 단계의 가속도 성분을 평가하는 방법으로 식(9)와 같다. 내부적 해석단계가 없이 현재 해석단계에서 가속도 성분을 결정할 수 있으나 다단계 방법과 같은 문제점이 있다. 씨타(θ)값에 따라 해석 안정성 문제가 생길 수 있다.

$$\dot{u}_i = \frac{1}{1-\theta} \frac{u_i - u_{t-\Delta t_1}}{\Delta t_1} - \frac{\theta}{1-\theta} \dot{u}_{t-\Delta t} \quad (9)$$

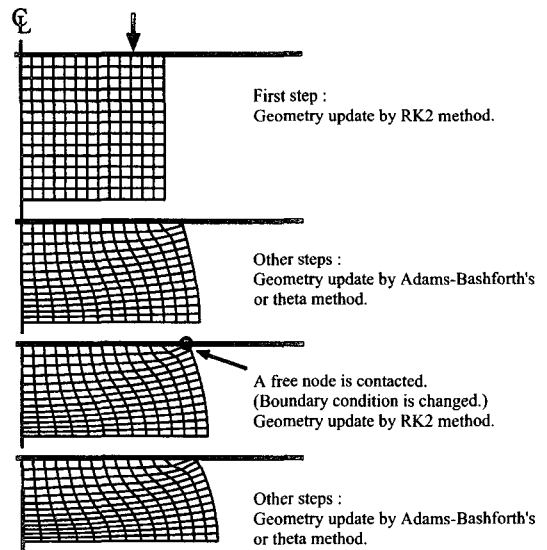


Fig. 3 Hybrid method for geometry updating

2.2.5 혼합법(Hybrid method)

본 연구에서는 RK2법의 문제점인 내부적인 해석단계를 없애고 다단계 방법 및 씨타법의 문제점인 초기해석에서의 가속도 문제와 절점 경계조건이 바뀔 때 문제점을 해결하기 위해, 해석초기 및 경계조건이 변경된 후 RK2법을 적용하고 RK2법 이후 다단계 방법 혹은 씨타법을 적용하는 혼합법(hybrid method)을 제안하고 평가한다. 이를 Fig. 3에 나타낸다.

2.3 체적손실

강소성 유한요소법의 형상갱신 과정에서 발생하는 체적 변화를 한 개 요소만을 고려하여, 평면변형을 조건에서 오일러법인 식(5)와 2차 테일러 방법인 식(4)에 대해 적용하면 체적 변화율은 아래 식(10)과 식(11)과 같다.

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{Euler} = -\left(\frac{\dot{H}}{H}\Delta t\right)^2 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{Taylor(2nd-order)} = \frac{(\dot{H}\dot{W})'}{HW} \frac{\Delta t^3}{2} + \frac{(\ddot{H}\ddot{W})}{HW} \frac{\Delta t^4}{4} \quad (11)$$

여기서, V 는 요소의 체적, ΔV 는 체적 변화량, H 는 요소의 높이, W 는 요소의 폭, Δt 는 시간증분을 나타낸다.

가속도항을 고려하는 2차 테일러 방법의 체적 변화율은 시간증분의 3승에 관련됨으로 가속도항을 고려하는 형상갱신 방법인 RK2법과 혼합법의 경우, 체적변화가 오일러법에 비해 아주 작음을 예상할 수 있다.

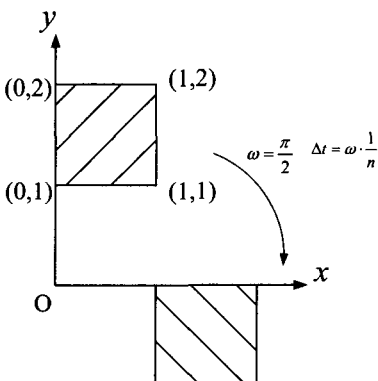
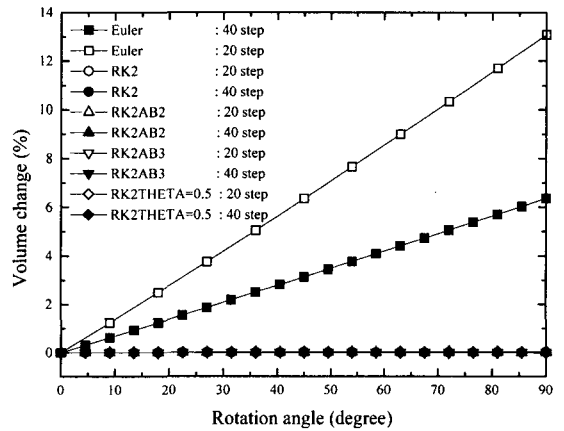


Fig. 4 Model for the pure rotation of one element

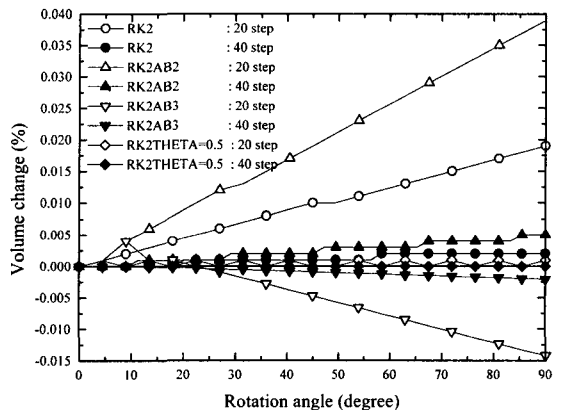
3. 시뮬레이션 결과

3.1 해석개요

본 논문에서 표기된 형상갱신 기법으로 RK2는 2차 런지쿠타법, 식(6)을 나타내고, RK2AB2는 RK2법과 2단계 Adams-Bashforth 방법, 식(7)을 사용한 혼합법을 나타낸다. RK2AB3는 RK2법과 3단계 Adams-Bashforth 방법, 식(8)을 사용한 혼합법이며, RK2THETA는 RK2법과 씨타법, 식(9)로 가속도항을 평가하는 방법을 사용한 혼합법을 나타낸다.



(a) Include Euler method



(b) Exclude Euler method

Fig. 5 Volume change during the pure rotation of one element

3.2 순수회전

각각의 형상 갱신 기법을 평가하기 위한 방법으로 Fig. 4와 같이 하나의 요소(element)에 대한 순수 회전(pure rotation)에 따른 체적 변화를 Fig. 5에 나타낸다. 여기서 회전각(ω)는 $\pi/2$ 이고, 시간 증분(Δt)는 회전각을 반복횟수(n)로 등분하여 나타낸다.

오일러법을 포함한 형상 갱신 기법들의 순수 회전에 따른 체적 변화를 Fig. 5 (a)에 나타낸다. 오일러법에 비해 다른 형상 갱신 기법들이 체적 변화가 아주 작음을 알 수 있다. 오일러법을 제외한 형상 갱신 기법의 체적 변화를 Fig. 5 (b)에 나타낸다. 등분이 많은 경우 체적변화가 작아지며 RK2THETA 법이 가장 작은 체적변화를 나타낸다.

RK2THETA 방법에서 씨타(θ)값에 따른 순수 회전에서 발생한 체적변화를 Fig. 6에 나타낸다. $\theta=0.75$ 의 경우, 불안정한 결과를 나타낸다. 본 연구에서는 RK2THETA 방법의 씨타(θ)값을 체적 변화가 가장 작은 0.5로 선택한다.

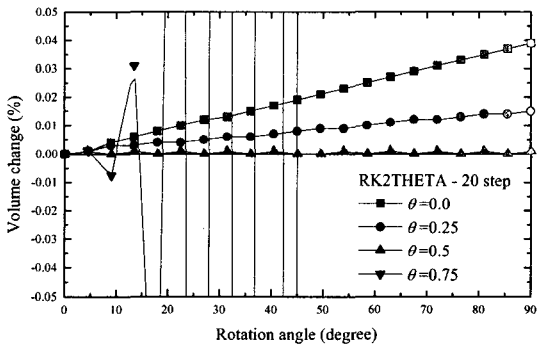


Fig. 6 Volume change during the pure rotation of one element

3.3 원통형 압축

축대칭 형상의 원통형 압축에 대해 형상 갱신 기법들을 적용한다, 절점수는 441이고 요소수는 400인 1/4 단면에 대한 유한요소모델을 사용한다. 이를 Fig. 7에 나타내었다. 마찰상수 $m=0.5$ 이며, 유동응력(flow stress)는 식(12)와 같다. 대칭면을 기준으로 높이는 25mm이고, 반경이 25mm이다. 압축 종료 위치는 초기높이에 대해 60%인 10mm로 한다. 초기 속도는 -1mm/sec 이다. 시간증분은 0.1로 하였다.

$$\bar{\sigma} = 10 \cdot \bar{\epsilon}^{0.1} \text{ (MPa)} \quad (12)$$

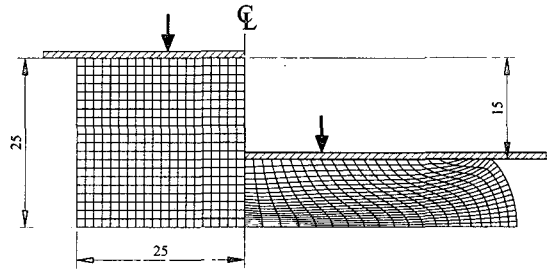
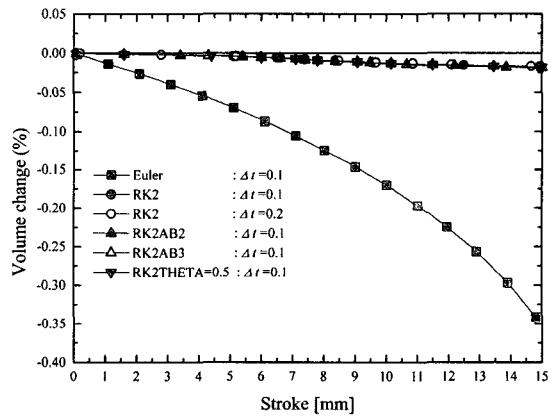
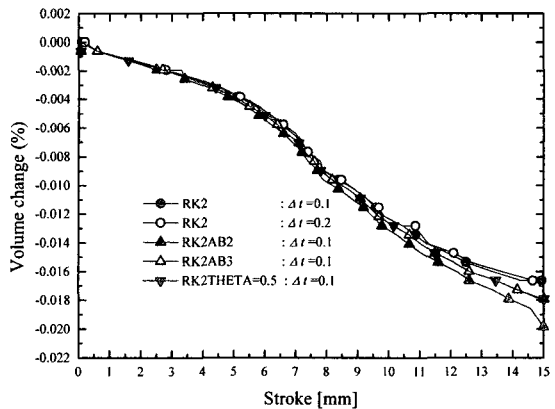


Fig. 7 FE-model for the upsetting of solid billet

원통형 압축에서 오일러법을 포함한 형상 갱신 기법들에 따른 체적 변화를 Fig. 8 (a)에 나타낸다.



(a) Include Euler method



(b) Exclude Euler method

Fig. 8 Volume change during the upsetting of solid billet

오일러 방법에 비해 다른 형상 갱신 기법들이 체적 변화가 아주 작음을 알 수 있다. 오일러 방법을 제외한 형상 갱신 기법에 따른 체적 변화를 Fig. 8 (b)에 나타낸다. RK2 방법이 시간증분 0.1과 0.2에서 체적 변화가 가장 작은 것을 알 수 있고, RK2AB3 방법과 RK2THETA($\theta=0.5$) 방법이 근소한 차이를 나타낸다. 가속도항을 고려한 형상갱신 방법인 RK2, RK2AB2, RK2AB3 및 RK2THETA 방법에서 체적변화는 0.02%미만임을 알 수 있다.

해석시간(computation time)의 비교를 Table 1에 나타낸다. RK2법에서 내부적인 해석단계가 필요하기 때문에 같은 시간증분에 대해 RK2법이 2배 정도 많은 해석시간이 필요하다.

Table 1 Computation times of the upsetting of solid billet

Method	Time [sec]
Euler ($\Delta t=0.1$)	137
RK2 ($\Delta t=0.1$)	224
RK2 ($\Delta t=0.2$)	137
RK2AB2 ($\Delta t=0.1$)	144
RK2AB3 ($\Delta t=0.1$)	139
RK2THETA ($\Delta t=0.1$)	143

해석시간 및 체적 변화를 고려하면 본 연구에서 제안한 혼합법(hybrid method)인 RK2AB3 방법과 RK2THETA 방법이 유용함을 알 수 있다.

3.4 사이드 압축

성형과정에서 자유절점의 접촉발생이 많은 경우에 대해 형상 갱신 기법들의 유용성을 평가하기 위하여 사이드 압축을 해석한다. 절점수가 228이고 요소수는 198인 1/4단면에 대한 유한요소모델을 이용하였다. 이를 Fig. 9에 나타낸다. 해석조건은 원통형 압축의 경우와 같다.

사이드 압축 공정에서 오일러 방법을 포함한 형상 갱신 기법들에 따른 체적 변화를 Fig. 10 (a)에 나타낸다. 오일러 방법에 비해 다른 형상 갱신 기법들이 체적 변화가 아주 작음을 알 수 있다. 오일러 방법을 제외한 형상 갱신 기법의 체적 변화를 Fig. 10 (b)에 나타낸다.

시간증분 0.1의 RK2법이 체적 변화가 가장 작다. RK2($\Delta t=0.2$), RK2AB3 및 RK2THETA($\theta=0.5$) 방

법이 근소한 차이를 나타낸다. 가속도항을 고려한 형상갱신 기법에서의 체적변화는 0.02% 미만이다.

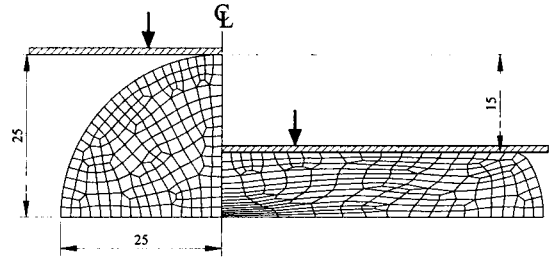
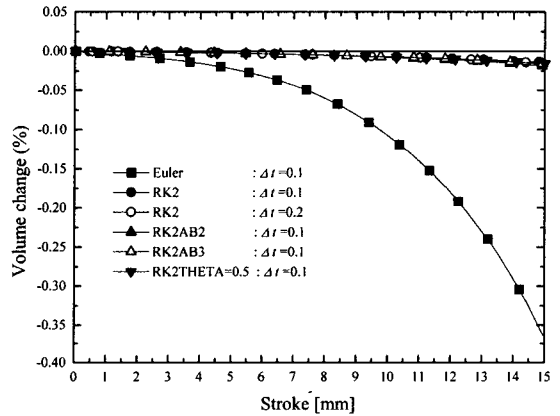
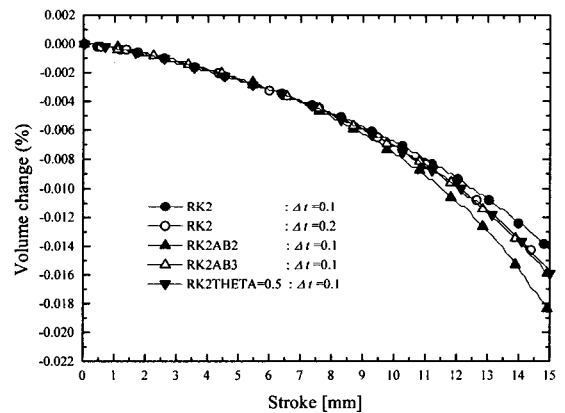


Fig. 9 Volume change during the side-pressing



(a) Include Euler method



(b) Exclude Euler method

Fig. 10 Volume change during the side-pressing

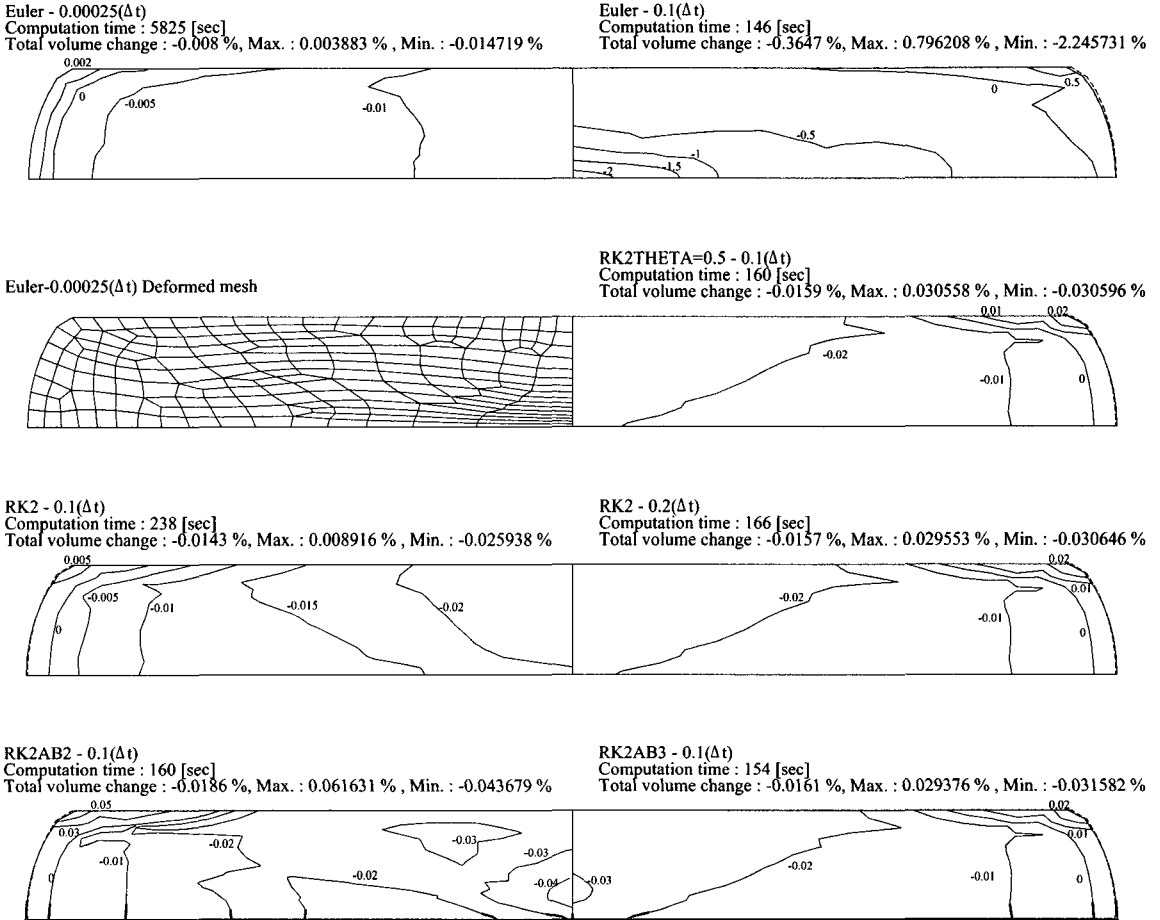


Fig. 11 Distribution of volume change at 60% reduction of the side-pressing

각각의 형상 갱신 기법에 대해 해석시간의 비교를 Table 2에 나타낸다.

Table 2 Computation times of the side-pressing

Method	Time [sec]
Euler ($\Delta t=0.1$)	146
RK2 ($\Delta t=0.1$)	238
RK2 ($\Delta t=0.2$)	166
RK2AB2 ($\Delta t=0.1$)	160
RK2AB3 ($\Delta t=0.1$)	154
RK2THETA ($\Delta t=0.1$)	160

혼합법에서 자율절점의 접촉 후 RK2법을 사용함으로 해석시간이 원통형 압축에 비해 증가하였으며, 오일러법에 비해서 약 10% 해석시간이 증가하였다.

각각의 형상 갱신 기법들에 의한 체적 변화의 분포를 Fig. 11에 나타낸다. 비교를 위해, 오일러법에서 시간증분(Δt)을 $2.5E-4$ (60000 step)으로 아주 작게 적용한 해석결과를 함께 나타낸다.

시간증분이 아주 작은 오일러법의 경우 체적 변화가 가장 작다. 그러나 이 경우, 상당한 해석시간이 필요하여 실용적이지 못하다. 오일러법에 실제 유용한 시간증분을 사용한 경우, 체적변화가 발생하고 국부적으로 0.8% 체적증가가 일어남을 알 수 있는데, 특히, 다단계 공정과 같은 경우, 해

석 정밀도를 낮추는 요인이 될 것이다. RK2법은 체적변화가 균일하고 총 체적 변화량도 작은 우수한 방법임을 알 수 있다. 그러나 내부 해석단계가 필요하여 해석시간이 증가하는 단점이 있다. 강소성 유한요소해석에서 해의 수렴성에 관련되어 요소의 크기에 따라 시간증분이 제한됨으로 RK2법에서 시간증분을 증가시켜 해석시간을 감소시키는 것은 제한적이다.

RK2AB2 방법을 적용한 경우, 전반적으로 체적손실 분포가 균일하지 못하고 상당량의 국부적 체적증가와 체적감소가 일어남을 알 수 있다. RK2AB3 방법 및 RK2THETA 방법의 경우는 RK2법과 유사한 체적변화분포를 보이고 국부적 체적 변화량도 작다.

본 연구에서 제안한 혼합법(hybrid method)인 RK2AB3 방법과 RK2THETA 방법은 해석시간과 체적변화를 고려할 때 강소성 유한요소법의 형상 갱신 기법으로 실용적인 것으로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 강소성 유한요소법의 형상갱신 과정에서 발생하는 체적손실을 최소화하기 위해, RK2법과 다단계 방법의 장점을 적용한 혼합법(hybrid method)을 제안하고 평가하였다.

1. 순수회전의 경우, RK2, RK2AB3 및 RK2THETA 방법에서 체적변화가 0.02% 미만으로 낮게 나타났다. 또한 RK2THETA 방법은 $\theta=0.5$ 일 경우, 체적변화가 가장 작았다.
2. 원통형 압축 및 사이드 압축공정에서 RK2 방법과 혼합법 모두 체적변화가 0.02% 미만으로 아주 작은 것을 알 수 있었다. 사이드 압축 공정에서 체적 변화량의 분포는 RK2법이 가장 우수하였다. RK2AB2 방법의 경우, 비교적 체적 변화량의 분포가 균일하지 못하고 상당량의 국부적 체적변화가 발생하였다. RK2, RK2AB3 및 RK2THETA 방법은 국부적 체적변화가 작은 것으로 나타났다.
3. 오일러법에 비해 RK2법의 해석시간이 2배 가까이 증가하였으며, 혼합법의 경우는 절점 경계 조건이 빈번히 바뀌는 경우에 약 10%의 증가가 있었다.

그러므로, 본 연구에서 제안한 혼합법인 RK2AB3 방법과 RK2THETA 방법은 해석시간과

체적변화를 고려할 때 강소성 유한요소법의 형상 갱신 기법으로 실용성이 매우 높을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Kobayashi, S., Oh, S. I. and Altan, T., Metal forming and the finite element method, New York: Oxford University Press, pp. 131-3373, 1989.
2. Surdon, G. and Chenot, J. L., "Finite Element Calculation of Three-Dimensional Hot Forging," Proc. of the NUNIFORM 86 Conf., pp. 287-292, 1986.
3. Miles, M. P., Fourment, L. and Chenot, J. L., "Inertia Effects in Finite-Element Simulation of Metal Forming Processes," J. of Mater. Process. Technol. 45, pp. 19-24, 1994.
4. Kang, K. P., Park, Y. B. and Oh, S. I., "Improvement in Rigid Plastic FEM by Applying RK2 Method to the Integration Procedure," Proc. of AFDM99, pp. 219-224, 1999.
5. Toyoshima, S., Gotoh, M. and Jian, S., "A Simple Volume Loss Recovery Scheme in Non-Steady State Metal Forming Analysis by the Rigid Plastic FEM," J. of Mater. Process. Technol. 139, pp. 195-200, 2003.
6. Burden, R. L. and Faires, J. D., Numerical Analysis (Sixth Edition), Brooks/Cole Publishing, 1999.
7. Dahlquist, G. and Bjorck, A., Numerical Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs Nj, 1974.